5. Wohlordnungen

Def. X sei eine Klasse und $<$ eine Relation auf X. $(X,<)$ heißt wohlgeordnete Klasse (und $<$ eine Wohlordnung auf X), falls

1. $(X,<)$ ist total geordnet
2. für jedes $x \in X$ ist
$$_{<}x := \{y \in X \mid y < x\} \quad \text{eine Menge}$$
3. jede nichtleere Teilmenge a von X hat ein kleinstes Element (das mit $\min a$ bezeichnet wird).

Bem. 1. In den meisten für uns interessanten Fällen ist X Menge. Die Forderung 2. ist dann überflüssig, da $_{<}x \subseteq X$ als Teilklasse einer Menge wieder Menge ist.

2. Ist $(X,<)$ wohlgeordnet und $C \subseteq X$, so wird C durch
$$< \restriction C := \{(x,y) \mid x \in C,\ y \in C \text{ und } x < y\}$$
wohlgeordnet. Statt $< \restriction C$ oder $< \cap\, C \times C$ schreiben wir oft $<$ und sagen: $(C,<)$ ist wohlgeordnet.

5.1. Lemma Ist $(X,<)$ wohlgeordnet und $C \subseteq X$ nichtleere Klasse, so hat C ein kleinstes Element $\min C$.

Beweis. Sei, da $C \neq \emptyset$, c ein beliebiges Element von C. Falls c kleinstes Element von C, ist man fertig. Andernfalls ist $a := \{x \in C \mid x < c\} \subseteq {}_{<}c$ nichtleer und Menge. $\gamma := \min a$ ist das kleinste Element von C. ∎

Zur Veranschaulichung von Wohlordnungen nun einige Betrachtungen, die erst in Kapitel 6, angewandt werden. Sei $(X,<)$ wohlgeordnet.

1. Falls $X \neq \emptyset$, hat nach 5.1 X ein kleinstes Element, nämlich $\min X$.

2. X braucht kein größtes Element zu haben (siehe folgendes Bsp.: $(X,<) = (\mathbb{N},<)$). Daher hat i.a. nicht jede Teilmenge oder -klasse von X eine obere Schranke, insbesondere kein Supremum oder größtes Element. Ist aber $a \subseteq X$ Menge, die eine obere Schranke in X hat, so hat a ein Supremum in X, nämlich
$$\sup a = \min \{s \in X \mid s \text{ ist obere Schranke von } a\}.$$

3. Ist $x \in X$ nicht größtes Element von X, so hat x einen unmittelbaren Nachfolger in X (d.h. es existiert ein $y \in X$ mit $x < y$, so daß kein $z \in X$ mit $x < z < y$ existiert); der Nachfolger von x ist
$$x' := \min \{y \in X \mid x < y\}.$$

4. Ein Element z von X heißt Limespunkt von X, falls z weder das kleinste Element von X noch von der Form x' mit $x \in X$ ist.
Ein Element y von X ist also entweder das kleinste Element von X oder Nachfolger genau eines $x \in X$ oder Limespunkt. Ist z Limespunkt, so gilt für $x \in X$:

$$x < z \Rightarrow x' < z;$$

denn wegen $x < z$ ist $x' \leq z$, und z ist kein Nachfolger.

Bspe Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist, mit der üblichen Ordnung versehen, wohlgeordnet.
Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der üblichen Ordnung ist nicht wohlgeordnet. Z. B. haben die Teilmengen $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^2\}$ kein kleinstes Element.

5.2. Lemma $(X, <)$ sei wohlgeordnet, $F: X \to X$ streng monoton. Dann gilt für jedes $x \in X$: $x \leq F(x)$.
Beweis. Andernfalls ist die Klasse

$$C := \{x \in X \mid F(x) < x\}$$

nichtleer. Setze $z := \min C$ und $w := F(z)$. Da $z \in C$, ist $w = F(z) < z$. Da F streng monoton ist, folgt $F(w) < F(z) = w$. D. h. $w \in C$ und $w < z$; Widerspruch zur Definition von z. ∎

5.3. Korollar $(X, <)$ sei wohlgeordnet. Dann ist id_X der einzige Isomorphismus von $(X, <)$ auf sich.
Beweis. Es ist klar, daß $id_X : (X, <) \xrightarrow{\cong} (X, <)$. Sei nun $F: (X, <) \xrightarrow{\cong} (X, <)$. Nach 4.1. ist auch F^{-1} streng monoton. Für $x \in X$ und $y := F(x)$ gilt nach 5.2 $x \leq F(x)$, $y \leq F^{-1}(y)$, also $F(x) \leq F^{-1}(F(x)) = x$. D. h. $F(x) = x$ und $F = id_X$. ∎

5.4. Korollar $(X, <)$ und $(Y, <)$ seien wohlgeordnet. Falls ein Isomorphismus von $(X, <)$ auf $(Y, <)$ existiert, so ist er eindeutig bestimmt.
Beweis. Seien F, G Isomorphismen von X auf Y. Dann ist $G^{-1} \circ F$ Isomorphismus von $(X, <)$ auf sich, also nach 5.3 $G^{-1} \circ F = id_X$ und $G = F$. ∎

Def. + Bem. $(X, <)$ sei wohlgeordnet. Ein Anfangsstück von X ist eine Teilklasse C von X mit:

$$c \in C,\ x \in X,\ x \leq c \Rightarrow x \in C.$$

C heißt echtes Anfangsstück, falls $C \neq X$. Dann sei $x := \min(X \setminus C)$; und es ist $C = {}_{<}x$: ist $y \in {}_{<}x$, so $y < x$ und $y \in C$ nach Definition von x. Ist umgekehrt $c \in C$, so $c < x$: wäre $x \leq c$, so $x \in C$, da C Anfangsstück; Widerspruch zur Definition von x. – Alle echten Anfangsstücke von X sind also Mengen.

<u>5.5. Korollar</u> Eine wohlgeordnete Klasse $(X,<)$ ist zu keinem echten Anfangsstück isomorph.

Beweis. Wäre $F : (X,<) \xrightarrow{\cong} (C,<)$ und C echtes Anfangsstück von X, so hätte C die Form $C = {}_{<}x$ für ein $x \in X$. Dann ist $F(x) \in C$, also $F(x) < x$ im Widerspruch zu 5.2. ∎

<u>5.6. Satz</u> $(X,<)$ und $(Y,<)$ seien wohlgeordnete Klassen. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

(a) $(X,<)$ ist zu $(Y,<)$ isomorph

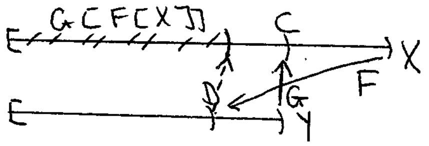
(b) $(X,<)$ ist zu einem echten Anfangsstück von $(Y,<)$ isomorph

(c) $(Y,<)$ ist zu einem echten Anfangsstück von $(X,<)$ isomorph.

Beweis. Wegen 5.5 schließen sich die drei Fälle gegenseitig aus; wäre z. B.

$F : X \xrightarrow{\cong} D$, $\quad D \subseteq Y$ echtes Anfangsstück

$G : Y \xrightarrow{\cong} C$, $\quad C \subseteq X$ echtes Anfangsstück,



so ist $G \circ F$ Isomorphismus von X auf $G[F[X]] \subseteq G[Y] \subseteq C$, was 5.5 widerspricht.

Nun sei

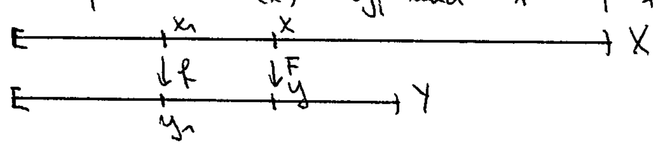
$$F := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y, \text{ und } ({}_{<}x, <) \cong ({}_{<}y, <)\}.$$

Wegen 5.5 gibt es zu jeden $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in F$; also ist F Funktion:

$$F : X \xrightarrow{\text{aus}} Y.$$

Ebenso gibt es zu $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $F(x) = y$; also ist F injektiv.

vb F ist Anfangsstück von X (und analog nb F Anfangsstück von Y): sei $x \in$ vb F, $\quad F(x) = y$; und $x_1 < x$, $x_1 \in X$.



Da $F(x)=y$, existiert ein Isomorphismus f von $_<x$ auf $_<y$. Da $x_1 \in {_<x}$, kann man $y_1 := f(x_1)$ setzen; es ist $y_1 \in {_<y}$, d.h. $y_1 < y$. Nun ist $f\restriction_{<x_1}$ Isomorphismus von $_<x_1$ auf $_<y_1$. Nach Definition von F ist $F(x_1)=y_1$, also $x_1 \in \text{vb}\, F$, was zu zeigen war. – Diese Betrachtung zeigt noch, daß aus $x_1 < x$ stets $F(x_1) < F(x)$ folgt, d.h. daß F streng monoton ist.

Falls $\text{vb}\, F = X$ und $\text{nb}\, F = Y$, liegt Fall (a) vor.
Falls $\text{vb}\, F = X$ und $\text{nb}\, F$ echtes Anfangsstück von Y, liegt Fall (b) vor.
Falls $\text{nb}\, F = Y$ und $\text{vb}\, F$ echtes Anfangsstück von X, liegt Fall (c) vor.

Der letzte denkbare Fall ($\text{nb}\, F$ ist echtes Anfangsstück von Y, $\text{vb}\, F$ ist echtes Anfangsstück von X) kann nicht eintreten: denn sonst existieren $x \in X$, $y \in Y$ mit $\text{vb}\, F = {_<x}$, $\text{nb}\, F = {_<y}$. Dann ist nach Definition von F $F(x)=y$, also $x \in \text{vb}\, F = {_<x}$, $x<x$! ∎

6. Induktive Beweise und Definitionen

Die Nützlichkeit von wohlgeordneten Klassen beruht darauf, daß man

a) den Nachweis gewisser Eigenschaften von Elementen wohlgeordneter Klassen induktiv führen kann (6.1, 6.1')

b) auf wohlgeordneten Klassen Funktionen durch Rekursion definieren kann (6.3, 6.3').

6.1. Satz $(X,<)$ sei wohlgeordnete Klasse und $E(x)$ eine Eigenschaft, die auf die Elemente von X zutreffen kann. Für alle $x \in X$ gelte:

(*) haben alle $y<x$ die Eigenschaft E, so hat x die Eigenschaft E.

Dann haben alle $x \in X$ die Eigenschaft E.

Beweis. Setze
$$C := \{x \in X \mid x \text{ hat nicht die Eigenschaft } E\}.$$
Wäre $C \neq \phi$, so sei $x := \min C$. Nach (*) müßte x die Eigenschaft E haben ! Also ist $C = \phi$. ∎

Häufig werden Beweise durch Induktion über die Wohlordnung $<$ auch in folgender Weise geführt (x' ist, falls x nicht größtes Element von X, der Nachfolger von x in X; siehe S. 18 unten):

6.1.' Satz $(X,<)$ sei wohlgeordnete Klasse und $E(x)$ eine Eigenschaft, die auf die Elemente von X zutreffen kann. Es gelte:

a) das kleinste Element von X hat die Eigenschaft E

b) hat $x \in X$ die Eigenschaft E und ist x nicht größtes Element von X, so hat x' die Eigenschaft E

c) ist $x \in X$ Limespunkt und haben alle $y<x$ die Eigenschaft E, so hat x die Eigenschaft E.

Dann haben alle $x \in X$ die Eigenschaft E.