b) $- - A = A$

c) $- V = \phi \quad , \quad - \phi = V.$

Beweis. z. B. von e):

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\iff x \in A, \text{ und } x \notin B \cap C \\ &\iff x \in A, \text{ und } (x \notin B \text{ oder } x \notin C) \\ &\iff (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \notin C) \\ &\iff x \in A \setminus B \text{ oder } x \in A \setminus C \\ &\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

von g):

$$\begin{aligned} x \in A \cup -A &\iff x \in A \text{ oder } x \in -A \\ &\iff x \in A \text{ oder } x \notin A \\ &\iff x = x \\ &\iff x \in V. \blacksquare \end{aligned}$$

Die Rechengesetze 1.3 sagen nichts darüber, ob $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $-A$ Mengen sind. Aufgrund des Aussonderungsaxioms kann man schon feststellen, daß $A \setminus B$ Menge ist, falls A Menge ist, denn $A \setminus B \subseteq A$. Ebenso folgt aus $A \in V$ oder $B \in V$ $A \cap B \in V$, denn $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$. Wegen $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ kann $A \cup B$ nur Menge sein, wenn A, B beide Mengen sind. Daß $A \cup B$ dann wirklich Menge ist, folgt erst aus dem Vereinigungsaxiom in Kapitel 2. Ist A Menge, so ist $-A$ echte Klasse, wie wir ebenfalls in Kapitel 2 sehen werden.

2. Das Paarmengen- und das Vereinigungsaxiom

Sind x, y Mengen, so sei $\{x, y\}$ die Klasse $\{z \mid z = x \text{ oder } z = y\}$. Insbesondere schreibt man, falls $x = y$, $\{x\}$ für $\{x, y\}$. $\{x, y\}$ heißt das ungeordnete Paar von x, y. Offenbar ist $\{x, y\} = \{y, x\}$. Man beachte, daß $\{x, y\}$ für echte Klassen x, y nicht definiert ist, da echte Klassen nicht Elemente von Klassen sein können. Das Paarmengenaxiom besagt nun, daß die Klasse $\{x, y\}$ eine Menge ist:

(Pa) Sind x, y Mengen, so ist auch $\{x, y\}$ eine Menge.

<u>Def</u> Für zwei Mengen x, y sei

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

das „geordnete Paar" von x, y.

<u>Bem.</u> Nach (Pa) sind $\{x\}$, $\{x, y\}$, (x, y) wieder Mengen. (x, y) ist nur definiert, wenn x, y beide Mengen sind. Die Bedeutung dieser Definition von (x, y) ist, daß dann 2.1 gilt. Es gibt auch andere Möglichkeiten, ein „geordnetes Paar" so zu definieren, daß 2.1 gilt,

einige dieser Definitionen lassen sich auch für echte Klassen durchführen.

2.1. Lemma a, b, x, y seien Mengen. Dann gilt

$$(a,b) = (x,y) \iff a = x \text{ und } b = y.$$

Beweis. „$\Leftarrow$": sei $a = x$, $b = y$. Dann ist $\{a\} = \{x\}$, $\{a,b\} = \{x,y\}$, $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\} = (x,y)$.

„$\Rightarrow$": 1. Fall $a = b$. Dann ist $\{a,b\} = \{a\}$ und

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\} = (x,y).$$

$\{\{a\}\}$ hat genau ein Element, nämlich $\{a\}$. Daher muß auch (x,y) genau ein Element haben; es muß also $\{x\} = \{x,y\}$ sein. Daraus folgt $y = x$, $(x,y) = \{\{x\}\}$ und

$$\{\{a\}\} = \{\{x\}\}$$
$$\{a\} = \{x\}$$
$$a = x;$$

ferner $b = a = x = y$.

2. Fall. $a \neq b$. Dann ist $\{a,b\} \neq \{a\}$; (a,b) hat genau zwei Elemente. Also hat (x,y) genau zwei Elemente; es ist $\{x\} \neq \{x,y\}$, und daher $x \neq y$. Betrachte die Gleichung

$$l := \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\} =: r.$$

l und r haben genau ein Element, das genau ein Element hat – nämlich $\{x\}$ und $\{a\}$, und genau ein Element, das genau zwei Elemente hat – nämlich $\{x,y\}$ und $\{a,b\}$. Daraus folgt $\{x\} = \{a\}$ und $a = x$; ferner $\{x,y\} = \{a,b\}$. Wegen $x \neq y$, $a \neq b$, $x = a$ folgt $b = y$. ∎

Bem. Man könnte nun analog geordnete Tripel definieren durch $(a,b,c) := ((a,b),c)$ und würde in Analogie zu 2.1 erhalten: $(a,b,c) = (x,y,z) \iff a = x,\ b = y,\ c = z$. Ebenso geordnete n-tupel durch $(x_1,\dots,x_n) := ((x_1,\dots,x_{n-1}),x_n)$; es würde gelten: $(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n) \iff x_1 = y_1$ und ... und $x_n = y_n$.

Def. C sei eine Klasse. Dann seien $\bigcap C$, $\bigcup C$ (der Durchschnitt über C, die Vereinigung über C) die Klassen

$$\bigcap C := \{x \mid \text{für jedes } c \in C \text{ ist } x \in c\}$$
$$\bigcup C := \{x \mid \text{es gibt ein } c \in C \text{ mit } x \in c\}.$$

Bem Ist $C \neq \emptyset$, so ist $\bigcap C$ eine Menge: denn sei $c \in C$. Wegen $\bigcap C \subseteq c$ ist nach dem Aussonderungsaxiom $\bigcap C \in V$. Ist $C = \emptyset$, so ist $\bigcap C = V$ keine Menge: $\bigcap C$ ist, wie jede Klasse, Teilklasse von V. Es ist auch $V \subseteq \bigcap C$: denn ist $x \in V$, so $x \in \bigcap C$, da $C = \emptyset$.
Ist $C = \emptyset$, so $\bigcup C = \emptyset$, also Menge. Das Vereinigungsaxiom lautet:

$\boxed{\text{(Ver) Ist } x \text{ eine Menge, so ist auch } \bigcup x \text{ eine Menge.}}$

2.2. Lemma a) Sind x, y Mengen, so ist auch $x \cup y$ Menge.
b) Ist a Menge, so ist $-a = \{x \mid x \notin a\}$ echte Klasse.

Beweis. a) Nach (Pa) ist $z := \{x, y\}$ Menge. Nach (Ver) ist $\bigcup z$ Menge. Aber $\bigcup z = x \cup y$.
b) Wäre $-a$ Menge, so auch $a \cup -a = V$; Widerspruch! ∎

Bem Wegen 2.2 a) gilt: sind $x_1 \dots x_n$ Mengen, $n \in \mathbb{N}$, so ist $x_1 \cup \dots \cup x_n$ Menge.

3. Relationen und Funktionen; das Potenzmengen- und das Ersetzungsaxiom

Def Sind C und D Klassen, so sei $C \times D$ (das „cartesische Produkt von C und D") die Klasse

$$C \times D := \{p \mid \text{es ex. } x \in C, y \in D \text{ mit } p = (x, y)\};$$

kürzer:

$$C \times D = \{(x, y) \mid x \in C \text{ und } y \in D\}.$$

Analog definiert man $C \times D \times E := (C \times D) \times E$, also

$$C \times D \times E = \{((x, y), z) \mid x \in C, y \in D, z \in E\} = \{(x, y, z) \mid x \in C, y \in D, z \in E\}$$

usw.

Eine Klasse R heißt eine Relation, falls alle Elemente von R geordnete Paare sind, d.h. falls $R \subseteq V \times V$. (Analog: R ist n-stellige Relation, falls alle Elemente von R geordnete n-tupel sind).

Eine Funktion F ist eine Relation, für die gilt:

$$(x, y) \in F, \ (x, z) \in F \Rightarrow y = z.$$

Statt „$(x, y) \in F$" schreibt man dann „$y = F(x)$" (y ist „der Funktionswert von x unter F"). Analog kann man n-stellige