Proseminar Technische Informatik

Warteschlangen

Inhalt

Was ist eine Warteschlange?

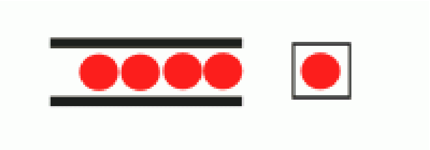
Eine Warteschlange…

- bringt Aufträge in eine geordnete Reihenfolge.
- hat $n \geq 1$ Bearbeitungsstationen.
- hat eine Auftragsrate und Bearbeitungsrate.
- kann zudem zur Analyse eingesetzt werden.

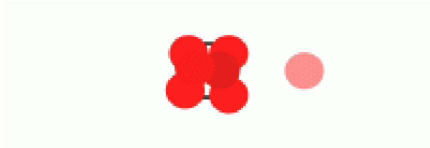
Eine Warteschlange kann dabei auf ganz unterschiedliche Art und Weise funktionieren…

Funktionsarten einer Warteschlange

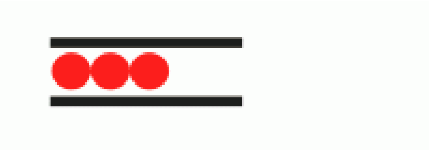
First Come Fist Served



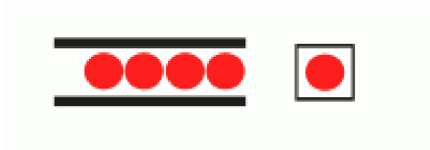
Processor Sharing



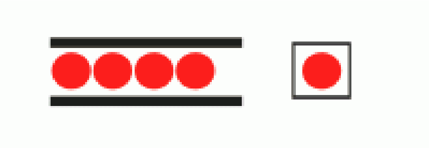
Last Come Fist Served



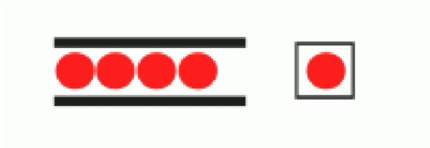
Static Priorities



Service in Random Order



Round Robin



Die Notation von Kendall

Zur genaueren Spezifikation eines Warteschlangenmodells dient die Notation von Kendall:

A/B/m

Was bedeutet zum Beispiel M/D/30 ? LCFS ?

M	- Exponentielle Verteilung
D	- Deterministische Verteilung
30	- 30 Server stehen zur Verfügung
LCFS	- Die Funktionsart muss beachtet werden

Das Markovsche M/M/1 - Modell

M - Exponentielle Verteilung

M - Exponentielle Verteilung

1 - 1 Server ist vorhanden

Wahrscheinlichkeit, dass sich Null Aufträge in der Warteschlange befinden:

$$\pi 0 = 1 - \lambda / \mu$$

Wahrscheinlichkeit, dass k Aufträge in der Warteschlange warten:

$$\pi k = (1 - \rho) * \rho \hat{}k \qquad (\rho = \lambda / \mu)$$

Durchschnittliche Anzahl an Aufträgen:

$$K = \rho / \; 1 - \rho$$

Durchschnittliche Wartezeit:

$$W = \rho / \mu / 1 - \rho$$

Durchschnittliche Warteschlangensystemlänge (Warteschlange + Server):

$$Q = \rho^2 \; / \; 1 - \rho$$

Im Folgenden berechnen wir:
-Die Wahrscheinlichkeit, dass die Warteschlange leer ist
-Die Wahrscheinlichkeit, dass fünf Aufträge warten
-Die durchschnittliche Anzahl an Aufträgen

$\lambda = 0.8$
$\mu = 1.0$

$\pi 0 = 1 - \lambda / \mu$

$\rightarrow \quad \pi 0 = 1 - 0.8 / 1.0$

$\rightarrow \quad \pi 0 = 1 - 0.8$

$\rightarrow \quad \pi 0 = 0.2$

$\rightarrow$ 20 %

Im Folgenden berechnen wir:
-Die Wahrscheinlichkeit, dass die Warteschlange leer ist
-Die Wahrscheinlichkeit, dass fünf Aufträge warten
-Die durchschnittliche Anzahl an Aufträgen

$\pi k = (1 - \rho) * \rho\text{^}k$

$\lambda = 0.8$

$\mu = 1.0$

→ $\pi 5 = (1 - 0.8 / 1.0) * (0.8 / 1.0)\text{^}5$

→ $\pi 5 = 0.2 * 0.8\text{^}5$

→ $\pi 5 = 0.065536$

→ 6.5536%

Im Folgenden berechnen wir:
-Die Wahrscheinlichkeit, dass die Warteschlange leer ist
-Die Wahrscheinlichkeit, dass fünf Aufträge warten
-Die durchschnittliche Anzahl an Aufträgen

$$\lambda = 0.8$$
$$\mu = 1.0$$

$$K = \rho / (1 - \rho)$$

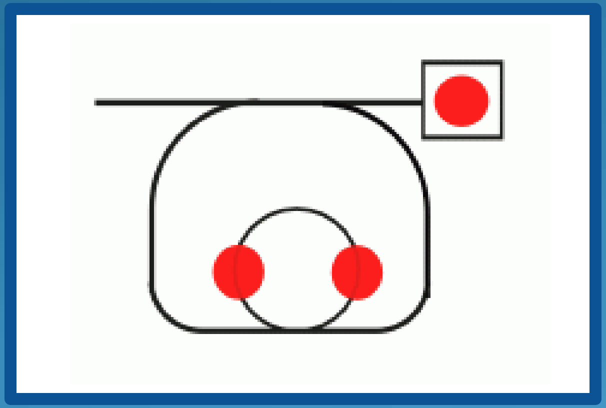
$$\rightarrow \quad K = (0.8 / 1.0) / (1 - (0.8 / 1.0))$$

$$\rightarrow \quad K = 0.8 / 0.2$$

$$\rightarrow \quad K = 4$$

Wiederaufnahmeverfahren

Eine besondere Art der Warteschlangen stellt das Wiederaufnahmeverfahren dar.



- Ist eine Station frei?
- Ja? – Auftrag bearbeiten.
- Nein? – Warteschleife.
- Erneute Anfragen in bestimmten Zeitabständen.

Ein Beispiel?

Wiederaufnahmeverfahren - M/M/1

-Effizienter als normales M/M/1 – Modell?
-Vergleich der durchschnittlichen Wartezeit.

$\lambda = 0.8$
$\mu = 1.0$

$W = \rho / \mu / 1 - \rho$

$\rightarrow \quad W = (0.8/1.0) / 1.0 / (1 - 0.8/1.0)$

$\rightarrow \quad W = 0.8 / 0.2$

$\rightarrow \quad W = 4$

$W = 1/\mu * \rho / (1-\rho) * (1 + \mu/v)$

$\rightarrow \quad W = 1/1.0 * 0.8 / (1-0.8) * (1 + 1.0/1.0)$

$\rightarrow \quad W = 1 * 4 * 2$

$\rightarrow \quad W = 8$

V = 1.0

Fallstudie

Durchgeführt am: 07.01.2010
Uhrzeit: 11.30 bis 14.00 Uhr
Thema: Auslastung der Drucker im Informatik-Institut.

Uhrzeit	Warteschlangenlänge	Zeit für Druck (1 Blatt)
11.30	0	10 Sekunden
11.40	0	
11.50	0	
12.00	3	
12.10	2	
12.20	3	1 Minute
12.30	1	
12.40	0	
12.50	2	20 Sekunden
13.00	2	
13.10	1	
13.20	1	20 Sekunden
13.30	0	
13.40	1	
13.50	0	
14.00	0	

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich höchstens fünf Aufträge in der Druckerwarteschlange befinden?

Dazu müssen wir wissen, welches Modell zu betrachten ist

M/M/m

- M, weil Auftragsverteilung exponentiell.
- M, weil Auftragsdauer exponentiell.
- m = 2, weil 2 Bearbeitungsstationen bereit stehen.

$\lambda = 1.0$
$\mu = 5.0$

$\pi k = \pi 0 * ((\rho\hat{}k * m\hat{}m) / m!)$ für $k > m$

$= \pi 0 * ((m\rho)\hat{}k / k!)$ für $0 < k \leq m$, wobei

$\rho = \lambda / (m\mu)$

$$\pi 0 = \sum_{k=0}^{m-1} (m\rho)\hat{}k/k! + (m\rho)\hat{}m/m! * 1/(1-\rho))\hat{}(-1)$$

$$\rightarrow \pi 0 = \sum_{k=0}^{1} (0.2)\hat{}k/k! + (0.2)\hat{}2/2 * 1/(0.9))\hat{}(-1)$$

$$= 0.803571428 = 80.3571428\ \%$$

$\rightarrow \pi 5 = (0.1\hat{}5 * 2\hat{}2 / 2) * 0.803571428 = 0.000016$

$\rightarrow \pi 4 = (0.1\hat{}4 * 2\hat{}2 / 2) * 0.803571428 = 0.00016$

$\rightarrow \pi 3 = (0.1\hat{}3 * 2\hat{}2 / 2) * 0.803571428 = 0.0016$

$\rightarrow \pi 2 = (0.2\hat{}2 / 2) * 0.803571428 = 0.016$

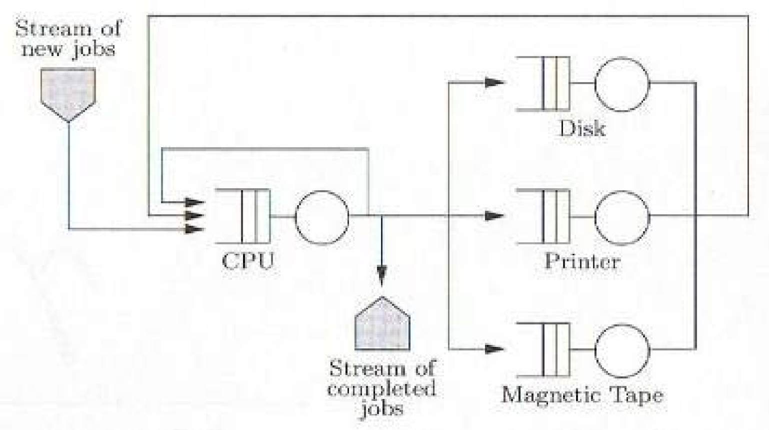
$\rightarrow \pi 1 = (0.2\hat{}1 / 1) * 0.803571428 = 0.16$

0.000016 + 0.00016 + 0.0016 + 0.016 + 0.16 + 0.803 = 0.980776, also 98 %

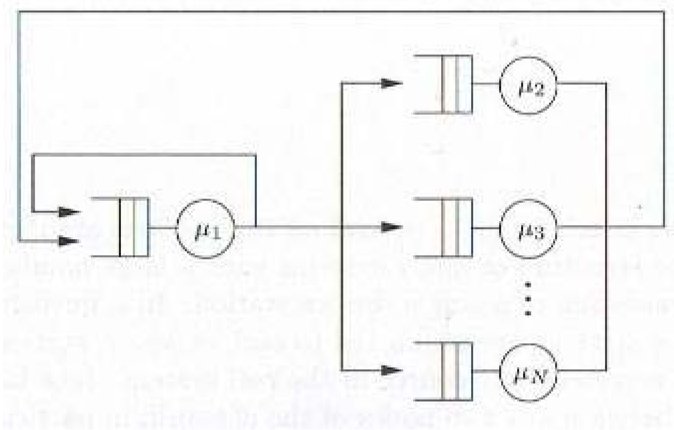
Warteschlangennetzwerke

- Ein Warteschlangennetzwerk verknüpft mehrere Warteschlangen miteinander.
- Zwei unterschiedliche Modelle

Offenes Netzwerk



Geschlossenes Netzwerk



Literatur

1. Performance of Computer Communication Systems
   (A Model-Based Approach)
   Boudewijn R. Haverkort

2. Queuing Networks and Markov Chains
   (Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications)
   (Second Edition)
   Gunter Bolch
   Stefan Greiner
   Hermann de Meer
   Kishor S. Trivedi