

**Einführung in die  
Mathematikdidaktik  
4.11.08**

# Einführung in die Mathematikdidaktik

Seminarunterlagen auf der Homepage der Didaktik:

- Studium
  - Seminarunterlagen
- [www.math.fu-berlin.de/groups/ag-ddm/Studium/Seminarunterlagen.html](http://www.math.fu-berlin.de/groups/ag-ddm/Studium/Seminarunterlagen.html)
- Ggf. Passwort:

# Einführung in die Mathematikdidaktik

Ab dem 18.11.08 benötigte Literatur:

- Rahmenlehrplan Mathematik für die Sekundarstufe I  
Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport 2006

[www.berlin.de/imperia/md/content/sen-  
bildung/schulorganisation/lehrplaene/sek1\\_mathematik.pdf](http://www.berlin.de/imperia/md/content/sen-bildung/schulorganisation/lehrplaene/sek1_mathematik.pdf)

Unter folgender Adresse findet man alle Rahmenlehrpläne:

[www.berlin.de/sen/bildung/schulorganisation/lehrplaene/](http://www.berlin.de/sen/bildung/schulorganisation/lehrplaene/)

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 1. Theorien zur Denkentwicklung

Die Stadientheorie von **Piaget**



Modifikation durch **Aebli**



Modifikation durch **Bruner**

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 1. Theorien zur Denkentwicklung

### Die Stadientheorie von Piaget

#### **Grundgedanke:**

Vollzug der Denkentwicklung in mehreren Stadien, die durch spezifische, im Laufe der Entwicklung immer höhere Denkleistungen gekennzeichnet sind.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 1. Theorien zur Denkentwicklung

### Die Stadientheorie von Piaget

Das Entwicklungsstadium des Denkens wird im weitgehend durch das Alter bestimmt.  
Die Entwicklung vollzieht sich mehr oder weniger „spontan“ (d.h. im wesentlichen ohne von außen geleitete Instruktion) in Auseinandersetzung mit der natürlichen und sozialen Umwelt.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 1. Theorien zur Denkentwicklung

### Die Stadientheorie von Piaget

#### Für diesen Kurs interessante Stadien:

Drei Hauptstadien, die für ein Kind vom Vorschulalter bis zum Ende der Schulzeit charakteristisch sind.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 1. Theorien zur Denkentwicklung

### Die Stadientheorie von Piaget

#### Für diesen Kurs interessante Stadien:

Drei Hauptstadien, die für ein Kind vom Vorschulalter bis zum Ende der Schulzeit charakteristisch sind.

präoperatives  
Stadium

Stadium  
konkreter  
Operation

Stadium  
formaler  
Operation



# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 1. präoperatives Stadium

- charakteristisch vor allem für das Vorschulkind (ca. 2 – 6 Jahre)
- „Stadium der anschaulichen bzw. präoperatorischen Intelligenz“ (Piaget)



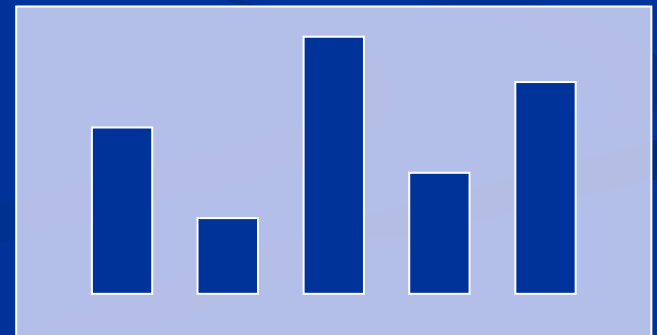
Starke Bindung des Denkens an konkrete Handlungen und unmittelbare Anschauung



[www.kindersache.de](http://www.kindersache.de)

Aufgabe:

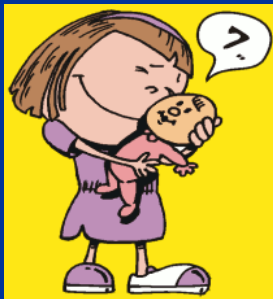
Mehrere Objekte der Größe entsprechend sortieren.



(Zech, S.90)

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

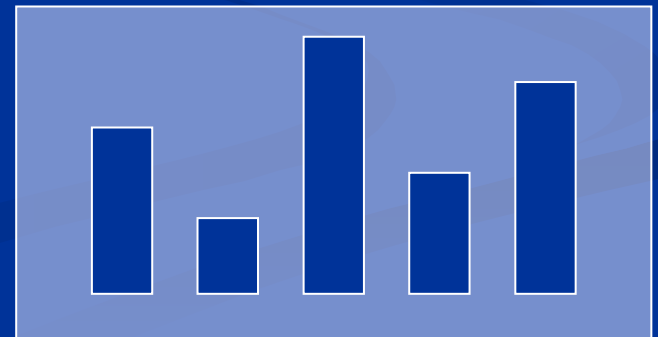
## 1. präoperatives Stadium



[www.kindersache.de](http://www.kindersache.de)

Aufgabe:

Mehrere Objekte der Größe entsprechend sortieren.



(Zech, S.90)

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

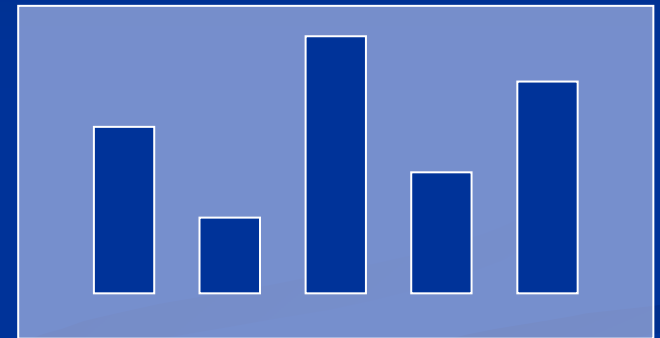
## 1. präoperatives Stadium



www.kindersache.de

Aufgabe:

Mehrere Objekte der Größe entsprechend sortieren.



(Zech, S.90)



Nötige Vergleichsoperationen können noch nicht rein *gedanklich* zusammengefügt werden.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 1. präoperatives Stadium

Versuch: Eine Plastilinkugel wird zu einer Wurst geformt.



Vollzogene Handlungen können noch nicht *in Gedanken* umgekehrt werden.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 2. Stadium der konkreten Operation

- charakteristisch vor allem für das Grundschulkind (ca. 7 – 11 Jahre)
- immer noch Bindung an konkrete Vorstellungen (d.h. an die unmittelbare Anschauung oder zuvor gemachte Erfahrungen), aber Kennzeichnung durch größere Beweglichkeit.



Denkhandlungen werden „kompositionsfähig“ (zusammensetzbar) und „reversibel“ (umkehrbar) und damit nach Piaget zu „Operationen“.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 2. Stadium der konkreten Operation

- das Kind kann die „Reihung“ bei der Streifenaufgabe vornehmen,
- die Mengeninvarianz bei dem Plastilinversuch wird erkannt.

### **Grenzen dieses Denkstadiums:**

Meist können Aufgaben der folgenden Art noch nicht ohne anschauliche Hilfsmittel gelöst werden:

„Hans ist größer als Heinz, Hans ist kleiner als Horst.

Wer ist der kleinste?“

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## 3. Stadium der formalen Operation

- dieses Stadium wird nach Piaget erst ab ca. 11 – 12 Jahren erreicht,
- die Kinder stehen am Beginn des hypothetisch-deduktiven Denkens:  
„Wenn das und das gilt ..., dann gilt das ....“
- allmähliche Befähigung zum rein formal-abstrakten Schließen aufgrund von Annahmen (ohne auf die Anschauung oder Erfahrungen Bezug zu nehmen)



Voraussetzungen zur Bewältigung typischer Situationen fortgeschrittener Mathematik

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Typische Situationen fortgeschrittener Mathematik

- Formales Schließen:

Wenn  $a < b$  und  $b < c$ , dann  $a < c$ .

- Hypothetische Überlegungen (ohne Rücksicht auf Realisierungsmöglichkeiten):

Für 72 Cent bekommt man

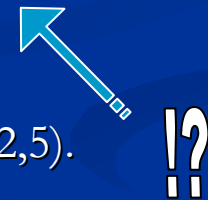
3 Eier.

Für 1 Cent bekäme man

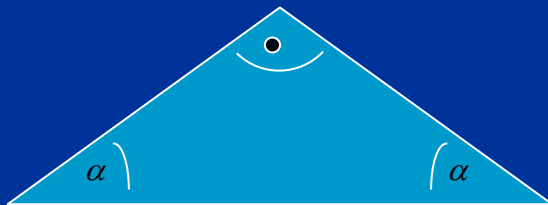
$3/72$  Eier.

Für 3 Euro bekommt man

$300 \times 3/72$  Eier (=12,5).



- Deduktives Schließen:



- $2\alpha + 90^\circ = 180^\circ$

- $2\alpha = 90^\circ$

- $\alpha = 45^\circ$



# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Die Stadien der Denkentwicklung nach Piaget

ungefähres Alter	Stadium	Denkleistung
2-6 Jahre	prä-operatorisch	an konkrete Handlung und unmittelbare Anschauung gebunden; nicht kompositionsfähig, nicht reversibel
7-11 Jahre	konkrete Operationen	an konkrete Vorstellung gebunden; kompositionsfähig, reversibel
ab 12 Jahren	formale Operationen	nicht mehr an konkrete Vorstellung gebunden; formal-abstrakt, deduktiv, hypothetisch

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Die Stadien der Denkentwicklung nach Piaget



Die Altersangaben sind nur als grobe Durchschnittswerte zu verstehen mit individuell erheblichen Abweichungsmöglichkeiten!



Die prinzipielle Aufeinanderfolge solcher Stadien mit typischen Denkleistungen hat sich jedoch immer wieder (auch in späteren Untersuchungen) bestätigt (z.B. Montada, Seiler, Gagné, Bauersfeld).

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Die Stadien der Denkentwicklung nach Piaget



### Modifikation durch Aebli

- Die Piagetschen Stadien werden zwar als notwendige Aufeinanderfolge von Schritten der Denkentwicklung betrachtet, in vielfacher Hinsicht jedoch *unabhängig* vom Lebensalter!
- Wenn gewisse Faktoren wie Anschaulichkeit oder handelndes Lernen für Kinder größere Bedeutung als für Erwachsene haben, sind dies rein *graduelle Unterschiede*.



Vermutung:

„Je neuer ein Denkinhalt für den Erwachsenen ist, desto mehr Anschaulichkeit braucht auch er für das Verständnis.“

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

Die Stadien der Denkentwicklung nach **Piaget**



Modifikation durch **Aebli**

Entwicklung wird letztlich als Summe von Lernprozessen angesehen: Spontanen, ungeordneten Lernprozessen in Familie und Alltag einerseits und gesteuerten Lernprozessen in der Schule andererseits.



Der pädagogische Spielraum erscheint bei Aebli wesentlich größer als bei Piaget!

Nehmen Sie zu dieser Aussage Stellung.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

Aebli interessierte sich für die didaktische Frage, ob und wie Denkoperationen im Sinne Piagets, also mit besonderer innerer Beweglichkeit (Kompositionsfähigkeit, Reversibilität) aufgebaut, gefördert und gefestigt werden können.

Beispiel: „*Addition natürlicher Zahlen*“

Diese Denkoperation ist nach Piaget und Aebli erworben, wenn ihre

- Kompositionsfähigkeit (also Kommutativität und Assoziativität) sowie ihre
- Reversibilität (also Umkehrbarkeit durch die Subtraktion) erfasst ist und beweglich angewendet werden kann.

Das bedeutet, der Schüler kann den Lösungsweg einer Additionsaufgabe variieren und kontrollieren.

$$\text{z.B. } 4 + 3 + 6 = 6 + 4 + 3$$

$$10 + 3 = 13 \quad \text{Probe: } 13 - 3 = 10$$

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

Aeblis operative Methode

```
graph TD; A[Aeblis operative Methode] --> B[Verinnerlichung der Operation]; A --> C[operative Durcharbeitung]; B --> D[konkrete Stufe]; B --> E[figurale Stufe]; B --> F[symbolische Stufe];
```

Verinnerlichung  
der Operation

operative  
Durcharbeitung

konkrete  
Stufe

figurale  
Stufe

symbolische  
Stufe

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

Beispiel: „*Addition natürlicher Zahlen*“

## Verinnerlichung



[www.ak-grundschule.de](http://www.ak-grundschule.de)

### ▪ **Konkrete Stufe:**

Arbeit mit konkreten Materialien, z.B. Zusammenstecken einer Sechserstange und einer Viererstange aus Steckwürfeln.



[www.ak-grundschule.de](http://www.ak-grundschule.de)

### ▪ **Figurale Stufe:**

Zeichnerische Darstellung durch Streifen aus Quadraten.

### ▪ **Symbolische Stufe:**

Darstellung durch Ziffern und Operationszeichen.

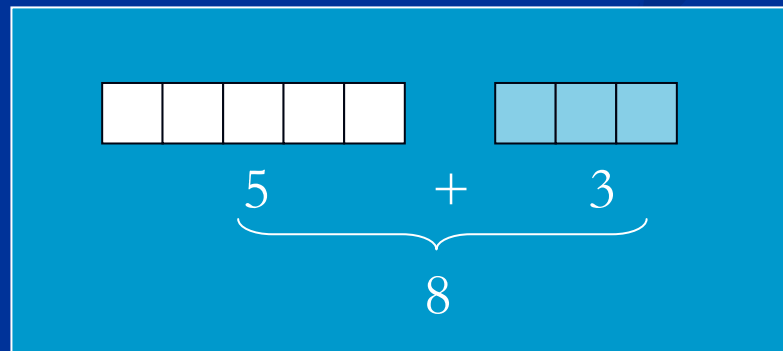
$$4 + 5 = 9$$

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Verinnerlichung

Bei der schriftlichen Fixierung sollten die verschiedenen Darstellungsweisen möglichst dicht zusammengebracht werden und einander zugeordnet werden.

Ein Beispiel: Ich füge 5 Würfel und 3 Würfel zusammen.  
Wie viele Würfel erhalt ich?



Ich erhalte insgesamt 8 Würfel.



# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Verinnerlichung

Unterstützung durch vorwegnehmende und nachträgliche **Verbalisierung der Handlungen.**

Es soll zu einem **Prozess innerhalb des Lernenden** kommen, der ihn durch **ständige eigene Reflexion** über seine Handlung und anschauliche Wahrnehmung zu einer eigenen Vorstellung führt.

## Didaktischer Hinweis:

Bei auftretenden Schwierigkeiten kehre der Lehrer zu einer früheren Stufe zurück.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operatives Durcharbeiten:

Variables, sinnbezogenes Üben, das der **Vertiefung des Verständnisses** dient.



Wiederholtes Durchdenken der Operation auf der Grundlage deren ursprünglicher Bedeutung.

### Beispiele zur Addition:

- Was ändert sich das Ergebnis, wenn wir eine Zahl um 2, 3 erhöhen?
- Was ergibt sich, wenn wir bei  $3 + 5$  die beiden Zahlen vertauschen?
- Wie kann man das Ergebnis überprüfen da „zusammenkommen“?
- Denkt Euch Situationen aus!
- Können wir das auch anders notieren (z.B. mit Kringeln, Strichlisten)?

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operatives Durcharbeiten:

Variables, sinnbezogenes Üben, das der **Vertiefung des Verständnisses** dient.



Wiederholtes Durchdenken der Operation auf der Grundlage deren ursprünglicher Bedeutung.



Förderung z.B. durch Veränderung der ursprünglichen Situation in mehrere Richtungen.

- Wie ist das, wenn ... ?
- Was bedeutet das ... ?
- Wie ändert sich ein Ergebnis, wenn ...?
- Wann bleibt es gleich? Warum bleibt es gleich?

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Beispiele für mathematische Denkoperationen:

- Mengenoperationen (z.B. Vereinigungs- und Schnittmengenbildung)
- Zahlenoperationen (z.B. Addition, Multiplikation)
- Messung von Größen (z.B. Längen- und Flächenmessung)
- ...

Beispiel „Einmaleins“

Ziel: Nicht stereotype Reaktionen sollen hervorgerufen werden, sondern ein bewegliches Gesamtsystem, innerhalb dessen die Operationen in vielfältiger Beziehung zueinander stehen – die *Gruppierung* der Grundrechenarten.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

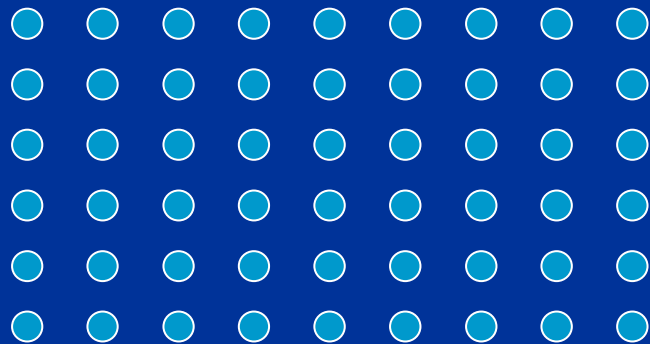
## Beispiel:

$$9 \times 6 = 6 \times 9 = 5 \times 9 + 1 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9;$$

$$9 \times 6 = 10 \times 6 - 1 \times 6$$

$$9 \times 6 = 5 \times 6 + 4 \times 6$$

$$9 \times 6 = 18 \times 3 = 3 \times 18$$



$$9 \times 6 = 5 \times 6 + 4 \times 6$$

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

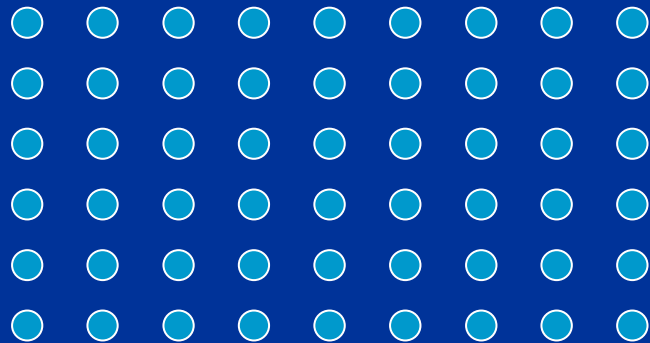
## Beispiel:

$$9 \times 6 = 6 \times 9 = 5 \times 9 + 1 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9;$$

$$9 \times 6 = 10 \times 6 - 1 \times 6$$

$$9 \times 6 = 5 \times 6 + 4 \times 6$$

$$9 \times 6 = 18 \times 3 = 3 \times 18$$



$$9 \times 6 = 5 \times 6 + 4 \times 6$$

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien



Modifikation durch **Bruner**

Die Denkentwicklung vollzieht sich nicht auf zeitlich abgestuften Denkniveaus, sondern gleichzeitig auf verschiedenen „**Darstellungsebenen**“, die in starker Wechselwirkung zueinander stehen.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Theorie der Darstellungsebenen nach Bruner

Bruner unterscheidet drei Darstellungsebenen (Repräsentationsmodi), auf denen sich dem Mensch die Umwelt erschließen kann:

- die **enaktive** Darstellung, d.h. die Erfassung von Sachverhalten durch eigene Handlungen (mit konkretem Material);
- die **ikonische** Darstellung, d.h. die Erfassung von Sachverhalten durch Bilder (auch „innere Bilder“) oder Graphiken;
- die **symbolische** Darstellung, d.h. die Erfassung von Sachverhalten durch verbale Mitteilung oder im Zeichensystem (z.B. im mathematischen).



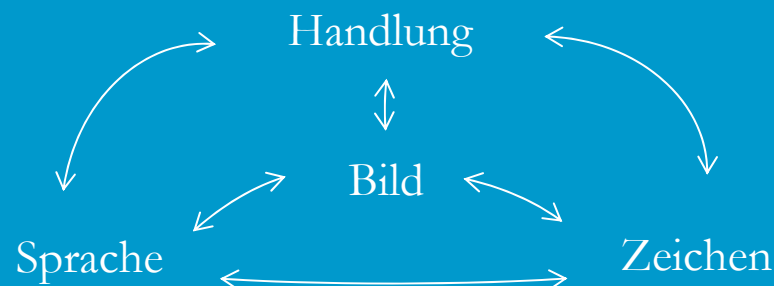
# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Theorie der Darstellungsebenen nach Bruner

Denkentwicklung ist nach Bruner eine immer bessere Koordination zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen (unter wesentlicher Beteiligung der Sprache).



Wechsel zwischen den Darstellungsebenen!

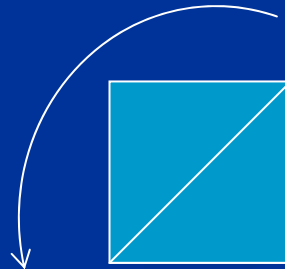


# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Beispiel:

Einführung der Begriffe „ganze Drehung“, „halbe Drehung“, „Vierteldrehung nach links“, „Vierteldrehung nach rechts“.

1. Auf sprachliche Instruktion hin Handlungen ausführen lassen:  
„Mach eine halbe Drehung.“, „Mach eine Vierteldrehung nach links.“, ...
2. Eine Handlung verbalisieren lassen:  
Ein Kind führt eine Drehung aus, ein anderes sagt, um welche Drehung es sich handelt.
3. Eine Handlung ikonisieren lassen. Z.B. wird eine halbe Drehung eines Quadrates dargestellt.



# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Beispiel:

Einführung der Begriffe „ganze Drehung“, „halbe Drehung“, „Vierteldrehung nach links“, „Vierteldrehung nach rechts“.

4. Eine ikonische Drehung enaktivieren:  
„Führt die dargestellte Drehung aus!“
5. Auf eine sprachliche Instruktion hin formalisieren lassen:  
„Schlagt ein Zeichen für eine Vierteldrehung nach rechts vor.“
6. Ein Zeichen verbalisieren lassen:  
Z.B. „Beschreibt die Bedeutung von V1.“

Formulieren Sie zu einem selbst gewählten Thema aus Ihrem Mathematikunterricht jeweils ein Beispiel zu jeder der drei Darstellungsebenen

- enaktiv
- ikonisch
- symbolisch

sowie zu den zugehörigen Übergängen.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

1. Prinzip der Stufengemäßheit

Im Unterricht sollten tendenziell die Stadien der Denkentwicklung nach Piaget von mehr konkret-handelndem Denken zu mehr formal-abstraktem Denken berücksichtigt werden.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

1. Prinzip der Stufengemäßheit
2. Prinzip der Verinnerlichung und Verzahnung der Darstellungsebenen

Der Mathematikunterricht aller Stufen sollte von einer konkret-anschaulichen Darstellung (konkret-handelnd; zeichnerisch-ikonisch; Beispiele, mit denen man anschauliche Vorstellungen verbinden kann) allmählich zu einer abstrakt-symbolischen Darstellung (Fachtermini und mathematische Zeichen verwendend) übergehen.

Ziel: Der Schüler kann mit der abstrakten Formulierung immer noch eine konkrete Vorstellung verbinden.

Die Verinnerlichungsstufen sind daher nicht isoliert voneinander zu durchlaufen, sondern müssen eng miteinander verzahnt werden.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

1. Prinzip der Stufengemäßheit
2. Prinzip der Verinnerlichung und Verzahnung der Darstellungsebenen
  - a) EIS-Prinzip (enaktiv – ikonisch – symbolisch)
  - b) CEIS-Prinzip (EIS-Prinzip + Computer)
  - c) Rückschaltprinzip
  - d) Zwischenschaltprinzip
  - e) Abschirmprinzip

Die Verinnerlichung der Operation kann durch Abschirmung der „unmittelbaren Anschauung“ (insbes., wenn von sehr auffälligen, aber unwesentlichen Merkmalen abzusehen ist) gefördert werden.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

### 3. Prinzip der operativen Durcharbeitung

Eine eingeführte Operation sollte zumindest in dreifacher Weise durch Aufgaben operativ durchgearbeitet („geübt“) werden:

- I) Wiederholtes Zurückkommen auf die ursprüngliche Situation und deren gezielte Veränderung zur Vertiefung der anschaulichen Bedeutung.
- II) Das Wesentliche ist in Zusammenhang mit der Variation unwesentlicher Aspekte hervorzuheben.
- III) Die Eigenschaften der Operation und deren Beziehung zu anderen Operationen sind, z.B. durch vielfaches Zusammensetzen und Umkehren, herauszuarbeiten.



# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

3. Prinzip der operativen Durcharbeitung
  - I. Prinzip der Variation der Darstellungsebenen
  - II. Prinzip der Variation des Unwesentlichen

Das für eine Operation Unwesentliche sollte variiert werden:

- a) Veranschaulichungsmittel
- b) Mathematische Variablen
- c) Art der Anwendungssituation

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

3. Prinzip der operativen Durcharbeitung
  - I. Prinzip der Variation der Darstellungsebenen
  - II. Prinzip der Variation des Unwesentlichen
    - I. Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel

Ein mathematischer Unterrichtsgegenstand sollte, soweit möglich, auf mehrere Weisen verkörpert bzw. veranschaulicht

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

3. Prinzip der operativen Durcharbeitung
  - I. Prinzip der Variation der Darstellungsebenen
  - II. Prinzip der Variation des Unwesentlichen
    - i. Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel
    - ii. Prinzip der mathematischen Variation

Mathematische Variablen, die für einen Begriff nebensächlich sind, sollten vielfach variiert werden!

Beispiel

Begriff „Parallelogramm“:



Variation der Lage der Winkel, der Seiten, der Ausrichtung, ...

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

3. Prinzip der operativen Durcharbeitung
  - I. Prinzip der Variation der Darstellungsebenen
  - II. Prinzip der Variation des Unwesentlichen
    - i. Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel
    - ii. Prinzip der mathematischen Variation
    - iii. Prinzip der Variation des Kontextes bzw. der Anwendungssituation

Nennen Sie ein Beispiel, in welchem die Anwendungssituation oder der Kontext einer Aufgabenstellung variiert wird.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

3. Prinzip der operativen Durcharbeitung
  - I. Prinzip der Variation der Darstellungsebenen
  - II. Prinzip der Variation des Unwesentlichen
    - i. Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel
    - ii. Prinzip der mathematischen Variation
    - iii. Prinzip der Variation des Kontextes bzw. der Anwendungssituation
  - III. Prinzip des operativen Durcharbeitens (im engeren Sinne)

Die eingeführten Operationen sollten in vielfacher Weise zusammengesetzt, verändert, umgekehrt und durch Herstellung vieler Bezüge zu anderen Operationen in umfassendere Systeme integriert werden.

# Entwicklung mathematischen Denkens und operative Prinzipien

## Operative Prinzipien:

3. Prinzip der operativen Durcharbeitung
  - I. Prinzip der Variation der Darstellungsebenen
  - II. Prinzip der Variation des Unwesentlichen
    - i. Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel
    - ii. Prinzip der mathematischen Variation
    - iii. Prinzip der Variation des Kontextes bzw. der Anwendungssituation
  - III. Prinzip des operativen Durcharbeitens (im engeren Sinne)
    - i. Systematisches Verändern der Ausgangssituation und Untersuchen, was diese Veränderung bewirkt
    - ii. Variation des Lösungsweges
    - iii. Variation der gesuchten Größe

Erklären Sie das Prinzip des **operativen Durcharbeitens (im engeren Sinne)** anhand eines selbst gewählten Unterrichtsbeispiels.

### Operative Prinzipien:

3. Prinzip der operativen Durcharbeitung
  - I. Prinzip der Variation der Darstellungsebenen
  - II. Prinzip der Variation des Unwesentlichen
    - i. Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel
    - ii. Prinzip der mathematischen Variation
    - iii. Prinzip der Variation des Kontextes bzw. der Anwendungssituation
  - III. **Prinzip des operativen Durcharbeitens (im engeren Sinne)**
    - i. **Systematisches Verändern der Ausgangssituation und Untersuchen, was diese Veränderung bewirkt**
    - ii. **Variation des Lösungsweges**
    - iii. **Variation der gesuchten Größe**

Geben Sie ein Unterrichtsbeispiel an, in welchem das Prinzip der **mathematischen Variation** angewandt wird und erläutern Sie diese Anwendung.

### Operative Prinzipien:

3. Prinzip der operativen Durcharbeitung
  - I. Prinzip der Variation der Darstellungsebenen
  - II. Prinzip der Variation des Unwesentlichen
    - i. Prinzip der Variation der Veranschaulichungsmittel
    - ii. Prinzip der **mathematischen Variation**
    - iii. Prinzip der Variation des Kontextes bzw. der Anwendungssituation
  - III. Prinzip des operativen Durcharbeitens (im engeren Sinne)
    - i. Systematisches Verändern der Ausgangssituation und Untersuchen, was diese Veränderung bewirkt
    - ii. Variation des Lösungsweges
    - iii. Variation der gesuchten Größe