8. Die natürlichen Zahlen; das Unendlichkeitsaxiom

Wir wollen die Klasse $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen als die der „kleinsten" Ordinalzahlen definieren. Aufgrund der Ergebnisse von Kapitel 7 können wir dann zeigen, daß die Struktur $(\mathbb{N}, 0, ')$, wobei $n' := n+1$ der Nachfolger von $n \in \mathbb{N}$ in Ord sei, die fünf Peano-Axiome erfüllt:

(P1) 0 ist eine natürliche Zahl.

(P2) Für jede natürliche Zahl n ist auch $n+1$ eine natürliche Zahl.

(P3) Für jede natürliche Zahl n ist $n+1 \neq 0$.

(P4) Sind n, m verschiedene natürliche Zahlen, so sind auch $n+1$, $m+1$ verschieden.

(P5) Ist $C \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in C$ und

$$(n \in C \Rightarrow n+1 \in C) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so $C = \mathbb{N}$.

Um zu sichern, daß die Klasse $\mathbb{N}$ eine Menge ist, führen wir ein neues Axiom ein, das sog. Unendlichkeitsaxiom. Es folgt dann nach 7.3. d), daß $\omega := \sup \mathbb{N}$ existiert und daß $\mathbb{N} = \omega$. Schließlich nennen wir eine Menge e endlich, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Bijektion $f: n \longmapsto e$ existiert; wir zeigen, daß alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$ mit $\alpha \geq \omega$ unendliche Mengen sind.

Wiederholung: eine Ordinalzahl α ist entweder $0 \; (=\phi)$, oder Nachfolgerzahl, d. h. von der Form $\beta+1 = \beta \cup \{\beta\}$, oder Limeszahl.

<u>Def</u> Eine Ordinalzahl n heißt natürliche Zahl, falls keine Limeszahl λ mit $\lambda \leq n$ existiert. Es sei

$$\mathbb{N} := \{ n \in \mathrm{Ord} \mid n \text{ ist natürliche Zahl} \}.$$

<u>Bem</u> Es ist klar, daß $0 \in \mathbb{N}$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathrm{Ord}$, $x \leq n$, so $x \in \mathbb{N}$.
Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $n+1 \in \mathbb{N}$: denn sei $x \in \mathrm{Ord}$, $x \leq n+1 = n \cup \{n\}$. Ist $x \leq n$, so kann x, da $n \in \mathbb{N}$, nicht Limeszahl sein. Ist $x = n+1$, so ist x auch nicht Limeszahl.
Die natürlichen Zahlen sind (als spezielle Ordinalzahlen) Mengen, und zwar

$$0 = \phi$$
$$1 = 0+1 = 0 \cup \{0\} = \phi \cup \{0\} = \{0\}$$
$$2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$$
$$3 = 2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\} \quad \text{usw.}$$

Man beachte, daß wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Ord}$ und 7.3. a) $\mathbb{N}$ durch die Relation $n < m \iff n \in m$ wohlgeordnet ist.

<u>8.1. Satz</u> Die Klasse $\mathbb{N}$ mit ausgezeichnetem Element 0 und der Nachfolgeroperation, die jedem $n \in \mathbb{N}$ den Nachfolger $n+1$ zuordnet, erfüllt die Peanoaxiome.

Beweis. (P1) und (P2) gelten nach der letzten Bemerkung. Auch (P3) ist klar, da $n+1 = n \cup \{n\}$ als nichtleere Menge von $0 = \phi$ verschieden ist.
Zu (P4): Da $\mathbb{N}$ wohlgeordnet ist, gilt für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$: $m < n$ oder $n < m$. Sei etwa $m < n$; dann ist $m+1 \leq n < n+1$, also $m+1 < n+1$ und $m+1 \neq n+1$.
(P5) folgt sofort aus der Tatsache, daß $(\mathbb{N}, <)$ wohlgeordnet ist: man setze in 6.1' $X = \mathbb{N}$; $E(x)$ sei die Eigenschaft „$x \in C$“. Nach 6.1' ist dann $\mathbb{N} \subseteq C$. ∎

<u>Bem</u> Die bisherigen ZF-Axiome garantieren nicht, daß eine (im anschaulichen Sinne) unendliche Menge existiert. Denn die einzige Menge, deren Existenz bisher gefordert wurde, ist ϕ; die übrigen

Axiome führen aber von endlichen Mengen wieder zu endlichen Mengen. – Das folgende Axiom ergibt insbesondere die Existenz mindestens einer Menge, so daß sich wegen des Aussonderungsaxioms das Nullmengenaxiom nachträglich als überflüssig erweist.

<u>Def</u> Eine Klasse C heißt induktiv, falls
a) $\emptyset \in C$
b) ist $x \in C$, so ist auch $x \cup \{x\} \in C$.

<u>Bsp + Bem</u> Ord und $\mathbb{N}$ sind induktive Klassen. Ord ist, wie wir wissen, echte Klasse.
Für jede induktive Klasse D ist $\mathbb{N} \subseteq D$, d.h. $\mathbb{N}$ ist „die kleinste induktive Klasse": setze $C := \{n \in \mathbb{N} \mid n \in D\} = \mathbb{N} \cap D$. Nach dem schon bewiesenen Peanoaxiom (P5) gilt (wegen $0 \in \mathbb{N} \cap D = C$, $n \in C \Rightarrow n+1 \in C$) $C = \mathbb{N}$, also $\mathbb{N} \subseteq D$.

Das Unendlichkeitsaxiom lautet:

$\boxed{\text{(Unendl) Es gibt eine induktive Menge.}}$

<u>8.2. Folgerung</u> (aus (Unendl)) $\mathbb{N}$ ist eine Menge.
Beweis. Sei nach (Unendl) x eine induktive Menge. Nach der letzten Bemerkung ist $\mathbb{N} \subseteq x$, also als Teilklasse einer Menge wieder Menge. ∎

<u>Bem</u> Die letzte Bemerkung zeigt einen oft benutzten Weg, um die Menge $\mathbb{N}$ ohne Benutzung von Ordinalzahlen zu definieren: man setzt

$$\mathrm{Ind} := \{x \mid x \text{ ist induktive Menge}\}.$$

Nach (Unendl) ist Ind nichtleere Klasse. Daher ist $\bigcap \mathrm{Ind}$ Menge, und zwar die kleinste induktive Menge; man setzt $\mathbb{N} := \bigcap \mathrm{Ind}$.

<u>Bem + Def</u> Da Ord echte Klasse und $\mathbb{N} \subseteq$ Ord Menge, ist $\mathbb{N}$ echtes Anfangsstück von Ord. Sei

$$\omega := \min(\mathrm{Ord} \setminus \mathbb{N})$$

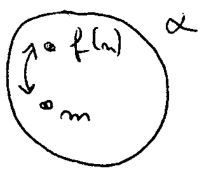
(die kleinste nicht-natürliche Ordinalzahl). Es ist nach 7.2.a) $\omega = \{n \in \mathrm{Ord} \mid n < \omega\} = \mathbb{N}$. In mengentheoretischen Texten wird oft ω als Bezeichnung für die Menge der natürlichen Zahlen benutzt.
Man kann nun $\omega + 1$, $\omega + 2 := \omega + 1, \ldots$, $\omega + \omega =: \omega \cdot 2$ bilden (genauer: definiere $f : \mathbb{N} \to \mathrm{Ord}$ durch $f(0) = \omega$, $f(n+1) = f(n)+1$; nach 8.2 und (Ers) ist $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ Menge; dann ist $\omega \cdot 2 = \sup\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$), weiter $\omega \cdot 2 + 1$, $\omega \cdot 2 + 2 := (\omega \cdot 2 + 1) + 1$ usw. Damit ist die Zeichnung auf S. 25 nachträglich gerechtfertigt.

Def Eine Menge e heißt endlich, falls es $n \in \mathbb{N}$ und ein bijektives $f: n \to e$ gibt; sonst unendlich.

Bem Ist $n \in \mathbb{N}$, so zeigt $id_n : n \to n$, daß n endliche Menge ist. Daß jedes $\alpha \in \mathrm{Ord}$ mit $\alpha \geq \omega$ unendlich ist, mag als anschaulich klar erscheinen, muß aber bewiesen werden.

8.3. Lemma Ist $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathrm{Ord}$ und $\alpha \neq n$, so gibt es keine Bijektion von n auf α. Insbesondere ist jede Ordinalzahl α mit $\omega \leq \alpha$ unendlich.

Beweis. Da $\alpha \neq n$, sei OBdA $n < \alpha$.
1. Fall: $\alpha \in \mathbb{N}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über n. Ist $n = 0$, so $n = \emptyset$ und $\alpha \neq n$, d.h. $\alpha \neq \emptyset$. Also läßt sich n nicht bijektiv auf α abbilden.
Sei die Behauptung richtig für n und sei $n+1 < \alpha$. Da $0 < n+1 < \alpha$, ist $\alpha \in \mathbb{N}$ von der Form $m+1$ mit $m \in \mathbb{N}$. Annahme: $f: n+1 \to \alpha = m+1$ sei bijektiv. $g: m+1 \to m+1$ sei die Funktion mit $g(f(n)) = m$, $g(m) = f(n)$, $g(x) = x$ für $x \in m+1 \setminus \{m, f(n)\}$.



g und damit auch $h := g \circ f$ sind bijektiv; es ist $h: n+1 \to m+1$ und $h(n) = g(f(n)) = m$. Sei $h_0 := h \upharpoonright n$. Dann ist h_0 Bijektion von n auf m. Wegen $n+1 < \alpha = m+1$ ist $n < m$, Widerspruch zur Behauptung für n.
2. Fall: $\alpha \geq \omega$. Wir zeigen durch Induktion über n: ist $f: n \to \alpha$, so ist

$$s_f := \sup(\{f(x) \mid x \in n\} \cap \omega) < \omega;$$

dann ist $s_f + 1 \in \omega \setminus \mathrm{rng} f$ und f nicht surjektiv, insbesondere nicht bijektiv.
Für $n = 0$ ist $s_f = \sup \emptyset = 0 < \omega$.
Sei die Behauptung richtig für n und sei $g: n+1 \to \alpha$. Setze $f := g \upharpoonright n$. Da $n+1 = n \cup \{n\}$, ist

$$s_g = \begin{cases} s_f & \text{falls } g(n) \leq s_f \\ g(n) & \text{falls } s_f < g(n) < \omega \\ s_f & \text{falls } \omega \leq g(n). \end{cases}$$

Jedenfalls ist mit s_f auch s_g natürliche Zahl. ■

Def Nach 8.3 ist für jede endliche Menge e die natürliche Zahl n, die sich bijektiv auf e abbilden läßt, eindeutig bestimmt. Wir nennen n die Kardinalzahl von e; geschrieben:

$$n = |e|,$$

und sagen: „e hat genau n Elemente" (denn ist $f: n \twoheadrightarrow e$ und $x_k := f(k)$ für $k \in n$, so ist $e = \{f(0), \dots, f(n-1)\}$ $= \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$).

<u>Bem</u> Es ist möglich, auch ohne Benutzung von natürlichen Zahlen endliche Mengen zu definieren. Siehe etwa die Begriffe „Tarski-endlich" und „Dedekind-endlich" im Buch "Set Theory" von Jech.

<u>9. Fundierte Relationen; das Fundierungsaxiom</u>

<u>Def</u> C sei eine Klasse und E eine Relation (nicht notwendig auf C!). $x \in C$ heißt E-minimal in C, falls kein $y \in C$ mit $y E x$ existiert. Für eine beliebige Menge x sei

$$\mathrm{ext}_E\, x := \{y \mid y E x\}$$

die „Extension von x bezüglich E".

<u>Bspe + Bem</u> Für eine Wohlordnung $<$ und $x \in \mathrm{fld}\, <$ ist $\mathrm{ext}_< x = {<}x$. Ist $E = \{(x,y) \mid x \in y\}$, die „$\in$-Relation", so ist für jede Menge x $\mathrm{ext}_E\, x = \{y \mid y \in x\} = x$. E heißt extensional, falls

$$\mathrm{ext}_E\, x = \mathrm{ext}_E\, y \Rightarrow x = y$$

für $x, y \in \mathrm{fld}\, E$. Das Extensionalitätsaxiom besagt also, daß die $\in$-Relation extensional ist.

<u>Def</u> Eine Relation E auf X heißt fundiert, falls

a) für jedes $x \in X$ ist $\mathrm{ext}_E\, x$ Menge
b) jede nichtleere Teilmenge a von X hat ein E-minimales Element.

<u>Bem</u> Fundierte Relationen und auch das folgende Fundierungsaxiom spielen eine große Rolle in Betrachtungen über Modelle der Mengenlehre, in unserer Vorlesung aber, von 9.5.c) abgesehen, kaum. In der Mathematik wird das Fundierungsaxiom eigentlich nie gebraucht.

<u>Bsp + Bem</u> Eine totale Ordnung auf X ist genau dann Wohlordnung, wenn sie fundiert ist. Wir werden in 9.3 und 9.4 sehen, daß induktive Beweis- und Konstruktionsprinzipien sich von Wohlordnungen auf fundierte Relationen verallgemeinern lassen.

<u>9.1. Lemma</u> E sei fundierte Relation auf X. Dann gibt es keine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X (d.h. keine Funktion $f: \mathbb{N} \to X$, $x_n := f(n)$) mit $x_1 E x_0$, $x_2 E x_1$, $x_3 E x_2, \dots$; kurz

$$\dots x_3 E x_2 E x_1 E x_0.$$