Freie Universität Berlin **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

3. Übung zur Vorlesung „Analysis I"

Ausgabe: 09.05.06 Abgabe: 16.05.06

Aufgabe 1

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2n-1}{2+n}$. Zeigen Sie anhand der Definition, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ und bestimmen Sie für $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-5}$ jeweils das kleinstmögliche $n_0(\epsilon)$, so dass

$$\left|\frac{2n-1}{2+n} - 2\right| < \epsilon \quad \text{für } n \geq n_0(\epsilon).$$

Aufgabe 2

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Mittelwerte, $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$, gegen a konvergiert. Benutzen Sie dazu die Grenzwertdefinition.

(b) Zeigen Sie an einem geeigneten Gegenbeispiel, dass die Umkehrung nicht immer gilt.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert oder zeigen Sie, dass die Folge divergiert.

(a) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$

(b) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{-k}$

(c) $a_n = \frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2}$

(d) $a_n = \left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3\cdot 10^n+5}\right)^{1/2}$

(e) $a_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k$

(f) $a_n = \frac{2n^2-1}{n+2}$

Aufgabe 4

Seien a und b reelle Zahlen. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_0 := a, \quad a_1 := b, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 2.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.