Bem Ist $C \neq \phi$, so ist $\bigcap C$ eine Menge: denn sei $c \in C$. Wegen $\bigcap C \subseteq c$ ist nach dem Aussonderungsaxiom $\bigcap C \in V$. Ist $C = \phi$, so ist $\bigcap C = V$ keine Menge: $\bigcap C$ ist, wie jede Klasse, Teilklasse von V. Es ist auch $V \subseteq \bigcap C$: denn ist $x \in V$, so $x \in \bigcap C$, da $C = \phi$.
Ist $C = \phi$, so $\bigcup C = \phi$, also Menge. Das Vereinigungsaxiom lautet:

(Ver) Ist x eine Menge, so ist auch $\bigcup x$ eine Menge.

2.2. Lemma a) Sind x, y Mengen, so ist auch $x \cup y$ Menge.
b) Ist a Menge, so ist $-a = \{x \mid x \notin a\}$ echte Klasse.

Beweis. a) Nach (Pa) ist $z := \{x, y\}$ Menge. Nach (Ver) ist $\bigcup z$ Menge. Aber $\bigcup z = x \cup y$.
b) Wäre $-a$ Menge, so auch $a \cup -a = V$; Widerspruch! ∎

Bem Wegen 2.2 a) gilt: sind $x_1 \ldots x_n$ Mengen, $n \in \mathbb{N}$, so ist $x_1 \cup \ldots \cup x_n$ Menge.

3. Relationen und Funktionen; das Potenzmengen- und das Ersetzungsaxiom

Def Sind C und D Klassen, so sei $C \times D$ (das „cartesische Produkt von C und D) die Klasse

$$C \times D := \{p \mid \text{es ex. } x \in C, y \in D \text{ mit } p = (x, y)\};$$

kürzer:

$$C \times D = \{(x,y) \mid x \in C \text{ und } y \in D\}.$$

Analog definiert man $C \times D \times E := (C \times D) \times E$, also

$$C \times D \times E = \{((x,y),z) \mid x \in C, y \in D, z \in E\}$$
$$= \{(x,y,z) \mid x \in C, y \in D, z \in E\}$$

usw.
Eine Klasse R heißt eine Relation, falls alle Elemente von R geordnete Paare sind, d. h. falls $R \subseteq V \times V$. (Analog: R ist n-stellige Relation, falls alle Elemente von R geordnete n-tupel sind).
Eine Funktion F ist eine Relation, für die gilt:

$$(x,y) \in F, \ (x,z) \in F \Rightarrow y = z.$$

Statt „$(x,y) \in F$" schreibt man dann „$y = F(x)$" (y ist „der Funktionswert von x unter F"). Analog kann man n-stellige

Funktionen definieren als $n+1$-stellige Relationen F mit:

$$(x_1 \dots x_n\, y) \in F \,,\ (x_1 \dots x_n\, z) \in F \Rightarrow y = z.$$

Schreibweise: $y = F(x_1 \dots x_n)$ statt „$(x_1 \dots x_n\, y) \in F$".

Wir definieren und beweisen zunächst einiges über Relationen und Funktionen, ohne zu fragen, ob die betrachteten Klassen Mengen sind oder nicht.

<u>Def</u> Sind R, S Relationen, so seien $S \circ R$ und R^{-1} die Relationen

$$S \circ R := \{(x,z) \mid \text{es ex. ein } y \text{ mit } (x,y) \in R \text{ und } (y,z) \in S\}$$

(es wird zuerst R, dann S angewandt!)

$$R^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}.$$

$\mathrm{vb}R$, $\mathrm{nb}R$, $\mathrm{fd}R$ seien die Klassen

$\mathrm{vb}R := \{x \mid \text{es ex. } y \text{ mit } (x,y) \in R\}$ „Vorbereich von R"

$\mathrm{nb}R := \{y \mid \text{es ex. } x \text{ mit } (x,y) \in R\}$ „Nachbereich von R"

$\mathrm{fd}R := \mathrm{vb}R \cup \mathrm{nb}R$ „Feld von R".

Für eine Klasse X sei id_X (die Identität auf X) die Funktion

$$\mathrm{id}_X := \{(x,x) \mid x \in X\}.$$

Eine Funktion F heißt injektiv, falls für $x, y \in \mathrm{vb}F$, $x \neq y$ stets $F(x) \neq F(y)$ folgt.

<u>3.1. Lemma</u> a) Für beliebige Relationen R, S, T gilt

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

und

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

b) Sind F, G Funktionen, so auch $G \circ F$.

c) F sei Funktion und $X = \mathrm{vb}F$. F^{-1} ist genau dann Funktion, wenn F injektiv ist; und dann ist $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_X$.

Beweis. a)

$$\begin{aligned}
(x,u) \in (T \circ S) \circ R &\Leftrightarrow \text{ex. } y \text{ mit } (x,y) \in R,\ (y,u) \in T \circ S \\
&\Leftrightarrow \text{ex. } y, z \text{ mit } (x,y) \in R,\ (y,z) \in S,\ (z,u) \in T \\
&\Leftrightarrow \text{ex. } z \text{ mit } (x,z) \in S \circ R,\ (z,u) \in T \\
&\Leftrightarrow (x,u) \in T \circ (S \circ R).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x,z) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (z,x) \in S \circ R \\
&\Leftrightarrow \text{ex. } y \text{ mit } (z,y) \in R,\ (y,x) \in S \\
&\Leftrightarrow \text{ex. } y \text{ mit } (x,y) \in S^{-1},\ (y,z) \in R^{-1} \\
&\Leftrightarrow (x,z) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}$$

b) Seien (x,z) und $(x,z') \in G \circ F$; es ist $z = z'$ zu zeigen. Es existieren y, y' mit $(x,y) \in F$, $(y,z) \in G$; $(x,y') \in F$,

$(y', z') \in G$. Da F Funktion, ist $y = y'$. Da G Funktion, ist $z = z'$.

c) F^{-1} sei Funktion. D.h.: aus $(s,t) \in F^{-1}$, $(s,t') \in F^{-1}$ folgt: $t = t$. Anders geschrieben:

$$(t,s) \in F, \ (t',s) \in F \Rightarrow t = t'$$
$$F(t) = s, \ F(t') = s \Rightarrow t = t',$$

d.h. F ist injektiv. – Die Umkehrung wird genauso bewiesen.

$F^{-1} \circ F = id_X$ zeigt man so:

$$(x,z) \in F^{-1} \circ F \Leftrightarrow \text{es ex. } y \text{ mit } (x,y) \in F, \ (y,z) \in F^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \text{es ex. } y \text{ mit } (x,y) \in F, \ (z,y) \in F$$
$$\Leftrightarrow z = x, \text{ und } x \in \text{vb}\, F = X$$

da F injektiv. ∎

<u>Bem</u> F, G seien Funktionen und $x \in \text{vb}(G \circ F)$, $z = (G \circ F)(x)$. D.h. es ex y mit $(x,y) \in F$, $(y,z) \in G$. Anders geschrieben: $y = F(x)$, $z = G(y)$ und $z = G(F(x))$. Also

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)).$$

Diese Gleichung erklärt, warum die „zuerst angewandte" Funktion F in $G \circ F$ rechts geschrieben wird.

<u>Def. + Schreibweisen</u> R sei Relation, F Funktion, A und I Klassen.

$$R[A] := \{ y \mid \text{es ex. } x \in A \text{ mit } (x,y) \in R \}$$

„das Bild von A unter R"

F sei Funktion.

Ist $I = \text{vb}\, F$, so schreibt man statt $F = \{ (i, F(i)) \mid i \in I \}$ auch $F = (F(i) \mid i \in I)$ oder $F = (F_i \mid i \in I)$ („Familienschreibweise" für F).

<u>Bspe</u> a) Sei $I = \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Man unterscheide

$F = (x^2 \mid x \in \mathbb{R})$, die „Quadratfunktion" auf $\mathbb{R}$

von $\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, der Menge aller Quadratzahlen in $\mathbb{R}$!

Es ist $F \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}$!

b) $I = \mathbb{N}$; $F(n) = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Also

$$F = ((-1)^n \mid n \in \mathbb{N})$$

aber $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{+1, -1\}$.

3.2. Lemma R, S seien Relationen, F Funktion; A, B, X Klassen.

a) $(S \circ R)[A] = S[R[A]]$

b) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$

c) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$

d) $F[A] = \{F(x) \mid x \in \mathrm{vb} F \cap A\}$

$F^{-1}[A] = \{x \mid x \in \mathrm{vb} F$ und $F(x) \in A\}$

e) $F^{-1}[A \cup B] = F^{-1}[A] \cup F^{-1}[B]$

$F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$

$F^{-1}[X \setminus A] = F^{-1}[X] \setminus F^{-1}[A]$.

Beweis. d) $x \in F^{-1}[A] \iff$ es ex. y mit $y \in A$, $(y, x) \in F^{-1}$

$\iff$ es ex. $y \in A$ mit $(x, y) \in F$

$\iff x \in \mathrm{vb} F$, und $F(x) \in A$.

e) $x \in F^{-1}[X \setminus A] \iff x \in \mathrm{vb} F$, und $F(x) \in X \setminus A$

$\iff x \in \mathrm{vb} F$, $F(x) \in X$, $F(x) \in -A$

$\iff (x \in \mathrm{vb} F$ und $F(x) \in X)$ und $(x \in \mathrm{vb} F$ und $F(x) \in -A)$

$\iff x \in F^{-1}[X]$ und $x \in F^{-1}[-A]$

$\iff x \in F^{-1}[X]$ und $x \notin F^{-1}[A]$. ∎

__Bem__ zu 3.2 c): auch wenn R Funktion, ist i.a. $R[A] \cap R[B]$ nicht Teilklasse von $R[A \cap B]$! Dies gilt nur für injektive Funktionen.

__Def__ F sei Funktion, A und B Klassen.

$F: A \xrightarrow{\text{aus}} B$, falls $\mathrm{vb} F \subseteq A$, $\mathrm{nb} F \subseteq B$ („F ist Funktion aus A nach B")

$F: A \to B$, falls $\mathrm{vb} F = A$, $\mathrm{nb} F \subseteq B$ („F ist Funktion von A nach B")

$F: A \twoheadrightarrow B$, falls $\mathrm{vb} F = A$, $\mathrm{nb} F = B$ („F ist surjektiv von A auf B")

$F: A \rightarrowtail B$, falls $F: A \to B$ und F injektiv („F ist injektive Funktion von A nach B")

$F: A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$, falls F injektiv und surjektiv („F ist bijektive Funktion (Bijektion) von A auf B").

__Bem__ Einige der Fragen, wann gewisse mit Relationen und Funktionen in Zusammenhang stehende Klassen sogar Mengen sind, lassen sich schon mit den bisher eingeführten Axiomen beantworten. Für andere Fragen führen wir zwei neue Axiome ein.

<u>3.3. Lemma</u> R sei eine Relation, die eine Menge ist. Dann sind auch $\text{vb}\,R$, $\text{nb}\,R$ und $\text{fd}\,R$ Mengen. Ist A eine beliebige Klasse, so ist $R[A]$ Menge.

Beweis. Die Elemente von R haben die Form

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}, \qquad x \in \text{vb}\,R,\ y \in \text{nb}\,R.$$

Daher gilt

$$\bigcup R = \{\{x\} \mid x \in \text{vb}\,R\} \cup \{\{x,y\} \mid x \in \text{vb}\,R,\ y \in \text{nb}\,R,\ (x,y) \in R\}$$

$$\bigcup\bigcup R = \{x \mid x \in \text{vb}\,R\} \cup \{y \mid y \in \text{nb}\,R\} = \text{vb}\,R \cup \text{nb}\,R = \text{fd}\,R.$$

Nach dem Vereinigungsaxiom sind $\bigcup R$, $\bigcup\bigcup R$ und damit $\text{fd}\,R$ Mengen. Da

$$\text{vb}\,R \subseteq \text{fd}\,R, \quad \text{nb}\,R \subseteq \text{fd}\,R, \quad R[A] \subseteq \text{nb}\,R \subseteq \text{fd}\,R,$$

sind nach dem Aussonderungsaxiom diese Klassen Mengen. ∎

<u>Def</u> Für eine Klasse C sei

$$P(C) := \{x \mid x \subseteq C\}$$

(die „Potenzklasse" von C). Beachte, daß nur Teil<u>mengen</u> von C zu $P(C)$ gehören!

Das Potenzmengenaxiom besagt:

(Pot) Ist x eine Menge, so ist auch $P(x)$ eine Menge – die „Potenzmenge" von x.

<u>3.4. Lemma</u> a) Sind a, b Mengen, so ist auch $a \times b$ Menge.
b) Ist R eine Relation und sind $\text{vb}\,R$, $\text{nb}\,R$ Mengen, so ist R Menge.
c) Ist $F: a \to b$ Funktion und a, b Mengen, so ist F Menge.

Beweis. a) Mit a, b sind auch $a \cup b$ (siehe 2.2.a)) und nach (Pot) $P(a \cup b)$, $P(P(a \cup b))$ Mengen. Nach (Aus) reicht es, $a \times b \subseteq P(P(a \cup b))$ zu zeigen. Sei $(x,y) \in a \times b$, also $x \in a$, $y \in b$. Dann gilt:

$$\{x\}, \{x,y\} \in P(a \cup b)$$
$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \in P(P(a \cup b)).$$

b) Es ist $R \subseteq \text{vb}\,R \times \text{nb}\,R$; nach (Aus) ist R Menge.
c) $\text{vb}\,F = a$ und $\text{nb}\,F \subseteq b$ sind Mengen ($\text{nb}\,F$ wegen (Aus)!). ∎

<u>Def</u> Sind a, b Mengen, so sei
$${}^ab := \{f \mid f \text{ ist Funktion von } a \text{ nach } b\}.$$

<u>3.5. Lemma</u> Sind a, b Mengen, so ist auch ${}^ab$ Menge.
Beweis. Sei $f \in {}^ab$, d. h. $f : a \to b$. Dann ist $\text{vb} f = a$, $\text{nb} f \subseteq b$, und $f \subseteq a \times b$. Also
$$f \in {}^ab \Rightarrow f \subseteq a \times b \Rightarrow f \in P(a \times b)$$
und ${}^ab \subseteq P(a \times b)$. Wegen 3.4.a) und (Pot) und (Aus) ist ${}^ab$ Menge. ∎

<u>Bsp</u> Ist R eine Relation und a Menge, so kann (falls R echte Klasse) $R[a]$ echte Klasse sein: sei z. B. $R := V \times V$ $= \{(x,y) \mid x, y \text{ Mengen}\}$, $a = \{c\}$, wobei c eine Menge sei. Es ist $R[a] = \{y \mid (c,y) \in R\} = V$ echte Klasse.

Nun sagt das Ersetzungsaxiom:

(Ers) Ist F eine Funktion und x eine Menge, so ist $F[x]$ eine Menge.

<u>Bem</u> In den meisten Anwendungen des Funktionsbegriffs in der Mathematik kommt man ohne Ersetzungsaxiom aus. Das liegt daran, daß zusammen mit einer Funktion F i. a. schon Mengen a, b mit $F : a \to b$ gegeben sind. Nach 3.4. c) ist dann F Menge; für jede Menge x ist dann $F[x]$ Menge nach 3.3. – Das Ersetzungsaxiom braucht man also nur wirklich in Fällen $F : A \to B$, in denen man nicht schon weiß, daß B Menge ist.

<u>3.6. Lemma</u> F sei eine Funktion und a eine Menge mit $\text{vb} F \subseteq a$. Dann ist F Menge.
Beweis. Es ist $F[a] = F[\text{vb} F] = \text{nb} F$ Menge nach (Ers). Wegen $\text{vb} F \subseteq a$ und (Aus) ist $\text{vb} F$ Menge. Nach 3.4. b) ist F Menge. ∎

<u>Def</u> Für eine Funktion F und eine Klasse A sei
$$F \upharpoonright A := \{(x,y) \mid x \in A \text{ und } (x,y) \in F\}$$
„die Einschränkung von F auf A".
<u>3.7. Lemma</u> F sei Funktion, a Menge. Dann ist $F \upharpoonright a$ Menge.
Beweis. $\text{vb}(F \upharpoonright a) \subseteq a$; benutze 3.6. ∎