# 7. Ordinalzahlen

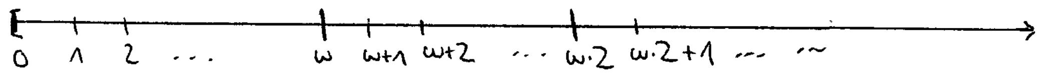
In diesem Kapitel definieren wir die sog. Ordinalzahlen. Die Klasse aller Ordinalzahlen heiße Ord. Sie soll folgende Eigenschaften haben:

1. Ord ist eine echte (transitive) Klasse, die (durch $\in_{Ord}$) wohlgeordnet ist.
2. Jede Ordinalzahl $\alpha$ ist eine (transitive) Menge, die (durch $\in_\alpha$) wohlgeordnet ist.
3. Jede wohlgeordnete Menge ist zu genau einer Ordinalzahl $(\alpha, \in_\alpha)$ isomorph.

Die Ordinalzahlen bilden also ein Repräsentantensystem für die Klasse aller wohlgeordneten Mengen.

Zunächst erläutern wir, welche mathematische Fragestellung Cantor zu der anschaulichen Vorstellung von der Klasse aller Ordinalzahlen führte. Wir nehmen dabei kommentarlos einiges aus Kapitel 8 vorweg.

Setzt man die wohlgeordnete Klasse $(\mathrm{Ord}, <)$ als gegeben voraus, so ist nach den Ausführungen von S. 18 unten folgendes klar:




Ord hat ein kleinstes Element, das wir 0 nennen wollen. Nun können wir $0', 0'', 0''', \ldots$ in Ord bilden; wir schreiben

$$1 := 0' \qquad 2 := 1' = 0'' \qquad 3 := 2' = 0''' \quad \ldots .$$

(Mit dieser Schreibweise ist also $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{Ord}$!).

Sei

$$\omega := \min(\mathrm{Ord} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\})$$
$$\omega + 1 := \omega' \qquad \omega + 2 := \omega'' \ldots$$
$$\omega \cdot 2 := \min(\mathrm{Ord} \setminus \{0,1,2,\ldots\} \setminus \{\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\}) \ldots .$$

(Um zu sichern, daß Ord echte Oberklasse von $\{0, 1, 2, \ldots\}$, d.h. daß $\omega \in \mathrm{Ord}$ existiert, werden wir in Kapitel 8 ein neues Axiom in unsere Liste der ZF-Axiome aufnehmen).

Die Ordinalzahlen bilden eine Klasse, in der man, über die natürlichen Zahlen hinausgehend, „beliebig weit" zählen kann. Das Bedürfnis nach einem solchen „Zahl"bereich ergab sich für Cantor aus einer Frage über Fourierreihen.

Im folgenden sei $I$ das reelle Intervall $[0, 2\pi]$ und $M \subseteq I$. Der Einfachheit halber wollen wir $M$ als abgeschlossene Teilmenge von $I$ voraussetzen. $M$ heißt eine Menge vom Typ $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ = „unicité" = „Eindeutigkeit"), falls folgende Aussage auf $M$ zutrifft:

Sind $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_0, c_1, \ldots, d_1, d_2, \ldots \in \mathbb{R}$ und gilt für alle $x \in I \setminus M$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kx + d_k \sin kx),$$

so ist $a_k = c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $b_k = d_k$ für $k = 1, 2, \ldots$.

Die Wahrscheinlichkeit für $M \subseteq I$, vom Typ $\mathcal{U}$ zu sein, ist natürlich um so höher, je „kleiner" $M$ ist.

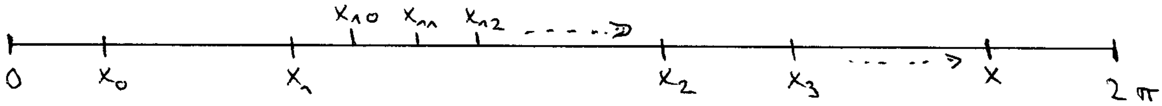
Nun nenne man $x \in M$ einen Häufungspunkt von $M$, falls in jeder Umgebung von $x$ unendlich viele Elemente von $M$ liegen. Sei

$$M' := \{x \in M \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } M\}$$

(die „Cantor-Bendixson-Ableitung von $M$"). Offenbar ist $M' \subseteq M$ wieder abgeschlossen. $M$ heißt perfekt, falls $M' = M$.

Bsp Es seien $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ in $I$ und $x := \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei wiederum

$$x_n < x_{n0} < x_{n1} < x_{n2} < \ldots \quad \text{und} \quad \lim_{k \in \mathbb{N}} x_{nk} = x_{n+1}:$$




Sei $M := \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{nk} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.
Dann ist

$$M' = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$M'' = \{x\}$$
$$M''' = \emptyset.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei die $n$-te Ableitung $M^{(n)}$ von $M$ definiert durch

$$M^{(0)} := M \qquad M^{(n+1)} := (M^{(n)})'.$$

Cantor zeigte:
(1) (1870) Ist $M = \emptyset$ (d.h. $M^{(0)} = \emptyset$), so ist $M$ vom Typ $\mathcal{U}$.

(2) (1871) Ist $M$ endlich (d. h., da $M$ als abgeschlossene Teilmenge von $I$ kompakter $T_2$-Raum: $M^{(1)} = \phi$), so ist $M$ vom Typ $\mathfrak{U}$.
(3) (1872) Ist $M^{(n)} = \phi$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $M$ vom Typ $\mathfrak{U}$.

Ist nun $M$ abgeschlossen und sind $M^{(0)} \supseteq M^{(1)} \supseteq M^{(2)} \supseteq \ldots$ nichtleer, so ist, da $I$ kompakt, auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M^{(n)} \neq \phi$. Falls man „Zahlen" $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2+1, \ldots$ hat, mit denen man über $\mathbb{N}$ hinaus zählen kann, so setze man

$$M^{(\omega)} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M^{(n)}$$

$$M^{(\omega+1)} := (M^{(\omega)})' \quad \text{usw.}$$

Allgemein kann man für jede Ordinalzahl $\alpha$ $M^{(\alpha)}$ definieren durch:

$$M^{(0)} := M$$

$$M^{(\alpha+1)} := (M^{(\alpha)})'$$

$$M^{(\lambda)} := \bigcap_{\alpha < \lambda} M^{(\alpha)} \quad \text{falls } \lambda \text{ Limespunkt von Ord.}$$

Dabei wird benutzt, daß $(\mathrm{Ord}, <)$ Wohlordnung ist (und 6.3').
Später definierte Cantor die Ordinalzahlen und zeigte:

a) Ist $M \subseteq I$ abgeschlossen, so existieren $P, N \subseteq M$ und $\alpha \in \mathrm{Ord}$ mit
$$M = P \cup N, \quad P \cap N = \phi, \quad P \text{ perfekt}, \quad N^{(\alpha)} = \phi.$$

b) Ist $N \subseteq I$ und $N^{(\beta)} = \phi$ für ein $\beta \in \mathrm{Ord}$, so ist
$$\alpha := \min\{\beta \in \mathrm{Ord} \mid N^{(\beta)} = \phi\}$$
abzählbar.

c) Eine abgeschlossene Menge $N \subseteq I$ ist genau dann abzählbar, wenn $\beta \in \mathrm{Ord}$ existiert mit $N^{(\beta)} = \phi$.

d) Ist $\alpha$ eine abzählbare Nicht-Limeszahl, so existiert ein $N \subseteq I$ mit $N^{(\alpha)} = \phi$ und $N^{(\beta)} \neq \phi$ für $\beta < \alpha$.

1909 zeigte Young, daß jede abzählbare Menge $M \subseteq I$ vom Typ $\mathfrak{U}$ ist (die Umkehrung gilt nicht!).

Wir skizzieren noch Cantors Konstruktion der Ordinalzahlen: für jede wohlgeordnete Menge $(x, <)$ sei

$$\overline{(x, <)} := \{(y, <) \mid (y, <) \text{ ist wohlgeordnete Menge, und } (y, <) \cong (x, <)\}$$

der „Ordnungstyp von $(x, <)$". Ord sei die Klasse aller Ordnungstypen. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$, etwa $\alpha = \overline{(x, <)}$, $\beta = \overline{(y, <)}$, setze man

$\alpha < \beta :\Leftrightarrow$ $(x, <)$ ist zu einem Anfangsstück von $(y, <)$ isomorph (siehe 5.6).

Die Forderungen 1. und 3. sind dann nicht schwer nachzuweisen. Jedoch ist, falls $x \neq \emptyset$, $\overline{(x, <)}$ echte Klasse, darf also nicht Element einer Klasse sein (Cantor unterschied Mengen und Klassen nicht; diese Unterscheidung wurde erst später, als Reaktion auf die Russellsche Antinomie, getroffen).

Wir geben nun die heute übliche, von J. v. Neumann gegebene Definition der Ordinalzahlen. Nach den Bemerkungen am Schluß des letzten Kapitels ist sie naheliegend:

<u>Def</u> Eine Ordinalzahl ist eine transitive Menge $\alpha$, die durch $\in_\alpha$ wohlgeordnet wird. Es sei

$$\mathrm{Ord} := \{\alpha \mid \alpha \text{ ist Ordinalzahl}\}.$$

Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ sei

$$\alpha < \beta :\Leftrightarrow \alpha \in \beta.$$

Mit dieser Definition ist Ziel 2. bereits erfüllt.

<u>7.1 Lemma</u> $\alpha$ ist genau dann Ordinalzahl, wenn $(\alpha, \in_\alpha)$ das Mostowski-Bild einer wohlgeordneten Menge ist.

Beweis. „$\Rightarrow$" steht in Folgerung 1 am Schluß von Kapitel 6.
„$\Leftarrow$" steht in 6.4. ∎

Nach 6.4 ist damit auch Ziel 3 erfüllt.

<u>7.2 Lemma</u> a) Aus $\beta \in \alpha \in \mathrm{Ord}$ folgt $\beta \in \mathrm{Ord}$, d.h. Ord ist transitive Klasse.

b) Für $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ist

$$\alpha = \{\beta \in \mathrm{Ord} \mid \beta < \alpha\}.$$

c) Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ gilt $\alpha = \beta$ oder $\alpha \subsetneqq \beta$ oder $\beta \subsetneqq \alpha$.

d) Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ gilt

$$(\beta < \alpha \Leftrightarrow) \quad \beta \in \alpha \Leftrightarrow \beta \subsetneqq \alpha.$$

Beweis. a) Wegen 7.1 sei $\alpha = \pi_X[X]$, wobei $(X, <)$ wohlgeordnete Menge sei. Wegen $\beta \in \alpha$ ist $\beta = \pi_X(x)$ für ein $x \in X$.

$$Y := {}_<x$$

ist Anfangsstück von $(X, <)$, und

$$\beta = \pi_X(x) = \pi_X[{}_<x] = \pi_X[Y] = \pi_Y[Y]$$

nach 6.5. Damit ist $\beta$ Ordinalzahl.

b) $\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\}$
$= \{\beta \mid \beta \in \mathrm{Ord}, \beta \in \alpha\}$ da Ord transitiv
$= \{\beta \mid \beta \in \mathrm{Ord}, \beta < \alpha\}$.

c) $(X,<)$ und $(Y,<)$ seien wohlgeordnete Mengen mit $\alpha = \pi_X[X]$, $\beta = \pi_Y[Y]$. Man betrachtet die Fallunterscheidung von 5.6: ist $(X,<)$ zu $(Y,<)$ isomorph, so ist $\alpha = \beta$ nach Folgerung 2 am Schluß von Kapitel 6.
Sei nun OBdA $(Y,<)$ zu einem echten Anfangsstück von $(X,<)$ isomorph. Da isomorphe Wohlordnungen dasselbe Mostowski-Bild haben, sei OBdA $(Y,<)$ echtes Anfangsstück von $(X,<)$. Dann ist nach 6.5 $\beta$ echte Teilmenge von $\alpha$.

d) „$\Rightarrow$" Sei $\beta \in \alpha$. Da $\alpha$ transitiv, ist $\beta \subseteq \alpha$. Wäre $\beta = \alpha$, so folgte $\alpha \in \alpha$. Sei $(X,<)$ wohlgeordnete Menge mit Mostowski-Bild $\alpha$, also

$$(X,<) \xrightarrow[\cong]{\pi} (\alpha, \in_\alpha).$$

Wegen $\alpha \in \alpha$ existiert dann $x \in X$ mit $\pi(x) = \alpha$. Es ist

$$\pi[{}_<x] = \pi(x) = \alpha = \pi[X],$$

aber ${}_<x \subsetneqq X$ (denn $x \in X \setminus {}_<x$!); Widerspruch zur Injektivität von $\pi$.

„$\Leftarrow$" Sei $\beta \subsetneqq \alpha$. $\gamma$ sei das bzgl. $\in_\alpha$ kleinste Element von $\alpha \setminus \beta$; wir zeigen $\gamma = \beta$, woraus $\beta \in \alpha$ folgt.
Als transitive Menge ist $\beta \subseteq \alpha$ Anfangsstück von $(\alpha, \in_\alpha)$. Also

$$\begin{aligned}\beta &= \{\delta \in \alpha \mid \delta \in_\alpha \gamma\}\\ &= \{\delta \in \alpha \mid \delta \in \gamma\}\\ &= \{\delta \in \mathrm{Ord} \mid \delta \in \gamma\} \quad \text{da } \alpha \text{ transitiv}\\ &= \{\delta \in \mathrm{Ord} \mid \delta < \gamma\}\\ &= \gamma.\end{aligned}$$


■

<u>7.3 Lemma</u> a) $\in_{\mathrm{Ord}}$ (d.h. die oben definierte Relation $<$ auf Ord) ist totale Ordnung auf Ord.

b) $<$ ist Wohlordnung auf Ord – genauer: ist $C \subseteq \mathrm{Ord}$ nichtleer, so ist $\bigcap C \in \mathrm{Ord}$ und $\bigcap C = \min C$.

c) $0 := \emptyset$ ist Ordinalzahl, und zwar das kleinste Element von Ord bzgl. $<$.

d) Für $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ist $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{Ord}$, und zwar der Nachfolger von $\alpha$ in $(\mathrm{Ord}, <)$.

e) Ist $M$ eine Menge von Ordinalzahlen, so ist $\bigcup M \in \mathrm{Ord}$, und zwar $\bigcup M = \sup M$.

f) Ord ist echte Klasse.

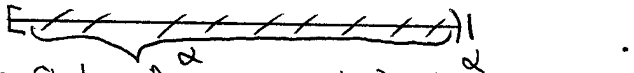
Beweis. a) $< \; = \; \in_{\mathrm{Ord}}$ ist transitiv und irreflexiv nach 7.2.d); nach 7.2.c) sind je zwei Ordinalzahlen vergleichbar.

b) $\alpha := \bigcap C$ ist Menge, da $C \neq \emptyset$. Da alle $\gamma \in C$ transitiv sind, ist es auch $\alpha$. Für beliebiges $\gamma \in C$ ist $\alpha \subseteq \gamma$ und daher $\in_\alpha = \in_\gamma \upharpoonright \alpha$ Wohlordnung auf $\alpha$. Also ist $\alpha$ Ordinalzahl.
Für $\gamma \in C$ ist $\alpha \subseteq \gamma$, nach 7.2.d) also $\alpha \leq \gamma$. Es reicht zu zeigen, daß $\alpha \in C$. Andernfalls wäre $\alpha < \gamma$ für $\gamma \in C$, $\alpha \in \gamma$ für $\gamma \in C$, d.h. $\alpha \in \bigcap C = \alpha$ und $\alpha < \alpha$; Widerspruch.

c) Daß $\emptyset \in \mathrm{Ord}$, folgt aus dem Beispiel am Ende von Kapitel 6. Für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ist $\emptyset \subseteq \alpha$, also $\emptyset = 0 \leq \alpha$.

d) Sei $t := \alpha \cup \{\alpha\}$. $t$ ist transitiv (siehe Beispiel in Kapitel 6). $\in_t$ ist Wohlordnung auf $t$, denn $\alpha \notin \alpha$ (siehe Beweis von 7.2.d)),

$$\in_t \; = \; \in_\alpha \cup \{(x,\alpha) \mid x \in \alpha\}:$$



Also $t \in \mathrm{Ord}$. Da $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\} = t$, ist $\alpha < t$. Sei nun $\alpha < \beta$ mit $\beta \in \mathrm{Ord}$; wir zeigen $t \leq \beta$. Da $\beta$ transitiv, hat man wegen $\alpha < \beta$: $\alpha \in \beta$ und $\alpha \subseteq \beta$, also $t = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$ und $t \leq \beta$.

e) Setze $\alpha := \bigcup M$. $M$ ist Menge nach dem Vereinigungsaxiom und als Vereinigung von transitiven Mengen wieder transitiv. Wegen der Transitivität von Ord ist $\alpha \subseteq \mathrm{Ord}$, daher $\in_\alpha = \in_{\mathrm{Ord}} \upharpoonright \alpha$ Wohlordnung auf $\alpha$. Damit ist $\alpha \in \mathrm{Ord}$ klar.
$\alpha = \bigcup M$ ist die kleinste Menge, die alle $\beta \in M$ umfaßt, also insbesondere die kleinste Ordinalzahl mit $\beta \leq \alpha$ für alle $\beta \in M$. D.h. aber $\alpha = \sup M$.

f) Andernfalls wende man auf $M := \mathrm{Ord}$ d) an; es ist also $\alpha := \sup \mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$. $\alpha$ wäre die größte Ordinalzahl. Nach d) ist aber $\alpha + 1$ eine größere Ordinalzahl. ∎

Mit 7.3. f), a), b) ist Ziel 1. erreicht.

<u>Bem</u> Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ kann man induktiv (also unter Benutzung von 6.3, 6.3') die Summe $\alpha + \beta$, das Produkt $\alpha \cdot \beta$ und die Potenz $\alpha^\beta$ definieren. Wir wollen das hier nicht tun und werden es auch nicht benötigen. Man lese die Definitionen und Rechengesetze etwa bei Bachmann oder Kamke nach. Man beachte, daß i.a. $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$, $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$.