4. Eigenschaften von Relationen

Dies Kapitel besteht größtenteils aus Definitionen von Begriffen, die mit Relationen zusammenhängen und nicht nur in dieser Vorlesung, sondern in der gesamten Mathematik öfter vorkommen. Man sollte nicht versuchen, alle Definitionen auswendig zu lernen, sondern sie gegebenenfalls nachschlagen.

In Kapitel 2. hatten wir für Mengen x, y das geordnete Paar (x, y) definiert; die dort gegebene Definition funktionierte nicht für echte Klassen. Zur Vereinfachung der Schreibweisen werden wir nun auch für echte Klassen C, D ein geordnetes Paar definieren. Seien a, b zwei beliebige, voneinander verschiedene Mengen, etwa $a = \phi$, $b = \{\phi\}$. Dann setze man

$$\begin{aligned}(C, D) :&= C \times \{a\} \cup D \times \{b\} \\ &= \{(c, a) \mid c \in C\} \cup \{(d, b) \mid d \in D\}.\end{aligned}$$

Offenbar gilt, analog zu 2.1:

$$(C, D) = (E, F) \Leftrightarrow C = E \text{ und } D = F.$$

Im folgenden sei R eine Relation. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir von jetzt an: $x R y$. Statt R werden, je nach Zusammenhang, auch die Symbole $\sim, <, \leq \ldots$ gebraucht.

__Def__ R sei eine Relation, X eine Klasse. R heißt Relation auf X, falls $R \subseteq X \times X$.

R heißt reflexiv auf X, falls für $x \in X$ $\quad xRx \quad$ (d.h. $id_X \subseteq R$).

R heißt irreflexiv auf X, falls für kein $x \in X$ $\quad xRx \quad$ (d.h. $id_X \cap R = \phi$).

R heißt symmetrisch, falls für alle x, y: $xRy \Leftrightarrow yRx$ (d.h. $R = R^{-1}$).

R heißt antisymmetrisch, falls für alle x, y: $xRy \Rightarrow$ nicht yRx (d.h. $R \cap R^{-1} = \phi$).

R heißt transitiv, falls für alle x, y, z: xRy und $yRz \Rightarrow xRz$ (d.h. $R \circ R \subseteq R$).

__Def__ Eine Relation $\sim$ heißt eine Äquivalenzrelation auf X, falls $\sim$ auf X reflexiv, transitiv und symmetrisch ist. – Für jedes $x \in X$ sei dann

$$\bar{x} := \{y \in X \mid x \sim y\}$$

die „Äquivalenzklasse" bzw. „Restklasse" von x bzgl. $\sim$ (sie kann echte

Klasse sein).

<u>Def</u> X sei eine Klasse. Eine Klasse P heißt eine Partition von X, falls:

a) $P \subseteq \mathcal{P}(X) = \{a \mid a \subseteq X\}$; d. h. die Elemente von P sind Teil<u>mengen</u> von X

b) $a \in P \Rightarrow a \neq \emptyset$

c) $a, b \in P,\ a \neq b \Rightarrow a \cap b = \emptyset$

d) $X = \bigcup P$.

(Jedes $x \in X$ ist also Element von genau einem $a \in P$).

<u>Bem</u> Für festes X entsprechen die Partitionen von X eineindeutig denjenigen Äquivalenzrelationen $\sim$ auf X, für die alle Restklassen $\bar{x}$ Mengen sind.

Denn ist P Partition von X, so setze man

$$\sim := \{(x,y) \mid x, y \in X, \text{ und es ex. ein } a \in P \text{ mit } x, y \in a\}.$$

Dann ist $\sim$ Äquivalenzrelation auf X, und für jedes $x \in X$ ist $\bar{x}$ dasjenige $a \in P$ mit $x \in a$, also eine Menge.

Ist umgekehrt $\sim$ Äquivalenzrelation auf X und $\bar{x}$ Menge für jedes $x \in X$, so ist

$$P := X/\sim := \{\bar{x} \mid x \in X\}$$

Partition von X.

<u>Def</u> Eine Relation $<$ auf X heißt Halbordnung, falls $<$ irreflexiv und transitiv ist, d. h. falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$x \nless x; \quad x < y \text{ und } y < z \Rightarrow x < z.$$

$(X, <)$ oder, falls klar ist, welche Relation $<$ gemeint ist, X heißt dann eine halbgeordnete Klasse. Für $x, y \in X$ setze man

$$x \leq y :\Longleftrightarrow x < y \text{ oder } x = y.$$

<u>Def</u> $(X, <)$ heißt eine total geordnete Klasse (und $<$ eine totale Ordnung auf X oder lineare Ordnung auf X), falls $<$ Halbordnung auf X ist und für $x, y \in X$

$$x = y \text{ oder } x < y \text{ oder } y < x$$

(diese drei Fälle schließen sich gegenseitig aus).

<u>Def</u> $(X, <)$ sei halbgeordnete Klasse, $M \subseteq X$, $a \in X$.

a ist ein maximales (minimales) Element von M, falls $a \in M$ und kein $m \in M$ mit $a < m$ ($m < a$) existiert.

a ist das größte (kleinste) Element von M, falls $a \in M$ und für

alle $m \in M$ $\quad m \leq a$ $(a \leq m)$ gilt.
a ist obere (untere) Schranke von M, falls für alle $m \in M$ $\quad m \leq a$ $(a \leq m)$.
a ist das Supremum (Infimum) von M, falls a das kleinste (größte) Element von $O := \{o \in X \mid o$ obere Schranke von $M\}$ $(\mathcal{U} := \{u \in X \mid u$ untere Schranke von $M\})$ ist.

Bem Falls M ein größtes (kleinstes) Element hat, so ist es eindeutig bestimmt: denn sind a, a' beide größte Elemente von M, so gilt $a \leq a'$, $a' \leq a$, also $a = a'$. Ebenso ist das Supremum (Infimum) von M eindeutig bestimmt (falls es existiert), da es das kleinste Element von O (das größte Element von $\mathcal{U}$) ist. Man schreibt $\sup M$ für das Supremum von M, $\inf M$ für das Infimum von M.

Def $(X, <)$ und $(Y, <)$ seien halbgeordnete Klassen (solange keine Verwechslungen zu befürchten sind, unterscheiden wir die Halbordnungen $<_X$ auf X und $<_Y$ auf Y nicht typographisch), $F: X \xrightarrow{\text{aus}} Y$.
F heißt monoton, falls für $x, x' \in X$
$$x \leq x' \implies F(x) \leq F(x');$$
streng monoton, falls für $x, x' \in X$
$$x < x' \implies F(x) < F(x').$$
F heißt Isomorphismus von X auf Y, falls $F: X \longleftrightarrow Y$ und F, F^{-1} beide streng monoton sind. Schreibweise: $F: (X, <) \xrightarrow{\cong} (Y, <)$ oder kürzer: $F: X \xrightarrow{\cong} Y$.
$(X, <)$ und $(Y, <)$ heißen isomorph, falls ein Isomorphismus $F: X \to Y$ existiert. Schreibweise: $(X, <) \cong (Y, <)$.

4.1. Lemma $(X, <)$ und $(Y, <)$ seien total geordnete Klassen, $F: X \xrightarrow{\text{aus}} Y$ streng monoton. Dann ist F injektiv und F^{-1} streng monoton.
Beweis. F ist injektiv: seien $x, x' \in \operatorname{vb} F$, $x \neq x'$. Da X total geordnet ist, gilt entweder $x < x'$ (und dann $F(x) < F(x')$, also $F(x) \neq F(x')$) oder $x' < x$ (und dann $F(x') < F(x)$, also wieder $F(x) \neq F(x')$).
F^{-1} ist streng monoton: seien $y, y' \in \operatorname{nb} F = \operatorname{vb} F^{-1}$, $y < y'$. Sei $y = F(x)$, $y' = F(x')$, also $x = F^{-1}(y)$, $x' = F^{-1}(y')$; es ist $x < x'$ zu zeigen. Wäre $x' \leq x$, so folgte $F(x') = y' \leq F(x) = y$, ein Widerspruch! ∎