Freie Universität Berlin **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

Lösungen der Probeklausur zur Vorlesung „Analysis I“

Aufgabe 1

Induktionsanfang: $n = 1$

$$1 = (-1)^2 1^2 = (-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\
&\overset{Ind.vor.}{=} (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \\
&= (-1)^{n+2} \left((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= (-1)^{n+2} \left((n+1) \left((n+1) - \frac{n}{2} \right) \right) \\
&= (-1)^{n+2} \left((n+1) \left(\frac{2n+2-n}{2} \right) \right) \\
&= (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Eine Folge reeller Zahlen heißt Cauchy-Folge, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(5-n)^2}{4n^3 - 2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{25 - 10n + n^2}{4n^3 - 2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(\frac{25}{n^3} - \frac{10}{n^2} + \frac{1}{n})}{n^3(4 - \frac{2}{n^3})} = \frac{0 - 0 + 0}{4 - 0} = 0.
\end{aligned}$$

(b) Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

Sei $a_n := \frac{2^n}{n!}$. Ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Wir überprüfen die Konvergenz der Reihe mit dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3} < 1 \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Somit konvergiert die Reihe und die Behauptung folgt.

Aufgabe 4

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe mit $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Aufgabe 5

(a) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium:

$$\frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1$$

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium:

Sei $a_n := \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ und $b_n := \frac{1}{a_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Es ist also $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die harmonische Reihe, von der wir wissen, dass sie divergiert, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Außerdem ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = b_{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, das $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

Nach dem Leibnizkriterium ist also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent.

Aufgabe 6

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt.

Aufgabe 7

Falls $F(a) = a$ oder $F(b) = b$, sind wir fertig.

Nehmen wir also an, dass $F(a) \neq a$ und $F(b) \neq b$. Wir definieren uns eine Hilfsfunktion $H : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $H(x) := F(x) - x$.
H ist in $[a, b]$ stetig, weil F und die Identität $x \mapsto x$ es sind. Da nach Voraussetzung $F([a, b]) \subset [a, b]$, gilt $F(a) > a$ und $F(b) < b$ (wir betrachten ja hier den Fall $F(a) \neq a$ und $F(b) \neq b$). Damit folgt für H:

$$\begin{aligned} H(a) &= F(a) - a > 0 \\ H(b) &= F(b) - b < 0 \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert nun ein $x_0 \in]a, b[$ mit $H(x_0) = 0$. Dass bedeutet aber gerade, dass $F(x_0) = x_0$.