Um diese Antwort zu formulieren und dann auch einzusehen, muß man offenbar von einer festen Axiomatisierung der Mengenlehre, etwa ZF, ausgehen und sich mit Begriffen der Logik, wie z. B. „Beweis, Theorie, beweisbar..." vertraut machen.

Zwei technische Bemerkungen zum Schluß: a) wir werden laufend sogenannte Klassen

$$C = \{x \mid E(x)\}$$

betrachten. Dabei soll E eine Eigenschaft sein, die auf Mengen x zutreffen kann. Was eine „Eigenschaft" ist, wird hier absichtlich nicht präzisiert; es würde einen Ausflug in die Logik erfordern.–
Die Klassen benutzen wir nur zur Abkürzung längerer Sachverhalte; die von uns „offiziell" betrachteten Gegenstände sind die Mengen. Es gibt aber auch Axiomensysteme der Mengenlehre, etwa das von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), in denen die Klassen als den Mengen gleichberechtigte Objekte aufgefaßt werden.

b) Manchmal werden wir zur Veranschaulichung von Begriffen Mengen heranziehen, wie etwa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ..., deren Existenz erst später im Aufbau der Vorlesung bewiesen wird. Solche Beispiele werden mit „Bsp" bezeichnet.

1. Klassen und Mengen; Aussonderungs-, Extensionalitäts- und Nullmengenaxiom

Was eine Menge ist, wird in dieser Vorlesung nicht explizit definiert. Die Axiome legen es aber implizit weitgehend fest. Sind C, C' Mengen oder Klassen, so bedeute

$C \in C'$: C ist Element von C'
$C \notin C'$: C ist kein Element von C'.

Def Sei $E(x)$ eine Eigenschaft, die auf Mengen x zutreffen kann.

$$C = \{x \mid x \text{ ist Menge und hat die Eigenschaft } E\}$$

(kürzer: $C = \{x \mid E(x)\}$) sei die Gesamtheit aller Mengen x, die die Eigenschaft E haben. C heißt die durch E definierte Klasse.
Für jede Menge x gilt

$$x \in C \iff E(x).$$

Bem. 1. Mit Hilfe des Extensionalitätsaxioms und des Aussonderungsaxioms werden wir zeigen (1.1), daß jede Menge eine Klasse ist. Mengen sind also spezielle Klassen, aber nicht umgekehrt (siehe das folgende Beispiel). Die anschauliche Idee ist: Mengen sind diejenigen Klassen, die „klein", „überschaubar" sind. Ferner wird gelten: ist x Menge, so ex. eine Menge y mit $x \in y$ (nämlich z.B. $y = \{x\}$). Ist umgekehrt eine Klasse D Element einer anderen Klasse C, so muß D Menge sein (denn ist $C = \{x \mid E(x)\}$ und $D \in C$, so D Menge nach Definition von $\{x \mid E(x)\}$.

2. Die Elemente von Klassen und daher auch von Mengen müssen nach der Def. von $\{x \mid E(x)\} = \{x \mid x$ ist <u>Menge</u> und $\ldots\}$ wieder Mengen sein. Urelemente, d.h. Elemente von Klassen oder Mengen, die selbst keine Mengen sind, schließen wir damit aus. Das macht unsere Mengenlehre formal etwas einfacher; außerdem hat die Erfahrung gelehrt, daß alle für die Mathematik wichtigen Mengen sich ebensogut ohne Urelemente bilden lassen.

3. Die Eigenschaften $E(x)$, die zur Bildung von Klassen $C = \{x \mid E(x)\}$ dienen, dürfen auch von einer oder mehreren Mengen (den sog. Parametern der Klasse C) abhängen.

Bsp a, b seien Mengen, $C := \{x \mid x \subseteq a\}$ hängt vom Parameter a ab. $D := \{(x,y) \mid x \in a, y \in b\} = a \times b$ hängt von den Parametern a, b ab.

Bsp (Russellsche Antinomie) Sei W die Klasse $\{x \mid x \notin x\}$. Für jede Menge x gilt also

$$x \in W \iff x \notin x.$$

Wäre W eine Menge, so folgte (für $x := W$) $W \in W \iff W \notin W$; ein Widerspruch! – Da wir zwischen Mengen und Klassen unterscheiden wollen, sagt diese Betrachtung jedoch nur, daß die Klasse W keine Menge ist.

Wir müssen also die Vorstellung, für jede Eigenschaft $E(x)$ von Mengen sei $\{x \mid E(x)\}$ wieder eine Menge, aufgeben. Einiges von dieser Vorstellung wird durch das folgende Aussonderungsaxiom gerettet:

(Aus) Ist a eine Menge und $E(x)$ eine Eigenschaft von Mengen, so ist die Klasse $\{x \mid x \in a$ und $E(x)\}$, kürzer geschrieben als $\{x \in a \mid E(x)\}$, eine Menge.

Bem Setze $\{x \mid E(x)\} =: C$. Mit zwei am Ende dieses Kapitels behandelten Schreibweisen könnten wir das Aussonderungsaxiom auch so formulieren: a) ist a Menge, C Klasse, so ist $a \cap C$ Menge. b) ist D Klasse

mit $D \subseteq a$, so ist D Menge (jede Teilklasse einer Menge ist eine Menge; zum Beweis dieser Formulierung beachte, daß für $D \subseteq a$ $\{x \in a \mid x \in D\} = a \cap D = D$, da $D \subseteq a$).
$\{x \in a \mid E(x)\}$ ist die aus a durch E „ausgesonderte" Teilmenge von a.

Unser nächstes Axiom ist das Extensionalitätsaxiom:

(Ext) Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

Etwas formaler geschrieben: seien x, y Mengen. Dann

$$x = y \iff \text{für alle Mengen } z \text{ gilt } (z \in x \iff z \in y).$$

Man beachte, daß die Richtung „$\Rightarrow$" aus rein logischen Gründen gilt; das eigentliche Axiom ist die Richtung „$\Leftarrow$". Sie besagt, wie man es bei der anschaulichen Vorstellung einer Menge als einer Gesamtheit erwarten sollte, daß eine Menge völlig dadurch bestimmt ist, welche Elemente zu ihr gehören.

<u>1.1. Lemma</u> Jede Menge ist eine Klasse.
Beweis. Sei a Menge. Setze $D := \{x \mid x \in a \text{ und } x = x\}$, D ist nach (Aus) eine Menge. Nach Definition von D gilt für jede Menge x:

$$x \in D \iff x \in a;$$

d.h. D und a haben dieselben Elemente. Nach (Ext) ist $a = D$. ∎

<u>Def. + Bem.</u> Eine Klasse C heiße eine echte Klasse, falls sie keine Menge ist. Z.B. war $W = \{x \mid x \notin x\}$ echte Klasse. Sei

$$V := \{x \mid x = x\},$$

die „Klasse aller Mengen". $x \in V$ ist also eine Kurzschreibweise für „x ist Menge". V ist echte Klasse, denn offenbar ist $W \subseteq V$; wäre V Menge, so nach (Aus) auch W!

Das „Nullmengenaxiom" lautet:

(Null) Es gibt eine Menge, die keine Elemente hat.

Der hauptsächliche Grund, dieses Axiom hier einzuführen, ist, daß es die Existenz von mindestens einer Menge sichert. Natürlich ist $\{x \mid x \neq x\}$ eine Klasse, die keine Elemente hat; aber man weiß zunächst nicht, ob sie eine Menge ist. Ist a eine gegebene Menge, so ist nach (Aus)

$\{x \mid x \in a \text{ und } x \neq x\}$ eine Menge ohne Elemente. Außer (Null) gibt es in unserem Axiomensystem ZF nur ein einziges Axiom (das Unendlichkeitsaxiom), das die Existenz einer bestimmten Menge besagt; wir werden es aber erst ziemlich spät kennenlernen.

<u>Bem. + Def.</u> Sind x und y zwei Mengen ohne Elemente, so gilt nach (Ext) $x = y$. Die deshalb eindeutig bestimmte Menge x ohne Elemente nennen wir „die leere Menge" ϕ. In Klassenschreibweise:

$$\phi = \{x \mid x \neq x\}.$$

Am Schluß dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit den bekannten Booleschen Operationen für Klassen. Wegen 1.1 gelten die angegeben Rechengesetze insbesondere für Mengen. Da sie für Mengen bekannt sein dürften, geben wir nur einige der Beweise an.

<u>Def</u> C, D seien Klassen.

$$C \subseteq D :\Longleftrightarrow \text{für jedes } x \in V: \ (x \in C \Rightarrow x \in D)$$

(„C ist Teilklasse von D")

$$C = D :\Longleftrightarrow \text{für jedes } x \in V: \ (x \in C \Longleftrightarrow x \in D).$$

<u>1.2. Lemma</u> A, B, C seien Klassen. Es gilt dann:

a) $\phi \subseteq A$, $A \subseteq V$

b) $A \subseteq B$, $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

c) $A \subseteq A$

d) $A \subseteq B$, $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$. ∎

<u>Def</u> C, D seien Klassen.

$$C \cap D := \{x \mid x \in C \text{ und } x \in D\}$$

$$C \cup D := \{x \mid x \in C \text{ oder } x \in D\}$$

$$C \setminus D := \{x \mid x \in C \text{ und } x \notin D\}$$

$$-C := \{x \mid x \notin C\}.$$

<u>1.3. Lemma</u> A, B, C seien Klassen.

a) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B$

b) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

e) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

f) $-(B \cap C) = -B \cup -C$, $-(B \cup C) = -B \cap -C$

g) $A \cup -A = V$ $\quad A \cap -A = \phi$

h) $--A = A$

c) $-V = \phi \quad , \quad -\phi = V.$

Beweis. z.B. von e):

$$x \in A \setminus (B \cap C) \iff x \in A, \text{ und } x \notin B \cap C$$
$$\iff x \in A, \text{ und } (x \notin B \text{ oder } x \notin C)$$
$$\iff (x \in A \text{ und } x \notin B) \text{ oder } (x \in A \text{ und } x \notin C)$$
$$\iff x \in A \setminus B \text{ oder } x \in A \setminus C$$
$$\iff x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

von g): $x \in A \cup -A \iff x \in A \text{ oder } x \in -A$
$$\iff x \in A \text{ oder } x \notin A$$
$$\iff x = x$$
$$\iff x \in V. \;\blacksquare$$

Die Rechengesetze 1.3 sagen nichts darüber, ob $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $-A$ Mengen sind. Aufgrund des Aussonderungsaxioms kann man schon feststellen, daß $A \setminus B$ Menge ist, falls A Menge ist, denn $A \setminus B \subseteq A$. Ebenso folgt aus $A \in V$ oder $B \in V$ $A \cap B \in V$, denn $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$. Wegen $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ kann $A \cup B$ nur Menge sein, wenn A, B beide Mengen sind. Daß $A \cup B$ dann wirklich Menge ist, folgt erst aus dem Vereinigungsaxiom in Kapitel 2. Ist A Menge, so ist $-A$ echte Klasse, wie wir ebenfalls in Kapitel 2 sehen werden.

2. Das Paarmengen- und das Vereinigungsaxiom

Sind x, y Mengen, so sei $\{x, y\}$ die Klasse $\{z \mid z = x \text{ oder } z = y\}$. Insbesondere schreibt man, falls $x = y$, $\{x\}$ für $\{x, y\}$. $\{x, y\}$ heißt das ungeordnete Paar von x, y. Offenbar ist $\{x, y\} = \{y, x\}$. Man beachte, daß $\{x, y\}$ für echte Klassen x, y nicht definiert ist, da echte Klassen nicht Elemente von Klassen sein können. Das Paarmengenaxiom besagt nun, daß die Klasse $\{x, y\}$ eine Menge ist:

(Pa) Sind x, y Mengen, so ist auch $\{x, y\}$ eine Menge.

Def Für zwei Mengen x, y sei
$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$
das „geordnete Paar" von x, y.

Bem. Nach (Pa) sind $\{x\}$, $\{x, y\}$, (x, y) wieder Mengen. (x, y) ist nur definiert, wenn x, y beide Mengen sind. Die Bedeutung dieser Definition von (x, y) ist, daß dann 2.1 gilt. Es gibt auch andere Möglichkeiten, ein „geordnetes Paar" so zu definieren, daß 2.1 gilt,