Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

2. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 31.10.06 Abgabe: 7.11.06

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Anfang der Taylor-Reihe der Funktion

$$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$$

mit Entwicklungspunkt 0 bis einschließlich des Gliedes 5. Ordnung!
Zeichnen Sie für $n = 0, \ldots, 5$ jeweils das Taylor-Polynom von Grad n.

Aufgabe 2

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und P_n ein Polynom vom Grad $\leq n$.
Zeigen Sie: Besteht eine Abschätzung

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M|x-a|^{n+1} \qquad \text{für alle } x \in I \qquad (M \text{ konstant}),$$

so ist P_n das n-te Taylor-Polynom $T_n(x; a)$ von f.

Aufgabe 3

Seien $a, r > 0$ und

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (rt - a\sin t, r - a\cos t). \end{array}$$

Berechnen Sie f' und f'' und skizzieren Sie f, f' und f'' für $a = 1$, $r = 2$ und für $a = 2$, $r = 1$ im Bereich $0 \leq t \leq 4\pi$.

Aufgabe 4

Sei $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ und

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (e^{ct}\cos t, e^{ct}\sin t). \end{array}$$

(a) Skizzieren Sie die Kurve für $c = \frac{1}{2\pi}$ im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

(b) Zeigen Sie, dass die Kurve f jeden Kreis um den Nullpunkt in genau einem Punkt schneidet und berechnen Sie den Cosinus des Schnittwinkels.

Hinweis für die Zeichenaufgaben: Sie können für die Zeichnungen gerne eine Computeralgebra-Software benutzen.