Einführung in die Mengenlehre

Vorlesung an der FU Berlin, SS 199[illegible]

Sabine Koppelberg

0. Wozu braucht man in der Mengenlehre Axiome?

Den Stoff dieser Vorlesung kann man in folgende Teile gliedern:

I. Vorstellung der meisten Axiome; einfache Sätze über Mengen und Klassen, die den Hörern häufig schon bekannt sein werden; Begriffe wie Relation, Funktion; der Schwerpunkt des Interesses liegt darauf, wie dabei die benutzten Axiome eingehen

II. Wohlordnungen, Ordinalzahlen, Kardinalzahlen; das Rechnen mit Kardinalzahlen

III. Anwendungen der Begriffe aus Teil II auf einige kombinatorische Fragen über unendliche Mengen.

Der für die Hörer neue und auch inhaltlich interessante Stoff konzentriert sich dabei auf II und III.

Die ursprüngliche und wahrscheinlich jedem Mathematikstudenten geläufige Vorstellung von einer Menge wird gut wiedergegeben in einer Erklärung von Cantor: eine Menge ist

„eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Gegenständen unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen".

Eine Menge ist also eine Gesamtheit von irgendwelchen Dingen. Die umgekehrte Vorstellung, daß nämlich jede Gesamtheit eine Menge sei, führt aber zum Widerspruch, wie Russell erkannte (siehe Kapitel 1.). Nun faßte man die Hoffnung, ein axiomatischer Aufbau der Mengenlehre könne diese Widersprüche umgehen. Genauer gesagt: man suchte Axiomensysteme für die Mengenlehre, die genügend reichhaltig waren, um den Aufbau der Mathematik innerhalb der Mengenlehre zu ermöglichen. Ein solches System, das von Zermelo und Fraenkel angegeben wurde (kurz ZF genannt), werden wir hier kennenlernen. Ferner klärte man einige grundlegende Begriffe der Logik (Beweise aus Axiomensystemen, Widerspruchsfreiheit von Axiomensystemen) in den 20er und 30er Jahren so weit, daß man hoffen konnte, die Widerspruchsfreiheit etwa von ZF mit allgemein als korrekt angesehenen Mitteln zu zeigen (sog. Hilbertsches Programm). Allerdings zeigte Gödel 1931, daß dies jedenfalls nicht in der Form möglich ist, die Hilbert vorschwebte: eine Theorie, in deren Rahmen man die Widerspruchsfreiheit von ZF zeigen kann, muß „stärker" sein als ZF selbst. – Bisher wurden allerdings in ZF keine Widersprüche gefunden.

Für die Benutzung von Axiomen in der Mengenlehre spricht weiter, daß ein rein „naives" Denken sehr schnell an seine Grenzen stößt. Zum Beispiel war es, nachdem man sich darüber klar geworden war, daß gelegentlich in der Mathematik das Auswahlaxiom angewandt wird, durchaus nicht klar, ob man das Auswahlaxiom als „vom naiven Standpunkt aus richtig" akzeptieren sollte – insbesondere, da viele seiner Konsequenzen sehr paradox klingen. Man wird sich also explizit klarmachen, wo dieses Prinzip angewandt wird. Die Lage ist etwa der zu vergleichen, in der man sich bei der Einführung der reellen Zahlen in Analysis I befindet: die Axiome für Körper und angeordnete Körper könnte man evtl. als „anschaulich klar" benutzen, ohne sie explizit zu fordern. Das Vollständigkeitsaxiom jedoch („jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum", bzw. „$\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet, und jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert") ist anschaulich nicht so evident und muß daher explizit gefordert werden.

Schließlich gibt es mengentheoretische Probleme, die nur in einer axiomatisch aufgebauten Mengenlehre angemessen behandelt werden können; z. B. wurde schon von Cantor die sog. spezielle Kontinuumhypothese betrachtet:

(CH) ist $M \subseteq \mathbb{R}$, so ist entweder M endlich, oder es existiert eine Bijektion $f: M \to \mathbb{N}$, oder es existiert eine Bijektion $g: M \to \mathbb{R}$.

Anders ausgedrückt: es gibt keine Kardinalzahl, die echt zwischen der von $\mathbb{N}$ ($\aleph_0$) und der von $\mathbb{R}$ ($2^{\aleph_0}$) liegt. (CH) wäre sicher „wahr", wenn man einen Beweis von (CH) angeben könnte, egal, ob in der naiven Mengenlehre oder aufgrund von Axiomen. Aber wie kann man zeigen, daß (CH) „falsch" sein kann? Entweder, indem man ein $M \subseteq \mathbb{R}$ angibt, das (CH) falsch macht – das ist aber, wie Gödel 1940 gezeigt hat, unmöglich. Oder, indem man zeigt, daß es keinen formalen Beweis von (CH) etwa aus den ZF-Axiomen geben kann – dies ist Cohen 1963 gelungen. Die Antwort auf die Frage, ob (CH) „wahr" oder „falsch" ist, lautet also:

aus den ZF-Axiomen ist weder (CH) noch die Negation von (CH) beweisbar.

Um diese Antwort zu formulieren und dann auch einzusehen, muß man offenbar von einer festen Axiomatisierung der Mengenlehre, etwa ZF, ausgehen und sich mit Begriffen der Logik, wie z. B. „Beweis, Theorie, beweisbar..." vertraut machen.

Zwei technische Bemerkungen zum Schluß: a) wir werden laufend sogenannte Klassen

$$C = \{x \mid E(x)\}$$

betrachten. Dabei soll E eine Eigenschaft sein, die auf Mengen x zutreffen kann. Was eine „Eigenschaft" ist, wird hier absichtlich nicht präzisiert; es würde einen Ausflug in die Logik erfordern. – Die Klassen benutzen wir nur zur Abkürzung längerer Sachverhalte; die von uns „offiziell" betrachteten Gegenstände sind die Mengen. Es gibt aber auch Axiomensysteme der Mengenlehre, etwa das von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), in denen die Klassen als den Mengen gleichberechtigte Objekte aufgefaßt werden.

b) Manchmal werden wir zur Veranschaulichung von Begriffen Mengen heranziehen, wie etwa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ..., deren Existenz erst später im Aufbau der Vorlesung bewiesen wird. Solche Beispiele werden mit „Bsp" bezeichnet.

1. Klassen und Mengen; Aussonderungs-, Extensionalitäts- und Nullmengenaxiom

Was eine Menge ist, wird in dieser Vorlesung nicht explizit definiert. Die Axiome legen es aber implizit weitgehend fest. Sind C, C' Mengen oder Klassen, so bedeute

$C \in C'$: C ist Element von C'

$C \notin C'$: C ist kein Element von C'.

Def Sei E(x) eine Eigenschaft, die auf Mengen x zutreffen kann.

$$C = \{x \mid x \text{ ist Menge und hat die Eigenschaft } E\}$$

(kürzer: $C = \{x \mid E(x)\}$) sei die Gesamtheit aller Mengen x, die die Eigenschaft E haben. C heißt die durch E definierte Klasse. Für jede Menge x gilt

$$x \in C \iff E(x).$$