Freie Universität Berlin **SS 2006**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Konrad Polthier, Anja Krech

10. Übung zur Vorlesung „Analysis I“

Ausgabe: 27.06.06 Abgabe: 04.07.06

Aufgabe 1

Es seien $z = -1 + i$ und $\zeta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Berechnen Sie

$$z + \zeta, \quad z\zeta, \quad z^{-1}, \quad \zeta^{-1}, \quad \frac{z}{\zeta}, \quad \frac{\zeta}{z},$$

stellen Sie die Ergebnisse in der Form $x + iy$ und $re^{i\phi}$ dar und skizzieren Sie ihre Lage in der komplexen Ebene.

Aufgabe 2

In $\mathbb{C}$ betrachte man die von dem Parameter $c \in \mathbb{R}$ abhängenden Geraden

$$g_c := \{z \in \mathbb{C} \, : \, \mathrm{Re}(z) = c\}, \qquad h_c := \{z \in \mathbb{C} \, : \, \mathrm{Im}(z) = c\}.$$

Bestimmen Sie die Bilder dieser Geraden unter der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Zeichnen Sie die Kurven

$$\exp(g_c) \qquad \text{für } c = -2, -1, 0, \tfrac{1}{2}, 1, 2;$$

$$\exp(h_c) \qquad \text{für } c = \tfrac{k\pi}{2}, \; k = 0, 1, \ldots, 15.$$

Aufgabe 3

Es sei x eine reelle Zahl und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Die Punkte $A_k^{(n)}$ auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene seien wie folgt definiert:

$$A_k^{(n)} := e^{i\frac{k}{n}x}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Sei L_n die Länge des Polygonzugs $A_0^{(n)} A_1^{(n)} \ldots A_n^{(n)}$, d. h.

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)} - A_{k-1}^{(n)}|.$$

Beweisen Sie

(a) $L_n = 2n|\sin \frac{x}{2n}|$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n \sin \frac{x}{2n}\right) = x$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Man berechne die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = (\arccos \sqrt{x})^{-1}, \qquad 0 \leq x \leq 1,$

(b) $f(x) = \ln(e^x \ln x), \qquad x > 1,$

(c) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}, \qquad x > 1,$

(d) $f(x) = x^{(x^x)}, \qquad x > 0.$