Freie Universität Berlin **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

12. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Ausgabe: 11.07.06 Abgabe: 18.07.06

Dieser Übungszettel ist freiwillig und kann noch zum Punktesammeln genutzt werden.

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2+x}{e^x-1}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\alpha^\beta (ax+b)\,dx, \qquad a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha < \beta,$$

mittels Riemannscher Summen.

Aufgabe 3

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$. Eine komplexwertige Funktion

$$f = f_1 + i f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}),$$

heißt Riemann-integrierbar, wenn sowohl f_1 als auch f_2 Riemann-integrierbar sind, und man setzt

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f_1(x)dx + i \int_a^b f_2(x)dx.$$

Zeigen Sie: Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, so ist auch $|f|$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int x^2 \sin(2x)\, dx$,

(b) $\int \cos x \sin(2x)\, dx$,

(c) $\int x^2 e^{\lambda x}\, dx$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(d) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx$.