Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

10. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 9.1.07 Abgabe: 16.1.07

Aufgabe 1

Sei $\gamma :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ die durch

$$\gamma(t) := \sin 2t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

definierte Kurve im $\mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie, dass γ eine Immersion ist, aber $\gamma(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2

Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z^2 - 1, \\ f_2(x, y, z) &= (1 - \epsilon)x - \epsilon z. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = 0\}$ für jedes ϵ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

(b) Skizzieren Sie M und $N := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) = 0\}$ für $\epsilon = 0, \frac{1}{2}, 1$.

Aufgabe 3

M_1 und M_2 seien $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.
Zeigen Sie:
Ist $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ und $T_x(M_1) \neq T_x(M_2)$ für alle $x \in M_1 \cap M_2$, so ist $M_1 \cap M_2$ eine $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den achsenparallelen Quader größten Volumens, der dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einbeschrieben ist.