Freie Universität Berlin **SoSe 2007**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Dr. Felix Ballani

5. Übung zur Vorlesung „Analysis III“

Ausgabe: 15.05.07 Abgabe: 22.05.07

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es seien $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 5\}$ und

$$K := W((0,0)^T, 2) \,\cup\, W((2,0)^T, 2) \,\cup\, W((0,2)^T, 2),$$

wobei $W(a, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\|_\infty \le \varepsilon\}$ ein achsenparalleles Quadrat mit Mittelpunkt a und Seitenlänge 2ε ist.
Bestimmen Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit kompaktem Träger in U, so dass $0 \le f \le 1$ und $f|K = 1$ gilt!

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

(a) Seien a_{ij}, b_k, $c \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Berechnen Sie den zum Differentialoperator

$$L := \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_k b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c$$

adjungierten Differentialoperator L^* !

(b) Zeigen Sie: Für jeden linearen Differentialoperator L in U gilt $(L^*)^* = L$!

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Die vierdimensionalen Polarkoordinaten $(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi)$ stehen mit den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) in folgender Beziehung:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi) = r\, \sin\vartheta_1\, \sin\vartheta_2\, \cos\varphi \\
x_2 &= x_2(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi) = r\, \sin\vartheta_1\, \sin\vartheta_2\, \sin\varphi \\
x_3 &= x_3(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi) = r\, \sin\vartheta_1\, \cos\vartheta_2 \\
x_4 &= x_4(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi) = r\, \cos\vartheta_1.
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie den Maßtensor (g_{ij}) der Transformation $(r, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$!

(b) Bestimmen Sie den Laplace-Operator in vierdimensionalen Polarkoordinaten!

Bitte die Lösungen der Aufgaben bis zum Dienstag, dem 22.05.07, 17.30 Uhr, in das Fach (7B) von Felix Ballani in der Arnimallee 3, 1. Stock, legen.