Freie Universität Berlin **SoSe 2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Dr. Felix Ballani

8. Übung zur Vorlesung „Analysis III"

Ausgabe: 05.06.07 Abgabe: 12.06.07

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Körper K mit der Massendichte $\mu : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty[$. Dann sind seine Masse m und seine Schwerpunktkoordinaten (x_K, y_K, z_K) gegeben durch

$$\begin{aligned} m &= \int_K \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z), \\ x_K &= \frac{1}{m}\int_K x\,\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z), \\ y_K &= \frac{1}{m}\int_K y\,\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z), \\ z_K &= \frac{1}{m}\int_K z\,\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z). \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt (x_K, y_K, z_K) der Halbkugel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}, \quad R > 0,$$

für $\mu(x,y,z) = az$, $a > 0$!

Aufgabe 2 (1+2+2)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) : \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x)$, Lebesgue-integrierbar ist! Gehen Sie dabei entlang der folgenden Schritte vor!

(a) Es sei $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine (wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ existierende) Nummerierung der rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$, d. h. $(q_k)_{k\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ sei $U_k :=]q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}[$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ eine Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit einer Länge nicht größer als ε ist!

(b) Konstruieren Sie mit Hilfe von (a) eine Funktion $\varphi \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R})$, die $\varphi \geq f$ und $\int_\mathbb{R} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$ erfüllt!

(c) Zeigen Sie mit (b) und einer geeigneten Funktion aus $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R})$ die Abschätzung

$$0 \leq \int_* f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int^* f(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \quad !$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := x \cdot \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x)$, Lebesgue-integrierbar ist, und bestimmen Sie $\int_\mathbb{R} f(x)\,\mathrm{d}x$!

Bitte die Lösungen der Aufgaben bis zum Dienstag, dem 12.06.07, 17.30 Uhr, in das Fach (7B) von Felix Ballani in der Arnimallee 3, 1. Stock, legen.