Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

Probeklausur zur Vorlesung „Analysis II“

16.1.07

Aufgabe 1 3 Punkte

Es sei X ein metrischer Raum und $U \subset X$. Wann nennt man U offen? (Geben Sie die Definition an!)

Aufgabe 2 4 Punkte

Es sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem kompakten metrischen Raum X. Zu jedem Punkt x_0 gebe es einen Radius $r > 0$, so dass das Supremum

$$\sup\{f(x) : x \in B_r(x_0)\}$$

kleiner als 1 ist. ($B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$.) Zeigen Sie, dass dann auch das Supremum

$$\sup\{f(x) : x \in X\}$$

kleiner als 1 ist.

Aufgabe 3 3 Punkte

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Meng und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Wann nennt man f in einem Punkt $x \in U$ partiell differenzierbar? (Geben Sie die Definition an!)

Aufgabe 4 4 Punkte

Gegeben seien die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (xy, x^2 + y, x - y^2)$ und $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u, v, w) \mapsto u^2 + v^2 + w^2$. Zeigen Sie, dass f und g auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sind und berechnen Sie die Funktional-Matrix von $(g \circ f)$ an der Stelle (x, y) mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 5 4 Punkte

Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto -3x^2 + 7xy - 2y^2$$

auf lokale Extrema.

Bitte wenden!

Aufgabe 6 4 Punkte

Gegeben seien die Gleichungssysteme

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} x + y - \sin z &= 0, \\ e^x - x - y^3 &= 1; \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} x + y - \sin z &= 0, \\ e^z - x - y^3 &= 1; \end{aligned}$$

die beide die Lösung $x = y = z = 0$ haben. Untersuchen Sie beide Gleichungssysteme hinsichtlich ihrer Auflösbarkeit nach y, z in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$, d. h. untersuchen Sie, ob durch die Gleichungen in einer Umgebung von x=0 zwei Funktionen $y(x), z(x)$ mit $y(0) = z(0) = 0$ definiert werden.