Da $F(x) = y$, existiert ein Isomorphismus f von $_<x$ auf $_<y$. Da $x_1 \in {}_<x$, kann man $y_1 := f(x_1)$ setzen; es ist $y_1 \in {}_<y$, d.h. $y_1 < y$. Nun ist $f \upharpoonright {}_<x_1$ Isomorphismus von $_<x_1$ auf $_<y_1$. Nach Definition von F ist $F(x_1) = y_1$, also $x_1 \in \text{vb}\, F$, was zu zeigen war. – Diese Betrachtung zeigt noch, daß aus $x_1 < x$ stets $F(x_1) < F(x)$ folgt, d.h. daß F streng monoton ist.

Falls $\text{vb}\, F = X$ und $\text{nb}\, F = Y$, liegt Fall (a) vor.

Falls $\text{vb}\, F = X$ und $\text{nb}\, F$ echtes Anfangsstück von Y, liegt Fall (b) vor.

Falls $\text{nb}\, F = Y$ und $\text{vb}\, F$ echtes Anfangsstück von X, liegt Fall (c) vor.

Der letzte denkbare Fall ($\text{nb}\, F$ ist echtes Anfangsstück von Y, $\text{vb}\, F$ ist echtes Anfangsstück von X) kann nicht eintreten: denn sonst existieren $x \in X$, $y \in Y$ mit $\text{vb}\, F = {}_<x$, $\text{nb}\, F = {}_<y$. Dann ist nach Definition von F $F(x) = y$, also $x \in \text{vb}\, F = {}_<x$, $x < x$! ∎

6. Induktive Beweise und Definitionen

Die Nützlichkeit von wohlgeordneten Klassen beruht darauf, daß man

a) den Nachweis gewisser Eigenschaften von Elementen wohlgeordneter Klassen induktiv führen kann (6.1, 6.1')

b) auf wohlgeordneten Klassen Funktionen durch Rekursion definieren kann (6.3, 6.3').

<u>6.1. Satz</u> $(X, <)$ sei wohlgeordnete Klasse und $E(x)$ eine Eigenschaft, die auf die Elemente von X zutreffen kann. Für alle $x \in X$ gelte:

(*) haben alle $y < x$ die Eigenschaft E, so hat x die Eigenschaft E.

Dann haben alle $x \in X$ die Eigenschaft E.

Beweis. Setze

$$C := \{x \in X \mid x \text{ hat nicht die Eigenschaft } E\}.$$

Wäre $C \neq \emptyset$, so sei $x := \min C$. Nach (*) müßte x die Eigenschaft E haben ! Also ist $C = \emptyset$. ∎

Häufig werden Beweise durch Induktion über die Wohlordnung $<$ auch in folgender Weise geführt (x' ist, falls x nicht größtes Element von X, der Nachfolger von x in X; siehe S. 18 unten):

<u>6.1.' Satz</u> $(X, <)$ sei wohlgeordnete Klasse und $E(x)$ eine Eigenschaft, die auf die Elemente von X zutreffen kann. Es gelte:

a) das kleinste Element von X hat die Eigenschaft E

b) hat $x \in X$ die Eigenschaft E und ist x nicht größtes Element von X, so hat x' die Eigenschaft E

c) ist $x \in X$ Limespunkt und haben alle $y < x$ die Eigenschaft E, so hat x die Eigenschaft E.

Dann haben alle $x \in X$ die Eigenschaft E.

Beweis. Sei wieder $C := \{x \in X \mid x$ hat nicht die Eigenschaft $E\}$. Annahme: $C \neq \emptyset$; sei dann $x := \min C$. Wegen a) kann x nicht das kleinste Element von X sein. Wegen b) kann x kein Nachfolger sein. Also muß x Limespunkt sein, was c) widerspricht! – Also ist $C = \emptyset$. ∎

Es folgen einige Überlegungen, die den Beweis von 6.3 abkürzen sollen. Ist f eine Funktion und $g \subseteq f$, so ist auch g Funktion, und $g = f \restriction x$, wobei $x := \mathrm{vb}\, g$ sei. $g \subseteq f$ ist also gleichbedeutend damit, daß f eine Fortsetzung von g ist.
Ist $\mathcal{R}$ eine Klasse und jedes $r \in \mathcal{R}$ eine Relation, so ist auch $\bigcup \mathcal{R}$ Relation – denn ist $p \in \bigcup \mathcal{R}$, so $p \in r$ für ein $r \in \mathcal{R}$, und p ist geordnetes Paar.
Offenbar ist

$$\mathrm{vb}(\bigcup \mathcal{R}) = \bigcup \{\mathrm{vb}\, r \mid r \in \mathcal{R}\}$$
$$\mathrm{nb}(\bigcup \mathcal{R}) = \bigcup \{\mathrm{nb}\, r \mid r \in \mathcal{R}\}.$$

Ist jedes $r \in \mathcal{R}$ eine Funktion, so braucht jedoch $\bigcup \mathcal{R}$ keine Funktion zu sein: z. B. sei $\mathcal{R} = \{f, g\}$ mit

$$f = (x \mid x \in \mathbb{R}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \qquad g = (x^2 \mid x \in \mathbb{R});$$
$$\bigcup \mathcal{R} = f \cup g = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

ist keine Funktion, denn für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0, 1$ sind (x,x) und $(x, x^2) \in \bigcup \mathcal{R}$, aber $x \neq x^2$.

<u>6.2. Lemma</u> $\mathcal{F}$ sei eine Klasse, so daß jedes $f \in \mathcal{F}$ Funktion ist. $F := \bigcup \mathcal{F}$ $(= \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f)$ ist genau dann Funktion, wenn die Funktionen in $\mathcal{F}$ paarweise verträglich sind, d. h. wenn für $f, g \in \mathcal{F}$ und $x \in \mathrm{vb}\, f \cap \mathrm{vb}\, g$ $\quad f(x) = g(x)$ gilt.

Beweis. „$\Rightarrow$": Sei F Funktion; $f, g \in \mathcal{F}$, $x \in \mathrm{vb}\, f \cap \mathrm{vb}\, g$. Dann gilt, da $f \subseteq F$ und $g \subseteq F$, $f(x) = F(x) = g(x)$.
„$\Leftarrow$": Die Funktionen in $\mathcal{F}$ seien paarweise verträglich. Damit F Funktion ist, hat man zu zeigen: sind (x,y) und (x,z) in F, so $y = z$. Wähle $f, g \in \mathcal{F}$ mit $(x,y) \in f$, $(x,z) \in g$. Dann ist $x \in \mathrm{vb}\, f \cap \mathrm{vb}\, g$ und daher $y = f(x) = g(x) = z$. ∎

<u>6.3. Satz</u> (Rekursionstheorem) $(X, <)$ sei wohlgeordnete Klasse und G Funktion mit $\mathrm{vb}\, G = V$. Dann gibt es genau eine Funktion F mit $\mathrm{vb}\, F = X$, so daß für alle $x \in X$

$$(**) \qquad F(x) = G(F \restriction_{<x}).$$

Bem. 1. Für $x \in X$ ist $<x$ (nach Definition einer Wohlordnung) Menge, und zwar Teilmenge von $X = \text{vb}\, F$. Nach 3.7 ist (auch, falls F echte Klasse!) $f = F \restriction_{<x}$ Menge und damit $G(f)$ definiert. In die Formulierung von 6.3 geht also das Ersetzungsaxiom wesentlich ein.

2. Für die Formulierung von 6.3 würde es reichen, von G

$$\{f \mid f \text{ ist Funktion und vb}\, f \text{ echtes Anfangsstück von } X\} \subseteq \text{vb}\, G$$

zu verlangen.

3. Die anschauliche Idee bei der „Berechnung" von $F(x)$ für $x \in X$ ist: sei bereits $F(y)$ berechnet für alle $y < x$; d. h. $f := F \restriction_{<x}$ ist bekannt. Dann setze man $F(x) := G(f)$.

4. Die Existenz von F wäre klar, wenn man eine Eigenschaft $E(x,y)$ explizit angeben könnte, so daß für

$$F = \{(x,y) \mid x \in X \text{ und } E(x,y)\}$$

gezeigt werden könnte: a) $\text{vb}\, F = X$ b) F ist Funktion c) F erfüllt $(**)$. Aber die naheliegende Bedingung „$y = G(F\restriction_{<x})$" für $E(x,y)$ enthält F, das ja erst definiert werden soll. F ist nur implizit durch die Funktionalgleichung $(**)$ definiert.

Beweis von 6.3. Wir nennen eine Funktion f eine gute Funktion, falls
a) $\text{vb}\, f$ ist ein Anfangsstück von X
b) für alle $x \in \text{vb}\, f$ ist $f(x) = G(f\restriction_{<x})$.
(f darf Menge oder echte Klasse sein). – Gesucht ist also eine gute Funktion F mit $\text{vb}\, F = X$.

0. Für die Eindeutigkeitsaussage von 6.3 zeigen wir etwas allgemeiner: sind f, g gute Funktionen und $x \in \text{vb}\, f \cap \text{vb}\, g$, so $f(x) = g(x)$. Sei nämlich $C := \{x \in \text{vb}\, f \cap \text{vb}\, g \mid f(x) \neq g(x)\}$. Wäre $C \neq \emptyset$, so sei $c := \min C$. Wegen der Minimalität von c ist $f\restriction_{<c} = g\restriction_{<c}$, und da f, g gute Funktionen sind, folgt

$$f(c) = G(f\restriction_{<c}) = G(g\restriction_{<c}) = g(c); \text{ Widerspruch!}$$

Nun setze man

$$\mathfrak{F} := \{f \mid f \text{ ist gute Funktion}\}$$

(in $\mathfrak{F}$ liegen genau die guten Funktionen, die Mengen sind) und

$$F := \bigcup \mathfrak{F}.$$

1. F ist Funktion: dies folgt direkt aus 6.2 und dem unter 0. Bewiesenen.

2. $\text{vb}\, F$ ist Anfangsstück von X: denn $\text{vb}\, F = \bigcup \{\text{vb}\, f \mid f \in \mathfrak{F}\}$ ist Vereinigung von Anfangsstücken von X!

3. Für $x \in \text{vb}\, F$ ist $F(x) = G(F\restriction_{<x})$ – d. h. F ist wieder gute

Funktion: sei $x \in \text{vb}\, F = \bigcup \{\text{vb}\, f \mid f \in \mathfrak{F}\}$, etwa $x \in \text{vb}\, f$ mit $f \in \mathfrak{F}$. Dann gilt $f \subseteq F$ und $_{<}x \subseteq \text{vb}\, f$, $\text{vb}\, F$, da diese beiden Klassen Anfangsstücke von X sind. Also ist $f \restriction_{<} x = F \restriction_{<} x$ und

$$\begin{aligned} F(x) = f(x) &= G(f \restriction_{<} x) \quad \text{da } f \text{ gute Funktion} \\ &= G(F \restriction_{<} x). \end{aligned}$$

4. $\text{vb}\, F = X$: andernfalls sei $c := \min(X \setminus \text{vb}\, F)$; da $\text{vb}\, F$ Anfangsstück von X war, gilt $\text{vb}\, F = {}_{<}c$. Da $_{<}c$ Menge, ist auch F Menge; setze $d := G(F)$ und

$$f := F \cup \{(c, d)\}.$$

Wir zeigen $f \in \mathfrak{F}$ (woraus $c \in \text{vb}\, f \subseteq \text{vb}\, F$ und damit ein Widerspruch folgt): F, $\{(c,d)\}$ und damit f sind Mengen. Da $c \notin \text{vb}\, F$, ist f Funktion. $\text{vb}\, f = \text{vb}\, F \cup \{c\} = \{x \in X \mid x \leq c\}$ ist Anfangsstück von X. f ist gute Funktion: sei $x \in \text{vb}\, f$; wir zeigen $f(x) = G(f \restriction_{<} x)$. Falls $x < c$, ist $x \in \text{vb}\, F$, und

$$f(x) = F(x) = G(F \restriction_{<} x) = G(f \restriction_{<} x), \quad \text{da } f \supseteq F;$$

für $x = c$ ist

$$f(c) = d = G(F) = G(f \restriction_{<} c)! \ \blacksquare$$

Analog zu 6.1' gibt es eine Version von 6.3, in der F auf X durch eine Rekursion mit Fallunterscheidung definiert wird:

6.3' Satz $(X, <)$ sei wohlgeordnete Klasse und H, K Funktionen mit $\text{vb}\, H = \text{vb}\, K = V$; a sei eine Menge. Dann gibt es genau eine Funktion F mit $\text{vb}\, F = X$ und

$$(***) \qquad F(x) = \begin{cases} a & \text{falls } x \text{ kleinstes Element von } X \\ H(F(y)) & \text{falls } y \in X \text{ und } x = y' \\ K(F \restriction_{<} x) & \text{falls } x \text{ Limespunkt von } X. \end{cases}$$

Beweis. G sei die folgende, auf ganz V definierte Funktion:

$$G(f) := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } f \text{ nicht Funktion, so daß } \text{vb}\, f \subseteq X \text{ Anfangsstück} \\ a & \text{falls } f = \emptyset \quad (\text{die „leere" Funktion}) \\ H(f(y)) & \text{falls } \text{vb}\, f \subseteq X \text{ Anfangsstück, } y \text{ größtes Element von } \text{vb}\, f \\ K(f) & \text{falls } \text{vb}\, f \subseteq X \text{ Anfangsstück ohne größtes Element, } f \neq \emptyset. \end{cases}$$

Nach 6.3 sei F diejenige Funktion mit $\mathrm{vb}\, F = X$ und $F(x) = G(F\restriction_< x)$ für $x \in X$. Wir zeigen durch Induktion über $<$ (siehe 6.1'), daß für jedes $x \in X$ $F(x)$ die Gleichung (***) erfüllt: sei

$$f := F\restriction_< x.$$

Ist x das kleinste Element von X, so ist ${}_<x = \emptyset$, $f = \emptyset$, und $F(x) = G(f) = a$.

Ist $x = y'$ mit $y \in X$, so ist y größtes Element von ${}_<x$. Dann ist $F(x) = G(f) = H(f(y)) = H(F(y))$ (da $y \in {}_<x$, ist $f(y) = F(y)$).

Ist x Limespunkt von X, so ist $F(x) = G(f) = K(f) = K(F\restriction_< x)$, da $\mathrm{vb}\, f = {}_<x$ kein größtes Element hat. ∎

Wir geben in 6.4 eine wichtige Anwendung von 6.3.

<u>Def</u> Eine Klasse C heißt transitiv, falls aus $y \in C$ und $x \in y$ stets $x \in C$ folgt, kurz:

$$x \in y \in C \Rightarrow x \in C.$$

<u>Bem</u> Ist C transitiv und $x_n \in x_{n-1} \in \dots \in x_1 \in C$, so gilt: $x_2 \in C$, $x_3 \in C, \dots, x_n \in C$.

Die Transitivität von C kann man auch ausdrücken durch:

$$y \in C \Rightarrow y \subseteq C$$

bzw. $$\bigcup C \subseteq C$$

bzw. $$C \subseteq P(C).$$

<u>Bspe</u> a) $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ sind transitiv. $\{\{\emptyset\}\}$ ist nicht transitiv. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ist transitiv.

b) ist t_i transitive Menge für $i \in I$, so sind $\bigcap_{i \in I} t_i$ und $\bigcup_{i \in I} t_i$ transitiv

c) mit t ist auch $t \cup \{t\}$ transitiv.

<u>Def</u> Für jede Klasse C sei $\in_C$ folgende Relation auf C:

$$\in_C := \{(x,y) \mid x \in C,\ y \in C, \text{ und } x \in y\}.$$

Für $C \subseteq D$ ist offenbar $\in_C = \in_D \restriction C$. Statt $\in_V = \{(x,y) \mid x, y \in V, x \in y\}$ wird auch oft kurz „$\in$" („die $\in$-Relation") geschrieben. Man kann für beliebiges C die „Struktur" $(C, \in_C)$ betrachten; 6.4 vergleicht solche Strukturen mit Wohlordnungen.

6.4 Satz (Mostowskischer Isomorphiesatz für wohlgeordnete Klassen)
$(X, <)$ sei eine wohlgeordnete Klasse. Dann gibt es eine transitive Klasse T und einen Isomorphismus

$$\pi : (X, <) \xrightarrow{\cong} (T, \in_T);$$

insbesondere ist T durch $\in_T$ wohlgeordnet. π und T sind dabei eindeutig bestimmt. T heißt das Mostowski-Bild von $(X, <)$, π der Mostowski-Isomorphismus.

Beweis. Man definiert nach 6.3 für $x \in X$ induktiv

$$\pi(x) := \{\pi(y) \mid y \in X, y < x\} = \pi[{<}x].$$

(Genauer: in 6.3 sei $G : V \to V$ die Funktion mit

$$G(f) := \begin{cases} \text{rb}\, f, & \text{falls } f \text{ Funktion} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$).

Es sei $T := \{\pi(x) \mid x \in X\}$. Damit ist π surjektiv.

T ist transitiv: sei $a \in b \in T$, etwa $b = \pi(x)$ mit $x \in X$. Dann ist $a = \pi(y)$ für ein $y \in X$ mit $y < x$, insbesondere $a \in T$.

π ist injektiv: andernfalls sei $x_1 \neq x_2$ in X, aber $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. OBdA sei $x_1 < x_2$ und x_2 minimal in $(X, <)$ bzgl. dieser Eigenschaft. Es ist

$$\{\pi(z_1) \mid z_1 < x_1\} = \pi(x_1) = \pi(x_2) = \{\pi(z_2) \mid z_2 < x_2\}.$$

Für $z_2 := x_1$ folgt dann $\pi(z_2) = \pi(z_1)$ für ein $z_1 < x_1$, also

$$z_1 < x_1 \ (< x_2), \quad \pi(z_1) = \pi(x_1),$$

ein Widerspruch zur Minimalität von x_2.

π ist Isomorphismus: seien $z, x \in X$. Dann gilt

$$z < x \Rightarrow \pi(z) \in \pi(x)$$

nach Definition von π; ist umgekehrt $\pi(z) \in \pi(x)$, so $\pi(z) = \pi(y)$ für ein $y < x$, und wegen der Injektivität von π ist $z = y < x$.

Sei nun $\rho : (X, <) \xrightarrow{\cong} (S, \in_S)$ ein weiterer Isomorphismus mit transitivem S; wir zeigen $\rho = \pi$ (und daher $S = \rho[X] = \pi[X] = T$).
Sei $\rho(y) = \pi(y)$ für alle $y < x$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= \{s \mid s \in \rho(x)\} \\
&= \{s \in S \mid s \in \rho(x)\} && \text{da } S \text{ transitiv} \\
&= \{\rho(y) \mid y \in X, \rho(y) \in \rho(x)\} && \text{da } S = \rho[X] \\
&= \{\rho(y) \mid y < x\} && \text{da } \rho \text{ Isomorphismus} \\
&= \{\pi(y) \mid y < x\} && \text{nach Ind. voraussetzung} \\
&= \pi(x).
\end{aligned}$$

∎

<u>6.5 Lemma</u> $(X,<)$ sei Wohlordnung und Y ein Anfangsstück von X (also $(Y,<)$ ebenfalls Wohlordnung),

$$\pi_X : (X,<) \longrightarrow (T, \in_T),$$
$$\pi_Y : (Y,<) \longrightarrow (S, \in_S)$$

die zugehörigen Mostowski-Isomorphismen. Dann ist $\pi_Y = \pi_X \upharpoonright Y$ und daher $S \subseteq T$.

Beweis. Man zeigt für $y \in Y$ induktiv $\pi_Y(y) = \pi_X(y)$:

$$\begin{aligned} \pi_Y(y) &= \{\pi_Y(y') \mid y' \in Y,\ y' < y\} \\ &= \{\pi_X(y') \mid y' \in Y,\ y' < y\} && \text{Induktionsvorauss.} \\ &= \{\pi_X(y') \mid y' \in X,\ y' < y\} && \text{da } Y \text{ Anfangsstück von } X \\ &= \pi_X(y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

<u>Bsp</u> Sei $X = \{a, b, c, d\}$ und $<$ die Wohlordnung auf X mit $a < b < c < d$. Wir berechnen induktiv $\pi(x)$ für $x \in X$:

$$\begin{aligned} \pi(a) &= \emptyset \\ \pi(b) &= \{\pi(a)\} = \{\emptyset\} \\ \pi(c) &= \{\pi(a), \pi(b)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \pi(d) &= \{\pi(a), \pi(b), \pi(c)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}. \end{aligned}$$

<u>Bsp</u> $(X,<)$ sei Wohlordnung, $x \in X$ und x' der unmittelbare Nachfolger von x. Dann ist

$$\begin{aligned} \pi(x') &= \{\pi(y) \mid y < x\} \cup \{\pi(x)\} \\ &= \pi(x) \cup \{\pi(x)\}. \end{aligned}$$

<u>Folgerungen aus 6.4, 6.5</u> 1. Sei C transitive Klasse, so daß $(C, \in_C)$ Wohlordnung ist. Dann ist mit den Schreibweisen von 6.4 $\pi = id_C$ und $T = C$, da π und T eindeutig bestimmt sind.

2. Sei $(X,<) \xrightarrow{f} (Y,<)$ ein Isomorphismus zweier Wohlordnungen, π_X und π_Y (mit Bildern T und S) die zugehörigen Mostowski-Isomorphismen. Dann ist $\pi_X = \pi_Y \circ f$ und $T = S$ – denn $\pi_Y \circ f$ ist Isomorphismus von $(X,<)$ auf $(S, \in_S)$, S transitiv.

$$\begin{tikzcd} (X,<) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"] & (Y,<) \arrow[dl, "\pi_Y"] \\ (T,\in_T) = (S,\in_S) & \end{tikzcd}$$

Isomorphe Wohlordnungen haben also dasselbe Mostowski-Bild.