Freie Universität Berlin **SoSe 2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Dr. Felix Ballani

10. Übung zur Vorlesung „Analysis III“

Ausgabe: 19.06.07 Abgabe: 26.06.07

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie die Richtigkeit von

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f(x^k)\,\mathrm{d}x = f(0) \ \ !$$

Aufgabe 2 (3+3+2+1 Punkte)

Es sei

$$J := \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{1+xy}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

(a) Zeigen Sie durch Entwicklung des Integranden in eine geometrische Reihe

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \quad !$$

(Verwenden Sie geeignete Konvergenzsätze zur Vertauschung von Integration und Summation!)

(b) Substituieren Sie nun in J

$$x = x(u) := -\frac{1}{y}(1 - \sqrt{1+2uy+y^2}),$$

und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge! Begründen Sie, dass diese Vertauschung möglich ist, und schließen Sie auf

$$J = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+2uy+y^2} \right) \mathrm{d}u = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \mathrm{d}u \ \ !$$

(c) Berechnen Sie J mit Hilfe der Substitution $u = -\cos(2\alpha)$!

(d) Zeigen Sie mit (a), (c) und einer geeigneten Reihenmanipulation $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$!

Aufgabe 3 (2+1 Punkte)

Sei $1 \le p < q < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt Funktionen $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_q(\mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_p(\mathbb{R})$.
(Tipp: Versuchen Sie es mit Funktionen vom Typ x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$!)

(b) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt, und gilt $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, so gilt auch $f \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)$.

Bitte die Lösungen der Aufgaben bis zum Dienstag, dem 26.06.07, 17.30 Uhr, in das Fach (7B) von Felix Ballani in der Arnimallee 3, 1. Stock, legen.