9. Übung, Aufgabe 3

Wir gehen jeweils von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^{n+m}$ aus.

(a) Sei $(x_0, y_0) \in A \times B$.
Es ist zu zeigen, dass eine offene Kugel $B_\epsilon(x_0, y_0)$ existiert mit

$$B_\epsilon(x_0, y_0) \subset A \times B.$$

Es ist $x_0 \in A$ und $y_0 \in B$. Da A und B nach Voraussetzung offen sind, gibt es $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$, so dass $B_{\epsilon_1}(x_0) \subset A$ und $B_{\epsilon_2}(y_0) \subset B$.
Sei $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Dann gilt

$$B_\epsilon(x_0, y_0) \subset B_{\epsilon_1}(x_0) \times B_{\epsilon_2}(y_0) \subset A \times B,$$

denn aus $d((x, y), (x_0, y_0)) < \epsilon$ folgt $d(x, x_0) < \epsilon \leq \epsilon_1$ und $d(y, y_0) < \epsilon \leq \epsilon_2$.

(b) Zu zeigen: $\mathbb{R}^{n+m} \setminus (A \times B)$ ist offen.
Es gilt:

$$\mathbb{R}^{n+m} \setminus (A \times B) = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R}^m \cup \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \setminus B).$$

$\mathbb{R}^n \setminus A$ und $\mathbb{R}^m \setminus B$ sind nach Voraussetzung offen und $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ sind offen. Wegen Teil (a) sind somit auch $(\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \setminus B)$ offen. Da die Vereinigung zweier offener Mengen wieder offen ist, ist also $\mathbb{R}^{n+m} \setminus (A \times B)$ offen.

(c) „$\subseteq$“
Sei $(x, y) \in \partial(A \times B)$, d. h. in jeder Umgebung von (x, y) liegen Punkte aus $A \times B$ und aus $\mathbb{R}^{n+m} \setminus (A \times B)$.
Wir zeigen zunächst: $x \in \overline{A}$ und $y \in \overline{B}$:
Wäre $x \notin \overline{A} = A \cup \partial A$, gäbe es eine Umgebung U von x mit $U \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann enthielte aber $U \times B$ eine Umgebung V von (x, y) mit $V \subset U \times B \subset \mathbb{R}^{n+m} \setminus (A \times B)$, im Widerspruch zur Voraussetzung $(x, y) \in \partial(A \times B)$. Analog sieht man $y \in \overline{B}$.
Weiterhin ist $x \in \partial A$ oder $y \in \partial B$, ansonsten gäbe es Umgebungen W von x und W' von y, so dass $W \subset A$ und $W' \subset B$. Dann wäre $W \times W' \subset A \times B$, d. h. die Umgebung $W \times W'$ von (x, y) enthielte keine Punkte aus $\mathbb{R}^{n+m} \setminus (A \times B)$, im Widerspruch zu $(x, y) \in \partial(A \times B)$.
Also ist entweder $(x, y) \in \partial A \times \overline{B}$ oder $(x, y) \in \overline{A} \times \partial B$.

„$\supseteq$“
Sei $(x, y) \in \partial A \times \overline{B}$. Sei weiter U eine Umgebung von (x, y). Man kann Umgebungen V von x und W von y wählen, so dass $V \times W \subset U$. Da $x \in \partial A$, entält V sowohl Punkte aus A, als auch aus $\mathbb{R}^n \setminus A$. Da $y \in \overline{B}$, enthält W Punkte aus B. Somit enthält $V \times W$ Punkte aus $A \times B$ und $(\mathbb{R}^n \setminus A) \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \setminus (A \times B)$. Es ist also $(x, y) \in \partial(A \times B)$.
Analog zeigt man $((x, y) \in (\overline{A} \times \partial B)) \Longrightarrow (x, y) \in \partial(A \times B)$.