Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

5. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 21.11.06 Abgabe: 28.11.06

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

ist überall differenzierbar.

Aufgabe 2

Es sei $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine in U differenzierbare Funktion, d. h. für alle $x \in U$ gibt es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass in einer Umgebung von x gilt $f(x+v) - f(x) = Av + o(||v||)$.
Zeigen Sie, dass das Funktional A eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 3

Ein Rotationstorus im $\mathbb{R}^3$ wird durch folgende Abbildung beschrieben:

$$T: [0,2\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(u,v) = \begin{pmatrix} (2+\cos v)\cos u \\ (2+\cos v)\sin u \\ \sin v \end{pmatrix}.$$

Eine Kurve im Definitionsbereich des Torus

$$\gamma: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (t,t)$$

wird durch T auf eine räumliche Kurve auf dem Torus abgebildet

$$\Gamma: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \Gamma(t) = (T \circ \gamma)(t).$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial T}{\partial u}$ und $\frac{\partial T}{\partial v}$.

(b) Berechnen Sie den Tangentialvektor $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ der Kurve Γ durch Anwendung der Kettenregel auf $T \circ \gamma$.

Bitte wenden!

(c) (freiwillig) Zeichnen Sie den Torus, die Kurve und einige Tangentialvektoren mit einem Computeralgebra-Programm.

Bemerkung: Γ ist ein Beispiel für einen $(1,1)$-Torusknoten. Allgemeinere Torusknoten entstehen mit $\gamma_{n,m}(t) = (mt, nt)$ wobei $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Ein *Polygonzug* zwischen Punkten $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist eine Menge
$P(a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b) := \overline{x_0 x_1} \cup \overline{x_1 x_2} \cup \ldots \cup \overline{x_{n-1} x_n}$, wobei $x_i \in \mathbb{R}^n$ und $\overline{x_{i-1} x_i} = \{(1-t)x_{i-1} + t x_i : 0 \leq t \leq 1\}$, $i = 1, \ldots, n$.
Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet*, wenn G offen ist und wenn zwischen je zwei Punkten a, b aus G ein Polygonzug in G existiert.

Zeigen Sie:
Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\operatorname{grad} f = 0$ auf G, so ist f konstant in G.