Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

8. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 12.12.06 Abgabe: 19.12.06

Aufgabe 1

Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend, d. h. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$, und f stetig, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

(b) Geben Sie jeweils ein Beispiel dafür an, dass man auf die Voraussetzungen, dass X kompakt bzw. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, nicht verzichten kann.

Aufgabe 2

Es sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch

$$F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

definierte Abbildung.
Berechnen Sie die Funktional-Matrix von F und, wo sie existiert, ihre Inverse.
Zeigen Sie, dass F surjektiv ist und dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$(x, y) \neq (0, 0)$, genau zwei Urbildpunkte hat.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgendes niedrigdimensionale Analogon des Satzes über implizite Funktionen:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im zweiten Argument streng monoton ist. Sei $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt mit $f(\xi, \eta) = 0$. Dann gibt es ein Rechteck $I_\xi \times I_\eta$ mit $(\xi, \eta) \in I_\xi \times I_\eta$ und eine stetige Funktion $g : I_\xi \longrightarrow I_\eta$, so dass $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in I_\xi$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gleichung $y^2 + xz + z^2 - e^{xz} = 1$ in einer Umgebung des Punktes $(0, -1, 1)$ in der Form $g(x, y) = z$ eindeutig auflösbar ist. Geben Sie den Gradienten von g im Punkt $(0, -1)$ an.