Freie Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

1. Übung zur Vorlesung „Analysis II“

Ausgabe: 24.10.06 Abgabe: 31.10.06

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit:

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|} \end{array}$$

Sind die f_n stetig? Existiert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Aufgabe 2

Zeigen Sie anhand des Beispiels

$$f_n(x) = n^2 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \qquad \text{in } I = [0,1],$$

dass der Satz über die gliedweise Differentiation falsch wird, wenn anstelle der gleichmäßigen Konvergenz nur die Konvergenz von $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ vorausgesetzt wird.
Bestimmen Sie insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.

Aufgabe 3

Für $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, berechne man die Summen der Reihen

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Aufgabe 4

Stellen Sie $\arctan x$, $|x| \leq 1$, als Reihe dar, indem Sie von der Reihenentwicklung für $(1+x^2)^{-1}$ (Tipp: Binomische Reihe!) ausgehen.