

# Einführung in die Mathematikdidaktik

28.10.08

# Einführung in die Mathematikdidaktik

Anmeldung:

- Bachelor: Campusmanagement (bis 31.10.08)  
(gewünscht auch über KVV)
- Lehramt (Staatsexamen): KVV

Abmeldungen bis zum 31.10.08 !

# Einführung in die Mathematikdidaktik

## Literatur:

- Friedrich Zech  
Grundkurs Mathematikdidaktik  
Beltz Verlag, 10. Auflage 2002, ISBN 3-407-25216-1
- Hans Joachim Vollrath  
Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe  
Spektrumverlag 2001, ISBN 3-8274-1169-6
- Rahmenlehrplan Mathematik für die Sekundarstufe I  
Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport 2006
- Ausgewählte Folien auf der Homepage der Didaktik

Das Thema Ihrer nächsten Unterrichtseinheit heißt  
Satz des Pythagoras.

1. Benennen Sie mögliche Zielsetzungen Ihres Unterrichts.
2. Klassifizieren Sie Ihre Zielsetzungen (soweit möglich) nach Verhaltensdimensionen.
3. Geben Sie zu einer Auswahl Ihrer Zielsetzungen konkrete Beispiele von Unterrichtsinhalten und ggf. – methoden an.

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

1. Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren
2. Kenntnis von Sachverhalten
3. Beherrschung von inhaltlichen und formalen Verfahren
4. Analyse und einfache Anwendung
5. Synthese und eigentliches Problemlösen
6. Bewerten

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

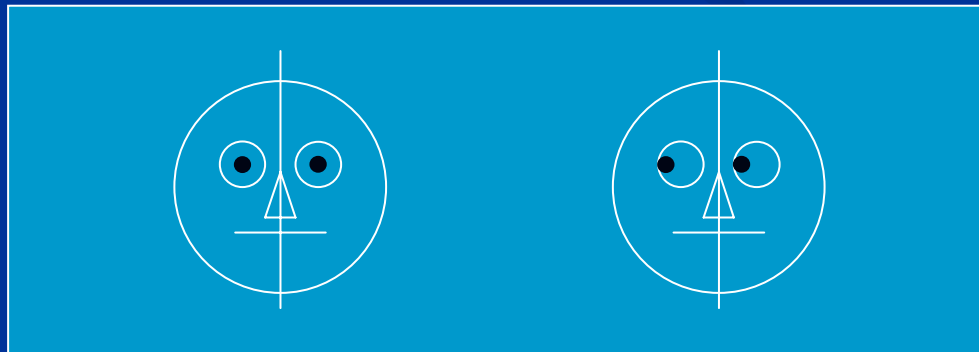
1. Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 1. Verständnis von **Begriffen**, Sätzen und Verfahren

### Beispiele:

- Beispiele von Nichtbeispielen unterscheiden können
- eigene Beispiele angeben können
- definieren können
- ...



# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

1. Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren



# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 1. Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren

### Beispiele:

- der mathematischen Argumentation folgen können
- einen mathematischen Sachverhalt
  - in eigenen Worten wiedergeben können
  - in eine graphische oder symbolische Form übertragen können
  - an einem Spezialfall demonstrieren können
- ...

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 1. Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren

### Beispiele:

- die einzelnen Schritte von
  - Rechnungen
  - Konstruktionen
  - Beweisenan einem Beispiel erläutern können
- ...

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 1. Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren

### Beispiele:

- die einzelnen Schritte von
  - Rechnungen
  - Konstruktionen
  - Beweisenan einem Beispiel erläutern können
- ...

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 1. Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren



Alle geistigen Grundtechniken wie Vergleichen, Ordnen, ... sind hierbei in wechselndem Maße angesprochen.

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 2. Kenntnis von Sachverhalten

**Beispiele: Kenntnis von**

➤ **Bezeichnungen und Symbolen**

(z.B. IN,  $\pi$ , ...)

➤ **Fachausdrücken und Vereinbarungen**

(z.B. „Ungleichung“, „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“, ...)

➤ **Fakten**

(z.B. Quadratzahlen bis  $20^2$ , kleines Einmaleins, ...)

➤ **Definitionen, Sätzen, Gesetzen und Formeln**

(z.B. Eine Raute ist ... , Winkelsummensatz für das Dreieck, Kommutativgesetz, binomische Formeln, ...)

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 2. Kenntnis von Sachverhalten



Hier ist angesprochen, was Schüler nicht nur verstanden, sondern darüber hinaus auch mehr oder weniger auswendig wissen sollten.

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Unterrichts nach Bloom

1. Kenntnis
2. Verständnis
3. Anwenden
4. Analyse
5. Synthese
6. Bewertung

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

1. Verständnis

Nehmen Sie zu den beiden unterschiedlichen Zielsetzungen in der Eingangsphase der Lernprozesse Stellung.

2. Kenntnis

3. Anwenden

Nennen Sie zu beiden Varianten eine mögliche Unterrichtssituation.

4. Analyse

5. Synthese

6. Bewertung



# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 3. Beherrschung von inhaltlichen und formalen Verfahren

### Beispiele:

#### ➤ Rechenverfahren

(z.B. schriftliches Rechnen, Umgang mit dem Taschenrechner, ... )

#### ➤ algebraische Verfahren

(z.B. Lösen von Gleichungen, ...)

#### ➤ geometrische Verfahren

(z.B. Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal, ...)

#### ➤ logische Grundregeln

(z.B. Verneinungsregel, ...)

#### ➤ heuristische Regeln allgemeiner Art

(z.B. Situationsskizzen anlegen, Spezialfälle untersuchen, ...)

#### ➤ heuristische Regeln inhaltlicher Art

(z.B. Rechenvorteile, zweckmäßige Hauptnennerberechnung, ...)

#### ➤ Beweisverfahren

(z.B. indirekter Beweis, Widerlegen durch Gegenbeispiel, ...)

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 4. Analyse und einfache Anwendung

**Beispiele: Die Fähigkeit,**

➤ zu *formalisieren* (zu *abstrahieren*),

➤ zu *analogisieren*,

➤ zu *vergleichen*

(z.B. Aufgaben verschiedenen Typs zu unterscheiden),

➤ Strukturen aus einfachen Modellen zu *abstrahieren*, *darzustellen* und in anderen Konkretisierungen *wiederzufinden*

(z.B. bei der Einführung der ganzen Zahlen),

➤ logische Beziehungen zwischen vorgegebenen Sachverhalten festzustellen

(z.B. Systematisieren der Vierecke),

➤ Aufgaben eines bestimmten Typs zu lösen (Routineprobleme und –beweise),

➤ Fehler zu finden

(z.B. Rechenfehler, stillschweigende Voraussetzungen, Beweislücken, Beweisfehler, ...),

➤ vorgelegte Lösungen zu vergleichen.

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 4. Analyse und einfache Anwendung

**Beispiele: Die Fähigkeit,**

➤ zu *formalisieren* (zu *abstrahieren*),

➤ zu *analogisieren*,

➤ zu *vergleichen*

(z.B. Aufgaben verschiedenen Typs zu unterscheiden),

➤ Strukturen aus einfachen Modellen zu *abstrahieren*, *darzustellen* und in anderen Konkretisierungen *wiederzufinden*

(z.B. bei der Einführung der ganzen Zahlen),

➤ logische Beziehungen zwischen vorgegebenen Sachverhalten festzustellen

(z.B. Systematisieren der Vierecke),

➤ Aufgaben eines bestimmten Typs zu lösen (Routineprobleme und –beweise),

➤ Fehler zu finden

(z.B. Rechenfehler, stillschweigende Voraussetzungen, Beweislücken, Beweisfehler, ...),

➤ vorgelegte Lösungen zu vergleichen.

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 4. Analyse und einfache Anwendung



Hier sind „einfachere“ Aufgaben angesprochen, die nicht weit von der Grundlage des Gelernten entfernt sind und eher durch *Analysieren* (Zerlegung einer Information in ihre Teile, so dass deren Beziehungen zueinander bzw. ihre Organisation deutlich wird (vgl. Bloom) ) zu lösen sind.

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 5. Synthese und eigentliches Problemlösen

Beispiele: Die Fähigkeit,

- Daten in neuer Weise zu kombinieren  
(z.B. verschiedene Möglichkeiten finden, 27 und 28 zu addieren oder flächeninhaltsgleiche Figuren zu legen, ... ),
- elementare „Lösungsprogramme“ und heuristische Regeln zu kombinieren: Entwickeln eines Lösungsplanes  
(z.B. Sachaufgaben, ...),
- aus Bekanntem logische Schlüsse zu ziehen (deduzieren, folgern, beweisen, begründen, ...),
- eine Aufgabenlösung schriftlich darzustellen oder einen Beweis zu formulieren,
- selbständig Alternativen zu entwickeln  
(z.B. zu variieren, verallgemeinern, ...).

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 5. Synthese und eigentliches Problemlösen



Bei all diesen Fähigkeiten sind vorwiegend *synthetisierende* (d.h. *zusammensetzende*) geistige Fähigkeiten angesprochen, die beim Lösen eigentlicher (d.h. Nichtroutine-) Probleme die Hauptrolle spielen.

# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

## 6. Bewerten



Die Angemessenheit von angewandten Verfahren,  
die Aussagekraft von Ergebnissen,  
die Zweckmäßigkeit von Mathematisierungen prüfen;  
Nichtmathematische Gesichtspunkte bei außermathematischen  
Anwendungen diskutieren (z.B. Verwende ich Auto oder Zug,  
um zu einem Zielort zu kommen?).



# Eine Taxonomie kognitiver Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

1. Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren
2. Kenntnis von Sachverhalten
3. Beherrschung von inhaltlichen und formalen Verfahren
4. Analyse und einfache Anwendung
5. Synthese und eigentliches Problemlösen
6. Bewerten

Ordnen Sie die kognitiven Zielsetzungen Ihres Unterrichts zum Satz des Pythagoras in die obige Taxonomie nach Zech.

Ergänzen Sie Ihre Zielsetzungen so, dass Sie zu jedem der Punkte ein konkretes Beispiel angeben können.

„Lernen in der Schule darf nicht reduziert werden auf die Vermittlung von Kenntnissen und Fertigkeiten, sondern muss die Veränderungen von Einstellungen, Motiven, Werthaltungen und sozialen Verhaltensweisen einschließen.“ (Weinert 1974, S. 50/51)



Sozial – affektive Zielsetzungen des Mathematikunterrichts

# Zuordnung zwischen kognitiven und affektiven Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Zech)

Kognitive Ziele (Fähigkeiten)	Affektive Ziele (Bereitschaften)
Verständnis von Begriffen, Sätzen und Verfahren	Bereitschaft zu genauen Hinhören und <ul style="list-style-type: none"> <li>- -sehen bzw. Beobachten</li> <li>- zum Mit- und Nachdenken</li> <li>- zum Begründen</li> </ul>
Kenntnisse	Bereitschaft zum Behalten, Merken, Auswendiglernen
Beherrschung von Verfahren	Bereitschaft zum Verstehen, <ul style="list-style-type: none"> <li>- zum häufigen Ausführen (Üben, ...)</li> </ul>
Analyse und einfache Anwendung	Bereitschaft zum „Durchdringen“ eines Sachverhaltes, <ul style="list-style-type: none"> <li>- zu Kritik und Kontrolle</li> <li>- sich mit Fehlern auseinanderzusetzen</li> </ul>
Synthese und eigentliches Problemlösen	Problemlösebereitschaft, Durchhaltebereitschaft Bereitschaft zur Selbständigkeit (Zusammenarbeit mit anderen; rationale Argumentationen)

# Thesen zu affektiven und sozialen Zielsetzungen des Mathematikunterrichts:

1. Kognitive Ziele sind untrennbar mit affektiven Zielsetzungen verbunden! (Schaffung von Motivationen!)
2. Je anspruchsvoller die kognitiven Ziele, desto anspruchsvoller sind i.A. die affektiven Ziele.
3. Der Mathematikunterricht sollte versuchen, einen Beitrag zu sozialen Zielen wie Kooperations- und Kommunikationsbereitschaft zu leisten.

# Anmerkungen zum Gebrauch von Taxonomien

1. Kognitive, affektive und psychomotorische Lernziele lassen sich im Unterricht nicht voneinander trennen.  
Trotzdem kann es für die Unterrichtsvorbereitung sinnvoll sein, die Komponenten zunächst zu trennen, um damit den „Gehalt“ eines komplexeren Lernziels genauer erfassen und berücksichtigen zu können.

# Anmerkungen zum Gebrauch von Taxonomien

## 2. Hauptwert der Taxonomie für Unterrichtszwecke:

- Verdeutlichung des ganzen Spektrums möglicher Lernziele in ihrem unterschiedlichen Charakter
- Erleichterung des Setzens eigener Lernziele
- Anregung zu vielfältigen Aufgabenstellungen
- Verhinderung der Einseitigkeit in der Zielsetzung
- Verhinderung zu geringer Beachtung affektiver Lernziele

(Meyer, S.89)

# Anmerkungen zum Gebrauch von Taxonomien

3. Der vorausgegangene Unterricht ist für die taxonometrische Einordnung von Lernzielen sehr maßgeblich:

Was heute ein eigentliches Problem, d.h. eine anspruchsvolle Analyse und Synthese für jemanden ist, kann bald schon eine simple Anwendung sein!

## Beispiel:

Lernziel aus der Kategorie „Beherrschen von Verfahren“:

„Die Schüler sollen die Lösung von quadratischen Gleichungen beherrschen.“



Die Schüler verstehen ein Lösungsverfahren und können dies in unterschiedlichen Beispielen geläufig anwenden.



Man weiß *in etwa*, wann dieses Lernziel erreicht ist.

Qualität ?

Niveau? – Hilfsmittel? – Anzahl / Zeit?



# Operationalisierung mathematischer Lernziele (nach Mager)

„Präzisierung eines Lernziels als kontrollierbare Verhaltensweise des Lernenden“

1. Die Beschreibung des Lernziels als *Endverhalten* des Lernenden;
2. die *eindeutige Beschreibung* des Endverhaltens;

„Lernzieloperationalisierung im weiteren Sinne“

3. die genauere *Angabe der Voraussetzungen und Bedingungen* des Endverhaltens;
4. die *Angabe eines Beurteilungsmaßstabes* für die Güte des Endverhaltens.

„Lernzieloperationalisierung im engeren Sinne“

# Operationalisierung mathematischer Lernziele (nach Mager)

„Präzisierung eines Lernziels als kontrollierbare Verhaltensweise des Lernenden“

1. Die Beschreibung des Lernziels als *Endverhalten* des Lernenden;  
*Verhalten ist beobachtbar.*

# Operationalisierung mathematischer Lernziele (nach Mager)

„Präzisierung eines Lernziels als kontrollierbare Verhaltensweise des Lernenden“

2. die *eindeutige Beschreibung* des Endverhaltens;

Wichtig ist eine Formulierung, bei der über die Art des Endverhaltens keine Missverständnisse auftreten.

Gebrauch von Verben, die nicht nur die Qualität des Endverhaltens umschreiben

(z.B. *wissen, verstehen, beherrschen, anwenden*),

sondern auch eine konkrete Tätigkeit ausdrücken

(wie z.B. *benennen, beschreiben, unterscheiden, lösen, berechnen, illustrieren*) !

# Operationalisierung mathematischer Lernziele (nach Mager)

„Präzisierung eines Lernziels als kontrollierbare Verhaltensweise des Lernenden“

3. die genauere *Voraussetzungen und Bedingungen* des Endverhaltens;

Angabe zugelassener und nicht zugelassener Hilfsmittel.

# Operationalisierung mathematischer Lernziele (nach Mager)

„Präzisierung eines Lernziels als kontrollierbare Verhaltensweise des Lernenden“

4. die *Angabe eines Beurteilungsmaßstabes* für die Güte des Endverhaltens;

Aus der Angabe soll ggf. hervorgehen, wie viel Zeit dem Lernenden zur Verfügung gestellt wird und wie viel richtige Antworten für das Erreichen des Lernziels erforderlich sind.

## Beispiel:

Lernziel aus der Kategorie „Beherrschen von Verfahren“:

„Die Schüler sollen die Lösung von quadratischen Gleichungen beherrschen.“

Zu Bedingungen 1 und 2:

*Die Schüler bringen quadratische Gleichungen auf die Normalform  $x^2 + px + q = 0$  und lösen diese mithilfe der pq-Formel.*

Bedingung 3 erfordert z.B. Zusätze der Art:

*„ohne Benutzung der Formelsammlung“, „quadratische Gleichungen mit einfachen Brüchen als Koeffizienten“*

Bedingung 4 erfordert z.B. Zusätze der Art:

*Die Schüler lösen sechs von acht Aufgaben der beschriebenen Art in einer halben Stunde.*

*(Letzteres ist hauptsächlich für die Erstellung von Klassenarbeiten u.ä. interessant.)*