Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

12. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 30.1.07 Abgabe: 9.1.07

Aufgabe 1

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{ll} y_1' = y_2 y_3 & y_1(0) = 0 \\ y_2' = -y_1 y_3 & y_2(0) = 1 \\ y_3' = 2 & y_3(0) = 0 \end{array}$$

iterativ. Bestimmen Sie dazu die n-te Approximation

$$y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1,n}(x) \\ y_{2,n}(x) \\ y_{3,n}(x) \end{pmatrix}$$

ausgehend von

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen, d. h. die Lösung durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereiches:

(a) $y' = e^y \sin x$,

(b) $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $|y| < 1$,

(c) $y' = 5y + e^{2x}$,

(d) $y' = (x + y)^2$

Aufgabe 3

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \longrightarrow M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

eine stetige Abbildung.

Bitte wenden!

Die Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

besitze die spezielle Lösung $\varphi = \binom{\varphi_1}{\varphi_2} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Im Teilintervall $J \subset I$ gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in J$.
Zeigen Sie: Man erhält eine zweite, von φ linear unabhängige Lösung $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(x) = u(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix},$$

wobei $u, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{aligned} g' &= \left(a_{22} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) g, \\ u' &= \frac{a_{12}}{\varphi_1} g. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems auf $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + \frac{1}{x} y_2 + \ln x + \frac{1}{x}, \\ y_2' &= (1-x) y_1 + y_2 + (x-1) \ln x. \end{aligned}$$

Anleitung: Eine spezielle Lösung des homogenen Systems ist $\varphi(x) = \binom{1}{x}$.