РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

На правах рукописи

Гуревич Павел Леонидович

УДК 517.95

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ И ПОЛУГРУППЫ ФЕЛЛЕРА

специальность
01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор А. Л. Скубачевский

Москва — 2008

Оглавление

Введение **4**

Глава I. Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных **24**

1. Некоторые определения и результаты из теории линейных операторов. Функциональные пространства 24
2. Постановка задачи в ограниченной области 28
3. Нелинейные преобразования вблизи начала координат 33
4. Фредгольмова разрешимость нелокальных задач и устойчивость индекса 40

Глава II. Сильные решения нелокальных эллиптических задач в плоских углах в пространствах Соболева **48**

5. Функциональные пространства 48
6. Постановка нелокальной задачи в ограниченной области 59
7. Нелокальные задачи в плоских углах в пространствах Соболева 67

Глава III. Сильные решения нелокальных эллиптических задач в ограниченной области в пространствах Соболева **84**

8. Отсутствие собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ 84
9. Нелокальные задачи в весовых пространствах с малым показателем веса 98
10. Правильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ 104
11. Нелокальные задачи с однородными нелокальными условиями . . 109
12. Примеры 117

Глава IV. Обобщенные решения нелокальных эллиптических задач 121

13. Обобщенные решения нелокальных задач 121
14. Фредгольмова разрешимость нелокальных задач 128
15. Устойчивость индекса при возмущении дифференциального оператора младшими членами 135
16. Устойчивость индекса при возмущении нелокальных условий . . 141
17. Неустойчивость индекса 149

Глава V. Гладкость обобщенных решений нелокальных эллиптических задач 161

18. Сохранение гладкости обобщенных решений 161
19. «Пограничный» случай. Условия согласования 169
20. Нелокальные условия специального вида. Регулярные и нулевые правые части 183
21. Нарушение гладкости обобщенных решений 189
22. Пример 193

Глава VI. Полугруппы Феллера и двумерные диффузионные процессы 205

23. Нелокальные задачи в пространствах непрерывных функций . . 205
24. Ограниченные возмущения диффузионных процессов 218
25. Неограниченные возмущения диффузионных процессов 235
26. Несуществование полугрупп Феллера 254

Литература 281

Введение

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена следующим взаимосвязанным вопросам: разрешимости и гладкости решений эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями и существованию полугрупп Феллера, возникающих в теории многомерных диффузионных процессов.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными условиями, возникающими в гидродинамике, рассматривал еще А. Зоммерфельд [101]. Впоследствии одномерные нелокальные задачи изучали В. А. Ильин [29], В. А. Ильин и Е. М. Моисеев [30], А. Крол [90], М. Пиконе [92], А. Л. Скубачевский [99], Я. Д. Тамаркин [68], А. А. Шкаликов [69] и др.

В 1932 г. Т. Карлеман [76] рассмотрел задачу о нахождении голоморфной функции в ограниченной области G, удовлетворяющей следующему условию: значение неизвестной функции в точке y границы ∂G связано со значением в каждой точке $\Omega(y)$, где $\Omega : \partial G \to \partial G$ — гладкое невырожденное преобразование, $\Omega(\Omega(y)) = y$, $y \in \partial G$. В работе [76] эта задача сводится к сингулярному интегральному уравнению со сдвигом. С такой постановкой задачи связаны дальнейшие исследования сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, отображающим границу области на себя и порождающим конечную группу (подробную библиографию можно найти, например, в книге Н. И. Мусхелишвили [44]), а также работы, в которых изучаются эллиптические уравнения, содержащие сдвиг области на себя (см. монографию А. Б. Антоневича и А. В. Лебедева [71]). Эллиптические уравнения с абстрактными нелокальными краевыми условиями изучались в работах Р. Билза [72], Ф. Браудера [73], М. И. Вишика [7], М. Шехтера [95]. При этом на абстрактные операторы налагались условия, гарантирующие выполнение неравенства коэрцитивности. В ряде случаев накладывались ограничения на сопряженный оператор.

В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский [5] рассмотрели принципиаль-

но иную нелокальную эллиптическую задачу, возникающую в теории плазмы: ищется гармоническая в ограниченной области G функция, удовлетворяющая нелокальным условиям, связывающим значения искомой функции на многообразии $\Gamma_1 \subset \partial G$ со значениями на некотором многообразии, лежащем внутри области G; на множестве $\partial G \setminus \Gamma_1$ ставится условие Дирихле. В случае прямоугольной области эта задача была решена в работе [5] сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и применением принципа максимума. В случае произвольной области и общих нелокальных условий задача была сформулирована как нерешенная [54]. (Укажем также работу А. Крола [90], в которой отмечена важность развития теории нелокальных краевых задач.)

Различные варианты и обобщения нелокальных задач, которые содержат преобразования переменных, отображающие границу в замыкание области, рассматривали А. В. Бицадзе [3,4], А. К. Гущин [25], А. К. Гущин и В. П. Михайлов [26,27], Н. В. Житарашу и С. Д. Эйдельман [28], В. А. Ильин и Е. И. Моисеев [31], К. Ю. Кишкис [33,34], Б. П. Панеях [48], Я. А. Ройтберг и З. Г. Шефтель [52, 53], А. П. Солдатов [66] и др.; при этом особое внимание уделялось разрешимости нелокальных задач. Спектральные свойства нелокальных задач в многомерном случае исследовались Е. И. Моисеевым [42, 43], М. А. Мустафиным [45]. Отметим, что в цитированных работах изучается либо двумерный случай, либо уравнения второго порядка, либо накладываются достаточно жесткие условия на геометрию носителя нелокальных членов (например, предполагается, что носитель нелокальных членов лежит внутри области или имеет пересечение только с той частью границы, где задано «локальное» условие Дирихле).

Основы теории линейных эллиптических уравнений порядка $2m$ с нелокальными краевыми условиями общего вида были заложены в работах А. Л. Скубачевского и его учеников [35, 49, 50, 56, 58, 59, 61–63, 65, 97, 99, 100]: приведена классификация по типу нелокальных условий, доказаны априорные оценки и построены правый и левый регуляризаторы в пространствах Соболева или весовых пространствах (в зависимости от типа нелокальных условий), а также получена асимптотика решений вблизи точек сингулярности. Для ряда задач изучены спектральные свойства и свойства индекса соответствующих операторов. В частности, было показано, что свойства задачи существенным образом зависят от геометрии носителя нелокальных членов. Проиллюстрируем возможные случаи на следующем примере.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ — ограниченная область с границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{K}$, где Γ_σ — открытые связные (в топологии ∂G) $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $\mathcal{K} = \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ — $(n-2)$-мерное связное многообразие без края класса C^∞ (если $n = 2$, то $\mathcal{K} = \{g_1, g_2\}$, где g_1, g_2 — концы кривых $\overline{\Gamma_1}$, $\overline{\Gamma_2}$). Пусть в окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}$ область G диффеоморфна n-мерному двугранному (плоскому, если $n = 2$) углу. Рассмотрим в области G нелокальную задачу

$$\Delta u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_\sigma} - b_\sigma(y) u(\Omega_\sigma(y))|_{\Gamma_\sigma} = 0 \quad (\sigma = 1, 2). \tag{2}$$

Здесь $b_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; Ω_σ — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_\sigma$ многообразия Γ_σ на множество $\Omega_\sigma(\mathcal{O}_\sigma)$ так, что $\Omega_\sigma(\Gamma_\sigma) \subset G$. Точки множества $\mathcal{K}$ назовем точками сопряжения нелокальных краевых условий.

В работах А. Л. Скубачевского предложена следующая классификация:

1. $\Gamma_2 = \varnothing$ и $\Omega_1(\Gamma_1) = \Omega_1(\partial G) \subset G$ (рис. 1);
2. $\Gamma_2 \neq \varnothing$ и $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma}) \cap \mathcal{K} = \varnothing$, $\sigma = 1, 2$ (рис. 2);
3. $\Gamma_2 \neq \varnothing$ и $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma}) \cap \mathcal{K} \neq \varnothing$, $\sigma = 1$ или 2 (рис. 3).

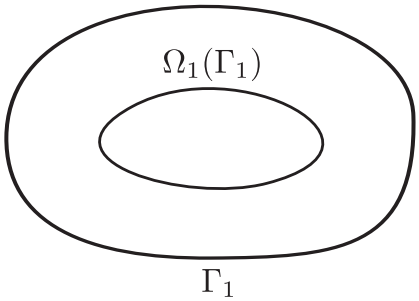

Рис. 1. Область G с границей $\partial G = \Gamma_1$.

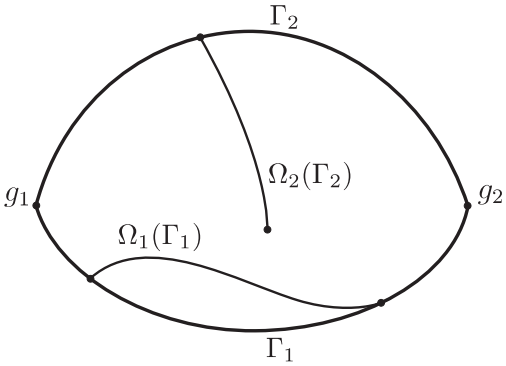

Рис. 2: $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma}) \cap \mathcal{K} = \varnothing$.

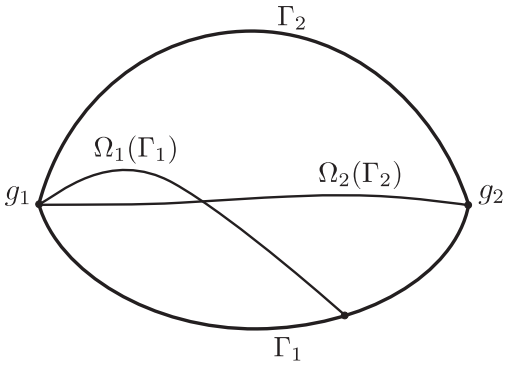

Рис. 3: $\Omega_\sigma(\overline{\Gamma_\sigma}) \cap \mathcal{K} \neq \varnothing$.

Первый класс задач (а также его обобщения на случай абстрактных нелокальных операторов в краевых условиях) является наиболее изученным: свойства нелокальной задачи во многом близки к свойствам соответствующей «локальной» задачи (когда $b_\sigma(y) \equiv 0$). В частности, нелокальная задача фредгольмова в обычных пространствах Соболева и ее индекс равен индексу «локализованной» задачи, а соответствующая задача со спектральным параметром однозначно разрешима при достаточно больших значениях параметра (см. [56, 58, 99]). В случае когда спектр локальной задачи дискретный, нелокальная задача также имеет дискретный спектр, а система ее корневых функций образует базис Абеля в соответствующем пространстве Соболева (см. [49, 50]).

Существенно более сложная ситуация имеет место для второго и третьего классов. Для второго класса нелокальных задач кривая $\Omega_\sigma(\Gamma_\sigma)$ может пересекаться (в том числе касаться) границы области, а в более общем случае даже частично совпадать с границей. Для третьего класса задач считаем, что подход носителя нелокальных членов в точках сопряжения к границе области некасательный, что существенно для используемого в диссертации метода. В работах [59, 100] показано, что в случае пересечения носителя нелокальных членов с границей области решения могут иметь степенные особенности вблизи точек сопряжения краевых условий даже в случае бесконечно гладкой границы и бесконечно дифференцируемой правой части. Поэтому такие задачи рассматривались ранее в специальных весовых пространствах, учитывающих возможные особенности решений. Наиболее удобными при этом оказались пространства В. А. Кондратьева, введенные им при исследовании «локальных» краевых задач в областях с угловыми или коническими точками. В работах [35, 59, 62, 63] доказана фредгольмова разрешимость нелокальных задач в пространствах В. А. Кондратьева, а в работе [97] показано, что если носитель нелокальных членов не пересекается с точками сопряжения краевых условий (рис. 2), то индекс нелокальной задачи равен индексу соответствующей локальной; в противном случае (рис. 3) это, вообще говоря, уже неверно.

Отметим, что нелокальные эллиптические задачи с касательным подходом кривой $\Omega_\sigma(\Gamma_\sigma)$ к границе области в точках сопряжения краевых условий в отдельных случаях изучались в работах [4, 34] методами теории функций комплексного переменного, однако общая теория нелокальных краевых задач в этом случае не развита.

Независимо от упомянутых работ, нелокальные эллиптические задачи воз-

никли в теории многомерных диффузионных процессов, описывающих с вероятностной точки зрения поведение частицы в области G. В работах [78, 79] В. Феллер показал, что всякому одномерному ($n = 1$) диффузионному процессу соответствует некоторая сильно непрерывная неотрицательная сжимающая полугруппа в пространстве $C(\overline{G})$ или некотором его подпространстве. Впоследствии такие полугруппы получили название *полугрупп Феллера*. Кроме того, В. Феллер получил необходимые и достаточные условия того, что обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка является генератором (инфинитезимальным производящим оператором) указанной полугруппы. Полученные им краевые условия, задающие область определения оператора, являются нелокальными.

В многомерном случае ($n \geqslant 2$) общий вид генератора полугруппы Феллера был получен А. Д. Вентцелем [6]. Им было доказано, что генератор полугруппы Феллера есть эллиптический дифференциальный оператор второго порядка (возможно, с вырождением), область определения которого состоит из непрерывных (один или два раза непрерывно дифференцируемых, в зависимости от процесса) функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Нелокальное слагаемое представляет собой интеграл от функции по замыканию области относительно неотрицательной борелевской меры $\mu(y, d\eta)$, $y \in \partial G$.

В наиболее сложном случае, когда мера атомарна, нелокальные условия могут принимать вид (2). Их вероятностный смысл таков: частица, попадая в точку $y \in \Gamma_\sigma$, может через некоторое случайное время с вероятностью b_σ ($0 \leqslant b_\sigma \leqslant 1$) оказаться в точке $\Omega_\sigma(y)$ (такое поведение частицы называют "скачком"), либо с вероятностью $1 - b_\sigma$ поглотиться границей — в этом случае процесс завершается.

В общем случае краевые условия содержат производные от неизвестной функции до второго порядка включительно, что соответствует, помимо поглощения, отражению частицы от границы области, диффузии вдоль границы и явлению вязкости.

Следующая задача остается при $n \geqslant 2$ нерешенной. Пусть задан эллиптический интегро-дифференциальный оператор, область определения которого описывается нелокальными краевыми условиями общего вида [6]. Будет ли такой оператор (или его замыкание) генератором полугруппы Феллера?

Различают два класса нелокальных краевых условий: *трансверсальные* и *нетрансверсальные*. В трансверсальном случае порядок нелокальных членов

меньше порядка локальных, тогда как в нетрансверсальном порядки совпадают. Трансверсальный случай изучали К. Сато и Т. Уено [94], Дж. М. Бони, П. Коредж и П. Приоре [75], С. Ватанабе [105], К. Таира [102–104], Й. Ишикава [89] и многие другие. В работах А. Л. Скубачевского [60,64,98] был предложен метод изучения более сложного нетрансверсального случая. Этот метод основан на использовавшейся ранее (см. [56,59]) в теории нелокальных задач идее отделения нелокальных членов от локальных граничных операторов и теореме Хилле—Иосиды. Впоследствии метод был развит в работах [9,10,80,81].

Помимо приложений нелокальных эллиптических задач к теории плазмы и теории диффузионных процессов, укажем на важные приложения, возникающие в теории функционально-дифференциальных уравнений (см. монографию [99] и приведенную там библиографию), теории параболических задач с нелокальными краевыми условиями (см. [96]), в авиационно-космической технике при моделировании многослойных пластин и оболочек [47,91,99], в задачах терморегуляции при описании процессов в химических реакторах и системах климат-контроля (см. [24,77]), а также в теории управления (см., например, [70]). Кроме того, отметим монографию А. Бенсусана и Ж.-Л. Лионса [74], где, в частности, рассматриваются эллиптические интегро-дифференциальные операторы в связи с вопросами стохастической теории управления.

В последнее время развивается также теория нелокальных нелинейных уравнений и неравенств и ее приложения. В этой связи упомянем статью [41], в которой изучаются дифференциальные неравенства с нелокальными слагаемыми (там же можно найти ссылки на работы других авторов).

Новизна результатов

До сих пор [59,62,63,83] в общей теории эллиптических задач с нелокальными краевыми условиями предполагалось, что преобразования Ω_σ вблизи точек сопряжения краевых условий линейны, а именно представляют из себя композицию операторов сдвига, поворота и гомотетии. В гл. I рассматривается задача с нелинейными преобразованиями. Оказывается [14], такая задача не есть малое или компактное возмущение соответствующей задачи с линейными преобразованиями. Однако в работе показано, что при переходе от линейных преобразований переменных к нелинейным оператор задачи в весовых пространствах В. А. Кондратьева остается фредгольмовым и его индекс не меняется. Для простоты изложения мы считаем, что $n = 2$, однако соответствующие результаты

переносятся и на случай $n \geqslant 3$ (см. [14]).

Ранее вопрос о фредгольмовости неограниченного нелокального оператора в $L_2(G)$ в случае подхода носителя нелокальных членов к границе области изучался лишь тогда, когда нелокальные условия заданы на сдвигах границы [57, 61], или же в случае нелокального возмущения задачи Дирихле для уравнения второго порядка [25–27]. Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах Соболева $W^{l+2m}(G) = W_2^{l+2m}(G)$ (где $2m$ — порядок эллиптического уравнения, $l \geqslant 0$) прежде не исследовалась. Основная трудность заключается в том, что решения нелокальной задачи могут иметь степенные особенности вблизи некоторых точек и, вообще говоря, не принадлежат «нужному» пространству Соболева. Соответствующие вопросы изучены в гл. II–IV. Показано, что фредгольмова разрешимость ограниченного оператора в пространствах Соболева $W^{l+2m}(G)$ определяется расположением собственных значений некоторой вспомогательной оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ (зависящих от комплексного параметра λ), структурой жордановых цепочек, отвечающих этим собственным значениям, а также выполнением определенных алгебраических соотношений между эллиптическим оператором и операторами в нелокальных краевых условиях. Изучены нелокальные краевые условия как с нулевой правой частью, так и с произвольной. Неограниченный оператор в $L_2(G)$, заданный на обобщенных решениях нелокальной задачи (функциях из $W^{\ell}(G)$, $0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$), оказывается фредгольмовым вне зависимости от расположения собственных значений оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. При помощи понятия раствора между неограниченными операторами (см. [32]) исследована устойчивость индекса нелокальных операторов в $L_2(G)$ при возмущении эллиптического уравнения младшими членами и краевых условий нелокальными операторами.

В работе [36] рассматривался вопрос о гладкости вблизи угловой или конической точки обобщенных решений из пространства Соболева $W^m(G)$ эллиптического уравнения порядка $2m$ с условием Дирихле на границе. В частности, было доказано, что решения можно сделать сколь угодно гладкими за счет уменьшения раствора угла. Принципиально иная ситуация имеет место в случае нелокальных краевых условий. В [59, 100] показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться вблизи гладкой границы или вершины малого угла. С другой стороны, наличие нелокальных членов с достаточно большими по модулю коэффициентами может обеспечить гладкость обобщенных решений вблизи вершины угла, большего π. В гл. V изучена гладкость

обобщенных решений из $W^\ell(G)$, $0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$, эллиптических уравнений порядка $2m$; рассматриваются нелокальные краевые условия как с нулевой, так и с произвольной правой частью.

Вопрос о существовании полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае рассматривался в работах [60,98] при условии, что коэффициенты нелокальных операторов убывают при стремлении аргумента к границе области. В [10, 81] изучены краевые условия в случае, когда коэффициенты при нелокальных членах вблизи точек сопряжения краевых условий меньше единицы. Показано, что нелокальную задачу (после сведения на границу) можно рассматривать в определенном смысле как возмущение «локальной» задачи Дирихле. Предельный случай, когда коэффициенты при нелокальных членах равны единице, до сих пор оставался неизученным (больше единицы коэффициенты быть не могут [6]). В гл. VI исследованы нетрансверсальные нелокальные условия, допускающие этот предельный случай. Получены достаточные условия на борелевскую меру $\mu(y, d\eta)$ (носитель которой содержится в замыкании области), гарантирующие, что соответствующий нелокальный оператор будет генератором полугруппы Феллера. При этом изучены как ограниченные, так и неограниченные возмущения эллиптического оператора.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав и списка литературы. Главы содержат параграфы, которые имеют сплошную нумерацию (всего — 26 параграфов). Параграфы, в свою очередь, разделены на пункты. Нумерация пунктов двойная: первое число означает номера параграфа, второе — номер пункта внутри параграфа. Во введении нумерация формул одинарная. В гл. I–VI нумерация формул, теорем, лемм и т. д. двойная; например, первое число номера формулы означает номер параграфа, второе — номер формулы внутри параграфа.

Обозначим

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega_1 < \omega < \omega_2\}, \quad \gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega = \omega_\sigma\},\ \sigma = 1, 2,$$

где ω, r — полярные координаты точки y, $\omega_1 < 0 < \omega_2$ и $\omega_2 - \omega_1 < 2\pi$.

Через $\mathcal{O}_\varepsilon(0)$ обозначим ε-окрестность начала координат. Введем множества

$$K^\varepsilon = K \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0), \quad \gamma_\sigma^\varepsilon = \gamma_\sigma \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0),\ \sigma = 1, 2.$$

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область с границей ∂G, содержащей начало

координат. Считаем, что $\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)} = \overline{K^\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, а в окрестности каждой точки $y \in \partial G \setminus \{0\}$ граница области G бесконечно гладкая.

В гл. I–V рассматривается нелокальная краевая задача

$$\mathbf{P}(y, D)u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{3}$$

$$\mathbf{B}_\mu u \equiv \mathbf{B}_\mu^0 u + \mathbf{B}_\mu^1 u + \mathbf{B}_\mu^2 u = f_\mu(y) \quad (y \in \partial G \setminus \{0\};\ \mu = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

где $\mathbf{P}(y, D)$ — собственно эллиптический в $\overline{G}$ оператор порядка $2m$ с гладкими комплекснозначными коэффициентами;

$$\mathbf{B}_\mu^0 u = B_{\mu 0}(y, D)u(y)|_{\partial G \setminus \{0\}},\ \mathbf{B}_\mu^1 u = \begin{cases} (B_{\mu 1}(y, D)u)(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma^\varepsilon}, & y \in \gamma_\sigma^\varepsilon,\ \sigma = 1, 2, \\ 0, & y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0); \end{cases}$$

$B_{\mu 0}(y, D), B_{\mu 1}(y, D)$ — дифференциальные операторы порядка m_μ с гладкими на $\partial G \setminus \{0\}$ комплекснозначными коэффициентами (при стремлении $y \in \partial G$ к началу координат коэффициенты и все их производные имеют, вообще говоря, лишь односторонние пределы); коэффициенты операторов $B_{\mu 1}(y, D)$ имеют носитель, сосредоточенный в некоторой достаточно малой окрестности начала координат; Ω_σ — заданные в некоторой окрестности $\gamma_\sigma^\varepsilon$ диффеоморфизмы такие, что $\Omega_\sigma(\gamma_\sigma^\varepsilon) \subset G$, $\Omega_\sigma(0) = 0$ и кривые $\Omega_\sigma(\gamma_\sigma^\varepsilon)$ имеют некасательный подход к границе ∂G в начале координат; $\mathbf{B}_\mu^2 u = \tilde{\mathbf{B}}_\mu^2 \left(u|_{G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(0)}} \right)$ $(\varkappa_1 > 0)$ — абстрактные нелокальные операторы, отвечающие нелокальным членам с носителем вне $\varkappa_1$-окрестности начала координат; при $y \in \partial G$ система операторов $\{B_{\mu 0}(y, D)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию накрытия (условию Лопатинского) по отношению к оператору $\mathbf{P}(y, D)$ (в начале координат значения коэффициентов операторов $B_{\mu 0}(y, D)$ понимаются в смысле односторонних пределов).

Примером оператора $\mathbf{B}_\mu^2$ может служить оператор

$$\mathbf{B}_1^2 u(y) = b(y)u(\Omega(y))|_{\partial G \setminus \{0\}}, \tag{5}$$

где $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и сужения преобразования Ω на $\partial G \setminus \{0\}$ и $\overline{\gamma_\sigma^\varepsilon}$ $(\sigma = 1, 2)$ являются гладкими невырожденными преобразованиями, причем $\Omega(\partial G \setminus \{0\}) \subset G$ и $\overline{\Omega(\partial G \setminus \{0\})} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(0)$.

Для любого $l \geqslant 0$ и любого $a \in \mathbb{R}$ обозначим через $H_a^l(G)$ пополнение множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{G}$ функций с носителем в $\overline{G} \setminus \{0\}$ по норме

$$\|u\|_{H_a^l(G)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int\limits_G \rho^{2(a - l + |\alpha|)} |D^\alpha u|^2 dy \right)^{1/2},$$

где $\rho = \rho(y) = \operatorname{dist}(y, \{0\})$. Для $l \geqslant 1$ обозначим через $H_a^{l-1/2}(\partial G \setminus \{0\})$ пространство следов на $\partial G \setminus \{0\}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\partial G \setminus \{0\})} = \inf \|u\|_{H_a^l(G)} \quad (u \in H_a^l(G) : u|_{\partial G \setminus \{0\}} = \psi).$$

Положим

$$\mathcal{H}_a^l(G, \partial G) = H_a^l(G) \times \prod_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G \setminus \{0\}),$$

где $a \in \mathbb{R}$ и $l \geqslant 0$ — целое число такое, что $l + 2m - m_\mu \geqslant 1$.

В гл. I исследуется фредгольмовость оператора

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(y, D),\, \mathbf{B}_\mu\} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G),$$

а также устойчивость его индекса при замене преобразований Ω_σ на $\hat{\Omega}_\sigma$, имеющих ту же линейную часть вблизи начала координат, что и Ω_σ.

В § 1 доказаны вспомогательные результаты из теории линейных операторов, а также даны определения функциональных пространств.

В § 2 рассматривается постановка нелокальной задачи (3), (4) в весовых пространствах в ограниченной области, а также модельной задачи в плоском угле. Там же вводится модельный оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) : W^{l+2m}(\omega_1, \omega_2) \to W^l(\omega_1, \omega_2) \times \mathbb{C}^{2m}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), который соответствует нелокальной задаче вблизи начала координат, записанной в полярных координатах ω, r (с последующим преобразованием Меллина $r \mapsto \lambda$). Спектральные свойства оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ играют принципиальную роль при изучении разрешимости и гладкости решений задачи (3), (4).

В § 3 изучаются свойства нелокальных операторов с нелинейными преобразованиями вблизи начала координат.

В § 4 доказана априорная оценка решений задачи (3), (4) и построен правый регуляризатор в весовых пространствах при условии, что прямая $\operatorname{Im} \lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Отсюда следует фредгольмовость оператора

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(y, D),\, \mathbf{B}_\mu\} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G).$$

В этом же параграфе доказано, что индекс оператора $\mathbf{L}$ определяется линейной частью преобразований Ω_σ.

Главы II–VI посвящены свойствам решений задачи (3), (4): в гл. II и III изучаются сильные решения из пространств Соболева, в гл. IV и V — обобщенные решения из пространств Соболева, а в гл. VI — решения в пространствах

непрерывных функций. Соответствующие результаты базируются на разрешимости этой же задачи в весовых пространствах. Учитывая результаты гл. I, мы ограничимся далее рассмотрением преобразований Ω_σ, линейных вблизи начала координат. Теоремы гл. II–VI доказаны для общего случая, когда на границе ∂G имеется конечное число угловых точек, которые делят ∂G на конечное число частей, причем на каждой из частей задано свое краевое условие, содержащее, вообще говоря, несколько нелокальных слагаемых. Однако для наглядности ограничимся во введении рассмотрением задачи (3), (4) в описанной выше области G.

В гл. II изучаются модельные нелокальные задачи в плоских углах.

В § 5 вводятся функциональные пространства.

В § 6 рассматривается постановка нелокальной задачи (3), (4) в ограниченной области, а также модельных задач в плоских углах в пространствах Соболева. Операторы модельных задач в плоских углах заданы формулами

$$\mathfrak{L}u = \{\mathbf{P}(y,D)u,\ \mathbf{B}_{\sigma\mu}(y,D)u\}, \qquad \mathcal{L}v = \{\mathcal{P}(D)v,\ \mathcal{B}_{\sigma\mu}(D)v\},$$

где

$$\mathbf{B}_{\sigma\mu}(y,D)u = B_{\mu0}(y,D)u|_{\gamma_\sigma^\varepsilon} + (B_{\mu1}(y,D)u)(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma^\varepsilon},$$
$$\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D)v = B_{\mu0}(D)v|_{\gamma_\sigma^\varepsilon} + (B_{\mu1}(D)v)(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma^\varepsilon},$$

$B_{\mu0}(D)$ и $B_{\mu1}(D)$ — главные однородные части операторов $B_{\mu0}(0,D)$ и $B_{\mu1}(0,D)$.

Изучаемые в этой главе свойства операторов $\mathfrak{L}$ и $\mathcal{L}$ в пространствах Соболева играют существенную роль при исследовании разрешимости и гладкости обобщенных решений нелокальных задач в ограниченной области.

В § 7 строятся «решения» модельных задач в пространствах Соболева с точностью до функций, имеющих ноль определенного порядка в начале координат. Рассматриваются две ситуации: когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и когда содержит только правильное собственное значение (т. е. такое собственное значение λ_0, для которого не существует присоединенных векторов, а для любого собственного вектора $\varphi(\omega)$ функция $r^{i\lambda_0}\varphi(\omega)$, будучи записанной в декартовых координатах y, есть полином). Во втором случае на правые части уравнения и нелокальных краевых условий накладываются (интегральные) условия согласования в начале координат. Условия согласования возникают за счет того, что операторами задачи оказываются связанными определенными алгебраическими соотношениями. (Точнее, алгебраические соотношения возникают между операторами $D_y^{|\alpha|}\mathcal{P}(D)$, $|\alpha| = l-1$, и $D_{\tau_\sigma}^{l+2m-m_\mu-1}\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D)$, где τ_σ — единичный вектор, параллельный $\gamma_\sigma^\varepsilon$.)

Глава III посвящена разрешимости задачи (3), (4) в плоской ограниченной области в пространствах Соболева.

Будем говорить, что функция ψ принадлежит $W^{l-1/2}(\partial G \setminus \{0\})$, $l \geqslant 1$, если $\psi \in W^{l-1/2}(\partial G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(0)})$ при всех $\delta > 0$ и ее сужение на $\gamma_\sigma^\varepsilon$ принадлежит $W^{l-1/2}(\gamma_\sigma^\varepsilon)$. Предполагается, что операторы $\mathbf{B}_\mu^2$ действуют ограниченным образом из пространства $W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1(0)}})$ в пространство $W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G \setminus \{0\})$ (ср. (5)). Напомним, что при стремлении $y \in \partial G$ к началу координат коэффициенты операторов $B_{\mu 0}(y, D)$ и $B_{\mu 1}(y, D)$ и все их производные имеют, вообще говоря, лишь односторонние пределы; поэтому рассматриваются следовые пространства, заданные на множестве $\partial G \setminus \{0\}$.

Обозначим

$$\mathcal{W}^l(G, \partial G) = W^l(G) \times \prod_{\mu=1}^{m} W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G \setminus \{0\}),$$

где $l \geqslant 0$ — целое число такое, что $l + 2m - m_\mu \geqslant 1$.

В § 8 доказывается, что ограниченный оператор

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(y, D),\, \mathbf{B}_\mu\} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$$

фредгольмов тогда и только тогда, когда на прямой $\operatorname{Im} \lambda = 1 - l - 2m$ нет собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

В § 9 рассматривается оператор

$$\mathbf{L}_a = \{\mathbf{P}(y, D),\, \mathbf{B}_\mu\} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G),$$

действующий в весовых пространствах с малым показателем веса $a > 0$. Здесь $\mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$ — некоторое конечномерное пространство функций, имеющих особенность в начале координат. Оно возникает за счет того, что при $a \leqslant l + 2m - 1$ включение $u \in H_a^{l+2m}(G)$, вообще говоря, не влечет включение $\mathbf{L}_a u \in \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$. Действительно, можно подобрать такую функцию $u \in H_a^{l+2m}(G)$, для которой будут нарушены условия согласования, т. е. $\mathbf{B}_\mu^2 u$ будет принадлежать $W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G \setminus \{0\})$, но не будет принадлежать $H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G)$.

Доказывается, что если на прямой $\operatorname{Im} \lambda = a + 1 - l - 2m$ нет собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то оператор $\mathbf{L}_a$ фредгольмов. Отсюда, в частности, следует, что если правая часть задачи (3), (4) принадлежит $\mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ и удовлетворяет конечному числу условий ортогональности, то существует решение $u \in H_a^{l+2m}(G)$.

В § 10 рассматривается случай, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ имеется только правильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. В этом случае в силу результатов § 8 оператор $\mathbf{L} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ не фредгольмов (его образ незамкнут). Поэтому задаче (3), (4) ставится в соответствие другой оператор

$$\hat{\mathbf{L}} = \{\mathbf{P}(y, D),\, \mathbf{B}_\mu\} : W^{l+2m}(G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l(G, \partial G).$$

Здесь $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ — множество правых частей задачи (3), (4) из пространства Соболева $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$, удовлетворяющих интегральным условиям согласования вблизи начала координат (ср. § 7), а $\mathcal{R}^l(G, \partial G)$ — некоторое конечномерное подпространство в $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$. Доказывается, что оператор $\hat{\mathbf{L}}$ фредгольмов.

Фредгольмовость нелокальных операторов в §§ 8–10 доказывается по единой схеме. Конечномерность ядра вытекает из конечномерности ядра задачи (3), (4) в «подходящих» весовых пространствах. Для того чтобы показать конечномерность образа, при помощи результатов гл. II строится правый регуляризатор.

При помощи результатов § 10, в § 11 показано, что если прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ содержит только правильное собственное значение, то задача с однородными краевыми условиями (в отличие от задачи с неоднородными краевыми условиями) может оказаться фредгольмовой. Улучшение свойств задачи происходит за счет того, что условия согласования могут оказаться выполненными для любого вектора правых частей задачи, который имеет нулевую компоненту, отвечающую правой части краевых условий.

В § 12 приведены примеры, иллюстрирующие общие теоремы гл. III. На примерах, в частности, можно наблюдать следующие эффекты.

1. Даже в случае бесконечно гладкой границы нелокальная задача может не быть фредгольмовой в пространствах Соболева при сколь угодно малых коэффициентах в нелокальных членах. С другой стороны, при достаточно больших коэффициентах задача становится фредгольмовой.

2. Фредгольмова разрешимость нелокальной задачи в пространствах Соболева $W^{l+2m}(G)$ зависит от показателя l. Например, задача может быть фредгольмовой при четных l и иметь незамкнутый образ при нечетных l.

По сути, эти эффекты обусловлены тем, что при изменении коэффициентов в нелокальных членах и показателя l в пространстве Соболева $W^{l+2m}(G)$ меняется взаимное расположение собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$, структура жордановых цепочек, отвечающих собственным

значениям, а также структура алгебраических соотношений между операторами $D_y^{|\alpha|}\mathcal{P}(D)$ ($|\alpha| = l-1$) и $D_{\tau_\sigma}^{l+2m-m_\mu-1}\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D)$.

В гл. IV изучаются обобщенные решения задачи (3), (4).

Зафиксируем целое ℓ такое, что $0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$. В § 13 определяется *обобщенное решение* задачи (3), (4) как функция, принадлежащая $W^\ell(G) \cap W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(0)})$ при всех $\delta > 0$ и удовлетворяющая уравнению (3) почти всюду и краевым условиям (4) в смысле следов. Таким образом, обобщенное решение может иметь особенность вблизи начала координат — точки сопряжения нелокальных условий.

В § 14 доказывается фредгольмова разрешимость неограниченного оператора $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующего по формуле

$$\mathbf{P}u = \mathbf{P}(y, D)u,$$
$$u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}) = \{u \in W^\ell(G) \cap W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(0)})\ \forall \delta > 0 :$$
$$\mathbf{B}_\mu u = 0,\ \mathbf{P}(y, D)u \in L_2(G)\}.$$

В § 15 установлено, что индекс оператора $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset L_2(G) \to L_2(G)$ не меняется при добавлении младших членов в эллиптическом уравнении, а в § 16 доказана устойчивость индекса при добавлении в краевые условия нелокальных членов с коэффициентами, имеющими ноль определенного порядка в начале координат. В обоих случаях основная трудность заключается в том, что при возмущении оператора $\mathbf{P}$ меняется его область определения. Для доказательства устойчивости индекса используется понятие раствора между неограниченными операторами (см. [32]) и сведение к операторам, действующим в весовых пространствах.

В § 17 показано, что при добавлении в краевые условия нелокальных членов со сколь угодно малыми коэффициентами, не равными нулю в начале координат, индекс оператора $\mathbf{P}$ может меняться. Там же приведены примеры оператора $\mathbf{P}$, спектр которого занимает всю комплексную плоскость.

Глава V посвящена гладкости обобщенных решений $u \in W^\ell(G)$ задачи (3), (4) при условии, что $f_0 \in L_2(G)$, $f_\mu \in W^{2m-m_\mu-1/2}(\partial G \setminus \{0\})$.

Обозначим через Λ множество всех собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащих в полосе $1-2m < \operatorname{Im}\lambda < 1-\ell$ (в частности, множество Λ может быть пусто).

В § 18 предполагается, что выполнено следующее условие.

Условие 1. *На прямой* $\operatorname{Im}\lambda = 1-2m$ *нет собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*, а все собственные значения из множества* Λ *правильные.*

Получены достаточные условия того, что любое обобщенное решение задачи (3), (4) принадлежит $W^{2m}(G)$. Эти условия сформулированы в терминах собственных векторов, соответствующих собственным значениям из множества Λ. Назовем эти условия «условиями на структуру собственных векторов».

В § 19 исследуется так называемый *пограничный случай*, а именно предполагается, что выполнено следующее условие.

Условие 2. *На прямой* $\operatorname{Im}\lambda = 1 - 2m$ *имеется единственное собственное значение оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *и оно правильное*; *все собственные значения из множества* Λ *также правильные.*

Наряду с «условиями на структуру собственных векторов» получены (интегральные) условия согласования, которым должны удовлетворять правые части f_μ и операторы $\mathbf{B}^0_\mu$, $\mathbf{B}^1_\mu$ и $\mathbf{B}^2_\mu$ для того, чтобы любое обобщенное решение задачи (3), (4) принадлежало $W^{2m}(G)$. В §§ 18 и 19 рассматриваются краевые условия как с нулевой правой частью, так и с произвольной.

В § 20 изучаются нелокальные краевые условия специального вида, для которых «условия на структуру собственных векторов» не влияют на гладкость обобщенных решений задачи (3), (4).

В § 21 рассмотрены случаи, когда гладкость обобщенных решений может нарушаться. Показано, что как условия 1 и 2, так и «условия на структуру собственных векторов» являются в общем случае существенными.

В § 22 приведен пример, иллюстрирующий результаты §§ 18–21.

В гл. VI изучается вопрос о существовании полугрупп Феллера, возникающих в теории многомерных диффузионных процессов при описании движения частицы в области с вероятностной точки зрения. Рассмотрим эллиптический дифференциальный оператор $\mathbf{P}(y, D)$ второго порядка с гладкими вещественнозначными коэффициентами, такой, что $\mathbf{P}(y, D)1 \leqslant 0$, $y \in \overline{G}$. Область определения оператора $\mathbf{P}(y, D)$ задается нелокальными краевыми условиями *нетрансверсального* типа (ср. (4))

$$\begin{gathered} u(y) - b_\sigma(y)u(\Omega_\sigma(y)) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\beta(y, d\eta) = 0, \quad y \in \gamma^\varepsilon_\sigma, \ \sigma = 1, 2, \\ u(y) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\beta(y, d\eta) = 0, \quad y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0), \\ u(0) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $b_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — вещественнозначные функции такие, что $\operatorname{supp} b_\sigma \subset \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ и $0 \leqslant b_\sigma(y) \leqslant 1$, а $\beta(y,\cdot)$ — неотрицательная борелевская мера.

Нелокальные условия (6) можно также записать в виде

$$u(y) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\mu(y, d\eta) = 0, \quad y \in \partial G. \tag{7}$$

Здесь $\mu(0,\cdot) = 0$ и $\mu(y,\cdot) = \delta(y,\cdot) + \beta(y,\cdot)$ при $y \in \partial G \setminus \{0\}$, причем $\delta(y,\cdot)$ — неотрицательная атомарная мера, заданная следующим образом:

$$\delta(y, Q) = \begin{cases} b_\sigma(y)\chi_Q(\Omega_\sigma(y)), & y \in \gamma_\sigma^\varepsilon,\ \sigma = 1, 2, \\ 0, & y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0), \end{cases}$$

где Q — произвольное борелевское множество, χ_Q — характеристическая функция множества Q. Нелокальное условия (7) есть частный случай краевого условия, полученного в работе [6].

В § 23 доказаны теоремы об однозначной разрешимости в пространстве непрерывных функций эллиптического уравнения

$$\mathbf{P}(y, D)u - qu = f_0(y) \quad (y \in G,\ q > 0)$$

с нелокальными краевыми условиями (6) в случае, когда $\beta(y,\cdot) \equiv 0$. Исследование разрешимости нелокальных задач в пространствах непрерывных функций основано на теоремах об однозначной разрешимости в весовых пространствах (см. [23]) и результатах об асимптотике решений нелокальных задач (см. [13]).

При помощи результатов § 23 и теоремы Хилле—Иосиды в §§ 24 и 25 получены достаточные условия на меру $\mu(y,\cdot)$ в терминах геометрической структуры носителя меры, гарантирующие существование полугруппы Феллера, соответствующей нелокальным краевым условиям (6). Предполагается, что $\mu(y,\cdot) = \delta(y,\cdot) + \beta(y,\cdot)$ (см. выше), причем мера $\beta(y,\cdot)$ представима в виде суммы трех неотрицательных борелевских мер: первая имеет носитель, отделенный от начала координат, вторая обладает некоторым свойством малости, а третья порождает в соответствующих пространствах компактный оператор.

Отметим, что в работах [10, 81] предполагались выполненными условия $0 \leqslant b_\sigma(0) < 1$ или $0 \leqslant b_\sigma(0) < 1/2$, $\sigma = 1, 2$ (в зависимости от структуры меры $\beta(y,\cdot)$). В настоящей работе предполагается, что $0 \leqslant b_\sigma(0) \leqslant 1$, $\sigma = 1, 2$, и

$$b_1(0) + b_2(0) < 2. \tag{8}$$

В § 24 получены условия на меру $\beta(y,\cdot)$, при которых неограниченный оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$, заданный формулой

$$\begin{gathered} \mathbf{P}_B u = \mathbf{P}(y,D)u + \mathbf{P}_1 u, \\ u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) = \{u \in C_B(\overline{G}) : \mathbf{P}(y,D)u + \mathbf{P}_1 u \in C_B(\overline{G})\}, \end{gathered} \tag{9}$$

является генератором полугруппы Феллера. Здесь $C_B(\overline{G})$ — множество непрерывных в $\overline{G}$ функций, удовлетворяющих нелокальным условиям (6); $\mathbf{P}_1$ — *ограниченный* в $C(\overline{G})$ оператор такой, что если функция $u \in C(\overline{G})$ достигает в точке $y^0 \in G$ положительного максимума, то $\mathbf{P}_1 u(y^0) \leqslant 0$. Оператор $\mathbf{P}_1$ представляет собой обобщение ограниченного интегрального оператора вида

$$\mathbf{P}_1 u(y) = \int\limits_{\overline{G}} [u(\eta) - u(y)] m(y, d\eta), \quad y \in \overline{G},$$

где $m(y,\cdot)$ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{G}$.

В § 25 исследован случай *неограниченного* в $C(\overline{G})$ оператора $\mathbf{P}_1$, обобщающего интегральный оператор вида (ср. [74, 81, 82, 103])

$$\mathbf{P}_1 u(y) = \int\limits_{F} [u(y + z(y,\eta)) - u(y) - (\nabla u(y), z(y,\eta))] m(y,\eta) \pi(d\eta), \quad y \in G,$$

где F — пространство с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и борелевской мерой π, вектор-функция $z(y,\eta)$ и скалярная функция $m(y,\eta)$ ограничены и π-измеримы по η, $m(y,\eta) \geqslant 0$, $y + z(y,\eta) \in \overline{G}$ для всех $y \in \overline{G}$, $\eta \in F$. При этом оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ вида (9), вообще говоря, уже незамкнут. Получены условия на меру $\beta(y,\cdot)$, при которых замыкание оператора $\mathbf{P}_B$ есть генератор полугруппы Феллера.

В § 26 построены примеры, в которых нарушаются некоторые из указанных выше условий на коэффициенты в нелокальных условиях, структуру преобразований переменных или на борелевскую меру $\beta(y,\cdot)$. Показано, что замыкание соответствующего оператора $\mathbf{P}_B$ не является генератором полугруппы Феллера. Для этого доказывается, что образ оператора $\overline{\mathbf{P}_B} - q\mathbf{I}$ не совпадает с $C_B(\overline{G})$ при некотором $q > 0$, и применяется теорема Хилле—Иосиды.

В частности, построен пример, когда в начале координат задано условие Дирихле, а в некоторой его проколотой окрестности $b_1(y) = b_2(y) = 1$, т. е. нарушено условие (8). С вероятностной точки зрения это означает следующее: начало координат есть точка завершения процесса, однако из сколь угодно малой его окрестности происходят скачки с вероятностью 1.

В работе рассматривается двумерный случай, однако отметим, что результаты гл. I о разрешимости нелокальных задач в весовых пространствах В. А. Кондратьева справедливы и в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 3$, когда граница области содержит особенности типа ребер. Также на n-мерный случай могут быть перенесены некоторые результаты, касающиеся гладкости обобщенных решений, подобно тому, как это сделано в работах В. А. Кондратьева (см., например, [37]). Для обобщения на n-мерный случай результатов о существовании полугрупп Феллера необходимо дальнейшее развитие теории нелокальных эллиптических задач: изучение асимптотики решений вблизи особенностей границы типа ребер, а также разрешимости в весовых пространствах и пространствах Соболева на основе $L_p(G)$, $p > 2$, и в пространствах Гельдера.

Апробация результатов

Результаты диссертационной работы излагались на семинаре в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН под руководством академика РАН С. М. Никольского и чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева; на семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова: под руководством М. И. Вишика, под руководством В. А. Кондратьева, под руководством А. И. Прилепко, под руководством А. А. Шкаликова; на семинаре в Российском университете дружбы народов под руководством А. Л. Скубачевского; на семинаре в Московском энергетическом институте под руководством Ю. А. Дубинского; на семинаре университета им. Юстуса-Либига г. Гиссена (Германия) под руководством Х.-О. Вальтера; на семинаре университета г. Цюриха (Швейцария) под руководством Г. Аманна; на семинаре университета г. Ла Рошеля (Франция) под руководством М. Киране; на семинаре университета г. Пуатье (Франция) под руководством А. Ружиреля; на семинаре университета г. Тулузы (Франция) под руководством Ю. Егорова; на семинаре университета г. Кардифа (Великобритания) под руководством В. Буренкова и В. Эванса; на семинаре университета г. Хайдельберга (Германия) под руководством В. Егера; на семинаре университета г. Карлсруэ (Германия) под руководством К. Винерса и Н. Нойс; на семинаре университета г. Ульма (Германия) под руководством В. Арендта и В. Балсера; на семинаре в Свободном университете г. Берлина (Германия) под руководством Б. Фидлера.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [14–23, 85–88] и следующих тезисах международных конференций.

1. *Gurevich P. L.* Asymptotics and smoothness of generalized solutions for nonlocal elliptic problems// Тезисы Международной конференции «Функционально-дифференциальные уравнения и приложения». Беер-Шева. Израиль. — 2002. — С. 25-26.

2. *Gurevich P. L.* Nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces// Тезисы Третьей международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва. МАИ. — 2002. — С. 41-42.

3. *Gurevich P. L.* Nonlocal elliptic problems near the boundary in Sobolev spaces// Тезисы Международной конференции «Колмогоров и современная математика», посвященной столетию со дня рождения А. Н. Колмогорова. Москва. Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2003. — С. 176-177.

4. *Gurevich P. L.* Nonlocal elliptic problems with nonlinear argument transformations near the boundary// Тезисы Международной конференции «Нелинейные уравнения с частными производными». Алушта. Украина. — 2003. — С. 86-87.

5. *Gurevich P. L.* Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary// Тезисы Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными, посвященной В. А. Солонникову. Феррара. Италия. — 2003. С. 13.

6. *Gurevich P. L.* On Fredholm solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces// Тезисы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной И. Г. Петровскому. Москва. МГУ им. М. В. Ломоносова. — 2004. — С. 81-82.

7. *Gurevich P. L.* Elliptic equations with nonlocal boundary-value conditions on Sobolev spaces// Тезисы Международной конференции «Функциональные пространства, теория аппроксимации, нелинейный анализ», посвященной столетию С. М. Никольского. Москва. Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2005. — С. 288.

8. *Gurevich P. L.* Regularity of generalized solutions to nonlocal elliptic problems// Тезисы Четвертой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Москва. Математический институт им. В. А. Стеклова. — 2005. — С. 42-43.

9. *Gurevich P. L.* Generalized solutions to nonlocal elliptic problems// Тезисы Международной конференции «Нелинейные уравнения с частными производными», посвященной О. А. Ладыженской. Алушта. Украина. — 2005. — С. 40.

10. *Gurevich P. L.* Unbounded operators corresponding to nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces// Тезисы Международной конференции «Тихонов и современная математика». Москва. МГУ им. М. В. Ломоносова. — 2006. — Раздел 1, с. 93-94.

11. *Gurevich P. L.* Elliptic problems with nonlocal boundary-value conditions// Тезисы Международного конгресса математиков. Мадрид. Испания. — 2006.

12. *Гуревич П. Л.* Нелокальные эллиптические задачи и полугруппы Феллера в нетрансверсальном случае// Тезисы Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященной 85-летию Л. Д. Кудрявцева. Москва. — 2008. — С. 250-251.

Все результаты совместной статьи [23], включенные в диссертацию, получены лично автором.

Глава I

Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных

1. Некоторые определения и результаты из теории линейных операторов. Функциональные пространства

1.1. Некоторые определения и результаты из теории линейных операторов

В этом параграфе мы дадим некоторые определения из теории линейных операторов, а также докажем две леммы, которые будут использованы в настоящей работе.

Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, и пусть $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset H_1 \to H_2$ — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор, где $\mathrm{D}(\mathbf{P})$ обозначает область определения оператора $\mathbf{P}$.

Определение 1.1. Оператор $\mathbf{P}$ называется *фредгольмовым*, если он замкнут, имеет замкнутый образ и размерность его ядра $\ker \mathbf{P}$ и коразмерность образа $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ конечны. Число $\operatorname{ind} \mathbf{P} = \dim \ker \mathbf{P} - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P})$ называется *индексом* фредгольмова оператора $\mathbf{P}$.

Пусть $\mathbf{A} : \mathrm{D}(\mathbf{A}) \subset H_1 \to H_2$ — линейный оператор.

Определение 1.2 (см. [32, 38])**.** Оператор $\mathbf{A}$ называется *компактным относительно* $\mathbf{P}$ или просто $\mathbf{P}$-*компактным*, если $\mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset \mathrm{D}(\mathbf{A})$ и для любой

последовательности $u_n \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$ такой, что $\{u_n\}$ и $\{\mathbf{P}u_n\}$ ограничены, последовательность $\{\mathbf{A}u_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Введем понятие раствора между линейными операторами. Пусть $\mathbf{S} : \mathrm{D}(\mathbf{S}) \subset H_1 \to H_2$ — линейный оператор. В пространстве $H_1 \times H_2$ зададим норму

$$\|(u, f)\| = \left(\|u\|_{H_1}^2 + \|f\|_{H_2}^2\right)^{1/2} \quad \forall (u, f) \in H_1 \times H_2.$$

Обозначим $\delta(\mathbf{P}, \mathbf{S}) = \sup\limits_{u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}) : \|(u, \mathbf{P}u)\| = 1} \operatorname{dist}\big((u, \mathbf{P}u), \operatorname{Gr} \mathbf{S}\big)$, где $\operatorname{Gr} \mathbf{S}$ — график оператора $\mathbf{S}$.

Определение 1.3 (см. [32])**.** Число $\hat{\delta}(\mathbf{P}, \mathbf{S}) = \max\{\delta(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \delta(\mathbf{S}, \mathbf{P})\}$ называется *раствором между операторами* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{S}$.

Раствор между операторами позволяет оценивать «близость» двух неограниченных операторов, имеющих, вообще говоря, различные области определения (см. [32]).

Докажем следующие два вспомогательных результата.

Лемма 1.1. *Пусть H, H_1, и H_2 — гильбертовы пространства, $\mathbf{A} : H \to H_1$ — линейный ограниченный оператор, $\mathbf{T} : H \to H_2$ — компактный оператор. Предположим, что для некоторых $\delta, c > 0$ и $f \in H$ выполнено неравенство*

$$\|\mathbf{A}f\|_{H_1} \leqslant \delta \|f\|_H + c\|\mathbf{T}f\|_{H_2}. \tag{1.1}$$

Тогда существуют такие операторы $\mathbf{M}, \mathbf{F} : H \to H_1$, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{F},$$

$\|\mathbf{M}\| \leqslant 2\delta$ и оператор $\mathbf{F}$ конечномерный.

Доказательство. Как известно (см., например, [51, гл. 5, § 85]), всякий компактный оператор есть предел в операторной норме последовательности конечномерных операторов. Следовательно, существуют такие операторы $\mathbf{M}_0, \mathbf{F}_0 : H \to H_2$, что $\mathbf{T} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{F}_0$, $\|\mathbf{M}_0\| \leqslant c^{-1}\delta$ и оператор $\mathbf{F}_0$ конечномерный. Отсюда и из (1.1) вытекает

$$\|\mathbf{A}f\|_{H_1} \leqslant 2\delta \|f\|_H + c\|\mathbf{F}_0 f\|_{H_2} \quad \forall f \in H. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\ker(\mathbf{F}_0)^\perp$ ортогональное дополнение в H к ядру оператора $\mathbf{F}_0$. Так как конечномерный оператор $\mathbf{F}_0$ отображает $\ker(\mathbf{F}_0)^\perp$ на свой образ взаимно однозначно, то подпространство $\ker(\mathbf{F}_0)^\perp$ конечномерно. Обозначим через $\mathbf{I}$

единичный оператор в H, а через $\mathbf{P}_0$ оператор ортогонального проектирования на $\ker(\mathbf{F}_0)^\perp$. Очевидно, $\mathbf{A}\mathbf{P}_0 : H \to H_1$ — конечномерный оператор. Кроме того, поскольку $\mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — оператор ортогонального проектирования на $\ker(\mathbf{F}_0)$, имеем $\mathbf{F}_0(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0) = 0$. Следовательно, подставляя в (1.2) функцию $(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0)f$ вместо f, получим

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0)f\|_{H_1} \leqslant 2\delta\|(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0)f\|_H \leqslant 2\delta\|f\|_H \quad \forall f \in H.$$

Обозначая $\mathbf{M} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{P}_0)$ и $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{P}_0$, завершаем доказательство. □

Лемма 1.2. *Пусть H — гильбертово пространство и $\mathbf{I}$ — единичный оператор в пространстве H. Пусть $\mathbf{M}_\delta$ и $\mathbf{S}_\delta = \mathbf{U}_\delta + \mathbf{F}_\delta$, $\delta > 0$, — такие семейства ограниченных в пространстве H операторов, что*

$$\|\mathbf{M}_\delta\| \leqslant c_1\delta, \qquad \|\mathbf{U}_\delta\| \leqslant c_2, \tag{1.3}$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от δ, и операторы $\mathbf{F}_\delta$ и $\mathbf{S}_\delta^2$ компактны. Тогда операторы

$$\mathbf{L}_\delta = \mathbf{I} + \mathbf{M}_\delta + \mathbf{S}_\delta$$

фредгольмовы при любых достаточно малых $\delta > 0$.

Доказательство. Для доказательства леммы построим правый и левый регуляризаторы для оператора $\mathbf{L}_\delta$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_\delta(\mathbf{I} - (\mathbf{M}_\delta + \mathbf{S}_\delta)) &= \mathbf{I} - \mathbf{M}_\delta^2 - \mathbf{M}_\delta\mathbf{S}_\delta - \mathbf{S}_\delta\mathbf{M}_\delta - \mathbf{S}_\delta^2 = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{M}_\delta^2 - \mathbf{M}_\delta\mathbf{U}_\delta - \mathbf{U}_\delta\mathbf{M}_\delta) - (\mathbf{M}_\delta\mathbf{F}_\delta + \mathbf{F}_\delta\mathbf{M}_\delta + \mathbf{S}_\delta^2).\end{aligned}$$

Из (1.3) следует, что

$$\|\mathbf{M}_\delta^2 + \mathbf{M}_\delta\mathbf{U}_\delta + \mathbf{U}_\delta\mathbf{M}_\delta\| \leqslant c_3\delta,$$

где $c_3 > 0$ не зависит от δ. Отсюда и из теоремы 16.2 в [38] вытекает, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ операторы $\mathbf{I} - \mathbf{M}_\delta^2 - \mathbf{M}_\delta\mathbf{U}_\delta - \mathbf{U}_\delta\mathbf{M}_\delta$ фредгольмовы. Далее, используя компактность операторов $\mathbf{F}_\delta$ и $\mathbf{S}_\delta^2$ и применяя теорему 16.4 в [38], видим, что операторы $\mathbf{L}_\delta(\mathbf{I} - (\mathbf{M}_\delta + \mathbf{S}_\delta))$ также фредгольмовы. Теперь из теоремы 15.2 в [38] следует существование таких ограниченных операторов $\mathbf{R}_{1\delta}$ и компактных операторов $\mathbf{T}_{1\delta}$, что

$$\mathbf{L}_\delta(\mathbf{I} - (\mathbf{M}_\delta + \mathbf{S}_\delta))\mathbf{R}_{1\delta} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{1\delta}. \tag{1.4}$$

Аналогично доказывается существование ограниченных операторов $\mathbf{R}_{2\delta}$ и компактных операторов $\mathbf{T}_{2\delta}$ таких, что

$$\mathbf{R}_{2\delta}(\mathbf{I} - (\mathbf{M}_\delta + \mathbf{S}_\delta))\mathbf{L}_\delta = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{2\delta}. \tag{1.5}$$

Утверждение леммы вытекает из соотношений (1.4) и (1.5) и из теорем 15.2 и 14.3 в [38]. □

1.2. Функциональные пространства

Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций

Пусть X — непустое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Обозначим через $C(X)$ множество непрерывных в X функций. Если X — компакт, то $C(X)$ — банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{C(X)} = \max_{y \in X} |u(y)|, \quad u \in C(X).$$

Пусть X и M — замкнутые множества, причем множество X непусто. Через $C^\infty(X)$ обозначим множество сужений на X бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций. Через $C_0^\infty(X \setminus M)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций с *компактным* носителем в $X \setminus M$.

Для любой области $Q \subset \mathbb{R}^n$ и любого $l \geqslant 0$ (здесь и далее, если не оговорено противное, число l целое) обозначим через $C^l(Q)$ ($C^l(\overline{Q})$) множество l раз непрерывно дифференцируемых в Q (в $\overline{Q}$) функций. В частности, $C^0(Q) = C(Q)$ и $C^0(\overline{Q}) = C(\overline{Q})$.

Область G и угол K

Обозначим

$$K = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega_1 < \omega < \omega_2\}, \quad \gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega = \omega_\sigma\},\ \sigma = 1, 2,$$

где ω, r — полярные координаты точки y, $\omega_1 < 0 < \omega_2$ и $\omega_2 - \omega_1 < 2\pi$.

Через $\mathcal{O}_\varepsilon(0)$ обозначим ε-окрестность начала координат. Введем множества

$$K^\varepsilon = K \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0), \quad \gamma_\sigma^\varepsilon = \gamma_\sigma \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0),\ \sigma = 1, 2.$$

Всюду в этой главе будем обозначать через $G \subset \mathbb{R}^2$ ограниченную область с границей ∂G, содержащей начало координат. Считаем, что $\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)} = \overline{K^\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Предположим, что в окрестности каждой точки $y \in \partial G \setminus \{0\}$ граница области G бесконечно гладкая.

Пространства Соболева

Для любой области $Q \subset \mathbb{R}^n$ и любого $l \geqslant 0$ обозначим через $W^l(Q) = W_2^l(Q)$ пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W^l(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int\limits_G |D^\alpha u|^2 \, dy \right)^{1/2}$$

(при $l = 0$ полагаем $W^0(Q) = L_2(Q)$). Здесь и далее $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_{y_1}^{\alpha_1} \ldots D_{y_n}^{\alpha_n}$, $D_{y_j} = -i\partial/\partial y_j$. Если необходимо явно указать, по каким переменным мы дифференцируем функцию u, то будем писать $D_y^\alpha u$, $D_{y'}^\alpha u$ и т. д. Для $l \geqslant 1$ введем пространство $W^{l-1/2}(\Gamma_1)$ следов на гладкой кривой $\Gamma_1 \subset \overline{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{W^{l-1/2}(\Gamma_1)} = \inf \|u\|_{W^l(Q)} \quad (u \in W^l(Q) : u|_{\Gamma_1} = \psi).$$

Через $W_{\mathrm{loc}}^l(Q)$ обозначим множество, состоящее из всех распределений u на Q таких, что $\varphi u \in W^l(Q)$ для любых $\varphi \in C_0^\infty(Q)$.

Весовые пространства Кондратьева

Рассмотрим следующие случаи: $Q = K$, $Q = K^d$ $(d > 0)$ и $Q = G$. Для любого $l \geqslant 0$ и любого $a \in \mathbb{R}$ обозначим через $H_a^l(Q) = H_a^l(Q, \{0\})$ пополнение множества $C_0^\infty(\overline{Q} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{H_a^l(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int\limits_Q \rho^{2(a-l+|\alpha|)} |D^\alpha u|^2 dy \right)^{1/2},$$

где $\rho = \rho(y) = \mathrm{dist}(y, \{0\})$. Для $l \geqslant 1$ обозначим через $H_a^{l-1/2}(\Gamma_1)$ пространство следов на гладкой кривой $\Gamma_1 \subset \overline{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma_1)} = \inf \|u\|_{H_a^l(Q)} \quad (u \in H_a^l(Q) : u|_{\Gamma_1} = \psi).$$

2. Постановка задачи в ограниченной области

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейные дифференциальные операторы $\mathbf{P}(y, D)$ и $B_{\mu s}(y, D)$, порядка $2m$ и m_μ соответственно с комплекснозначными коэффициентами ($\mu =$

$1, \ldots, m$; $s = 0, 1$). Предположим что коэффициенты оператора $\mathbf{P}(y, D)$ бесконечно гладкие в $\overline{G}$, а коэффициенты операторов $B_{\mu s}(y, D)$ бесконечно гладкие в $(\partial G \setminus \{0\}) \cup \overline{\gamma_\sigma^\varepsilon}$, $\sigma = 1, 2$.

Сформулируем условия на операторы $\mathbf{P}(y, D)$ и $B_{\mu 0}(y, D)$, которые будут соответствовать «локальной» эллиптической задаче (см., например, [39, гл. 2, § 1].

Условие 2.1. *Оператор* $\mathbf{P}(y, D)$ *собственно эллиптичен на* $\overline{G}$.

Условие 2.2. *Для любого* $y \in \overline{\gamma_\sigma^\varepsilon}$ *и любого* $y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ *система операторов* $\{B_{\mu 0}(y, D)\}_{\mu=1}^m$ *удовлетворяет условию накрытия* (*условию Лопатинского*) *по отношению к оператору* $\mathbf{P}(y, D)$.

Подчеркнем, что нормальность операторов $B_{\mu 0}(y, D)$ не предполагается.

Введем операторы $\mathbf{B}_\mu^0 : H_a^{l+2m}(G) \to H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G)$ по формуле $\mathbf{B}_\mu^0 u = B_{\mu 0}(y, D)u(y)|_{\partial G}$; здесь и далее в этой главе $a \in \mathbb{R}$, $l \geqslant 0$ — такое целое число, что $l + 2m - m_\mu \geqslant 1$.

Определим операторы, соответствующие нелокальным условиям вблизи начала координат. Пусть Ω_σ ($\sigma = 1, 2$) — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_\sigma$ кривой $\overline{\gamma_\sigma^\varepsilon}$ на множество $\Omega_\sigma(\mathcal{O}_\sigma)$ так, что $\Omega_\sigma(\gamma_\sigma^\varepsilon) \subset G$ и

$$\Omega_\sigma(0) = 0. \tag{2.1}$$

Выберем ε настолько малым (см. ниже замечание 2.2), чтобы существовала окрестность $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$ такая, что $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0) \supset \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ и

1. $\overline{G \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)} = K^{\varepsilon_1}$;
2. $\Omega_\sigma\big(\mathcal{O}_\varepsilon(0)\big) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$.

Условие 2.3. *При* $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ *преобразование* Ω_σ *имеет вид*

$$\Omega_\sigma : y \mapsto \mathcal{G}_\sigma y + o(|y|),$$

где $\mathcal{G}_\sigma$ *композиция поворота на угол* $-\omega_\sigma$ *вокруг начала координат и гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом* $\chi_\sigma > 0$, $\sigma = 1, 2$.

Таким образом, оператор $\mathcal{G}_\sigma$ переводит сторону γ_σ угла K в полупрямую $\{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega = 0\}$, лежащую внутри угла K.

Замечание 2.1. Условие 2.3 означает, в частности, что кривая $\Omega_\sigma(\overline{\gamma_\sigma^\varepsilon})$ подходит к границе ∂G в точке 0 некасательным образом.

В этой главе будем использовать обозначения

$$d_1 = \min_{\sigma=1,2}\{1, \chi_\sigma\}/2, \qquad d_2 = 2\max_{\sigma=1,2}\{1, \chi_\sigma\}. \tag{2.2}$$

Выберем число ε_0, $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$, удовлетворяющее следующему условию: $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(0) \subset \Omega_\sigma\big(\mathcal{O}_\varepsilon(0)\big) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$. Рассмотрим функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что

$$\zeta(y) = 1 \ (y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0/2}(0)), \quad \zeta(y) = 0 \ (y \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(0)). \tag{2.3}$$

Введем ограниченные операторы $\mathbf{B}^1_\mu : H^{l+2m}_a(G) \to H^{l+2m-m_\mu-1/2}_a(\partial G)$ по формуле

$$\mathbf{B}^1_\mu u = \begin{cases} (B_{\mu 1}(y, D)(\zeta u))(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma^\varepsilon_\sigma}, & y \in \gamma^\varepsilon_\sigma, \ \sigma = 1, 2, \\ 0, & y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0), \end{cases}$$

где $(B_{\mu 1}(y, D)v)(\Omega_{is}(y)) = B_{\mu 1}(y', D_{y'})v(y')|_{y'=\Omega_\sigma(y)}$.

Так как $\mathbf{B}^1_\mu u = 0$, если $\operatorname{supp} u \subset \overline{G} \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(0)}$, то будем говорить, что операторы $\mathbf{B}^1_\mu$ *соответствуют нелокальным членам с носителем вблизи начала координат.*

Обозначим

$$G_\rho = \{y \in G : \operatorname{dist}(y, \partial G) > \rho\}.$$

Рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathbf{B}^2_\mu : H^{l+2m}_a(G) \to H^{l+2m-m_\mu-1/2}_a(\partial G),$$

удовлетворяющий следующему условию.

Условие 2.4. *Существуют такие числа $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$ и $\rho > 0$, что выполнены неравенства*

$$\|\mathbf{B}^2_\mu u\|_{H^{l+2m-m_\mu-1/2}_a(\partial G)} \leqslant c_1 \|u\|_{W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(0)})} \quad \forall u \in W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(0)}), \tag{2.4}$$

$$\|\mathbf{B}^2_\mu u\|_{W^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(0)})} \leqslant c_2 \|u\|_{W^{l+2m}(G_\rho)} \quad \forall u \in W^{l+2m}(G_\rho), \tag{2.5}$$

где $\mu = 1, \ldots, m$, $c_1, c_2 > 0$ не зависят от u.

Из (2.4) следует, что $\mathbf{B}^2_\mu u = 0$, если $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(0)$. Поэтому будем говорить, что операторы $\mathbf{B}^2_\mu$ *соответствуют нелокальным членам с носителем вне начала координат.*

Отметим, что априори мы не предполагаем наличия какой-либо связи между числами $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ в условии 2.4 и числом ε_0 в условии 2.3.

Будем изучать нелокальную эллиптическую задачу

$$\mathbf{P}(y,D)u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{2.6}$$

$$\mathbf{B}_\mu u \equiv \mathbf{B}_\mu^0 u + \mathbf{B}_\mu^1 u + \mathbf{B}_\mu^2 u = f_\mu(y) \quad (y \in \partial G;\ \mu = 1,\dots,m). \tag{2.7}$$

Примером задачи (2.6), (2.7) может служить задача (6.9), (6.10) из п. 6.2 (глава II) при $N = 1$ (более подробно см. [14]).

Введем следующий оператор, отвечающий задаче (2.6), (2.7) в весовых пространствах:

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(y,D),\, \mathbf{B}_\mu\} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G,\partial G), \tag{2.8}$$

где $\mathcal{H}_a^l(G,\partial G) = H_a^l(G) \times \prod\limits_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G)$.

Замечание 2.2. Покажем, что число ε_0 в определении нелокальных операторов $\mathbf{B}_\mu^1$ может быть выбрано сколь угодно малым.

Пусть число $\hat\varepsilon_0$ таково, что $0 < \hat\varepsilon_0 < \varepsilon_0$. Рассмотрим такую функцию $\hat\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что

$$\hat\zeta(y) = 1\ (y \in \mathcal{O}_{\hat\varepsilon_0/2}(\mathcal{K})), \quad \hat\zeta(y) = 0\ (y \notin \mathcal{O}_{\hat\varepsilon_0}(\mathcal{K})),$$

и введем оператор $\hat{\mathbf{B}}_\mu^1 : H_a^{l+2m}(G) \to H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\partial G)$ по формуле

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{B}}_\mu^1 u = \big(B_{\mu 1}(y,D)(\hat\zeta u)\big)\big(\Omega_\sigma(y)\big)\big|_{\gamma_\sigma^\varepsilon}, && y \in \gamma_\sigma^\varepsilon,\ \sigma = 1,2 \\ &\hat{\mathbf{B}}_\mu^1 u = 0, && y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0); \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\mathbf{B}_\mu^0 + \mathbf{B}_\mu^1 + \mathbf{B}_\mu^2 = \mathbf{B}_\mu^0 + \hat{\mathbf{B}}_\mu^1 + \hat{\mathbf{B}}_\mu^2,$$

где $\hat{\mathbf{B}}_\mu^2 = \mathbf{B}_\mu^1 - \hat{\mathbf{B}}_\mu^1 + \mathbf{B}_\mu^2$. Легко видеть, что оператор $\mathbf{B}_\mu^1 - \hat{\mathbf{B}}_\mu^1$ удовлетворяет условию 2.4 при некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$. Таким образом, мы всегда можем выбрать ε_0 сколь угодно малым (быть может, за счет модификации оператора $\mathbf{B}_\mu^2$ и значений $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и ρ).

2.2. Сведение к модельным задачам в плоских углах

При изучении задачи (2.6), (2.7) особое внимание следует уделять поведению решений в окрестности начала координат. Рассмотрим соответствующую модельную задачу в плоском угле. Для этого формально положим

$$\mathbf{B}_\mu^2 = 0, \quad \mu = 1,\dots,m. \tag{2.9}$$

Тогда в силу условия 2.3 задача (2.6), (2.7) примет в ε-окрестности начала координат следующий вид:

$$\mathbf{P}(y,D)U = f_0(y) \quad (y \in K^\varepsilon), \tag{2.10}$$

$$B_{\sigma\mu 0}(y,D)U|_{\gamma_\sigma} + (B_{\sigma\mu 1}(y,D)U)(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma} = f_{\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_\sigma^\varepsilon). \tag{2.11}$$

Здесь $\sigma = 1,2$; $\mu = 1,\dots,m$; $B_{\sigma\mu s}(y,D)$, $s = 0,1$, — линейные дифференциальные операторы порядка m_μ с переменными коэффициентами класса C^∞.

Обозначим через $\mathcal{P}(D)$ и $B_{\sigma\mu s}(D)$ главные однородные части операторов $\mathbf{P}(0,D)$ и $B_{\sigma\mu s}(0,D)$ соответственно. Положим

$$\mathcal{B}^\Omega_{\sigma\mu}(D)U = B_{\sigma\mu 0}(D)U|_{\gamma_\sigma} + (B_{\sigma\mu 1}(D)U)(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma},$$
$$\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D)U = B_{\sigma\mu 0}(D)U|_{\gamma_\sigma} + (B_{\sigma\mu 1}(D)U)(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}.$$

Введем ограниченные операторы

$$\mathcal{L}^\Omega = \{\mathcal{P}(D),\ \mathcal{B}^\Omega_{\sigma\mu}(D)\} : H_a^{l+2m}(K) \to \mathcal{H}_a^l(K,\gamma),$$
$$\mathcal{L} = \{\mathcal{P}(D),\ \mathcal{B}_{\sigma\mu}(D)\} : H_a^{l+2m}(K) \to \mathcal{H}_a^l(K,\gamma),$$

где

$$\mathcal{H}_a^l(K,\gamma) = H_a^l(K) \times \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma),$$
$$\mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) = \prod_{\sigma=1,2}\prod_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma).$$

При этом считаем, что оператор $\mathcal{L}^\Omega$ определен на функциях с носителем, сосредоточенным в окрестности начала координат (в частности, с таким носителем, что $\Omega_\sigma(y) \in K$ при $y \in \operatorname{supp} U$).

Очевидно, операторы $\mathcal{L}^\Omega$ и $\mathcal{L}$ соответствуют модельным задачам с нелинейными и линеаризованными преобразованиями соответственно.

Запишем операторы $\mathcal{P}(D)$ и $B_{\sigma\mu s}(D)$ в полярных координатах следующим образом: $\mathcal{P}(D) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(\omega, D_\omega, rD_r)$, $B_{\sigma\mu}(D) = r^{-m_\mu}\tilde{B}_{\sigma\mu}(\omega, D_\omega, rD_r)$, где $D_\omega = -i\partial/\partial\omega$, $D_r = -i\partial/\partial r$. Рассмотрим оператор (аналитическую оператор-функцию, зависящую от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$) $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) : W^{l+2m}(\omega_1,\omega_2) \to W^l(\omega_1,\omega_2) \times \mathbb{C}^{2m}$, заданную формулой

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi = \{\tilde{\mathcal{P}}(\omega, D_\omega, \lambda)\varphi,\ \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\omega, D_\omega, \lambda)\varphi\}, \tag{2.12}$$

где

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\omega, D_\omega, \lambda)\varphi = \tilde{B}_{\sigma\mu 0}(\omega, D_\omega, \lambda)\varphi|_{\omega=\omega_\sigma} + (\chi_\sigma)^{i\lambda - m_\mu}\tilde{B}_{\sigma\mu 1}(\omega, D_\omega, \lambda)\varphi(\omega - \omega_\sigma)|_{\omega=\omega_\sigma}.$$

Отметим, что множество собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ образует дискретное множество [62].

3. Нелинейные преобразования вблизи начала координат

3.1. Нелинейные преобразования в полярных координатах

В работе [14] показано, что оператор, соответствующий задаче с нелинейными преобразованиями переменных, не является малым или компактным возмущением оператора, соответствующего задаче с линеаризованными преобразованиями. Поэтому для доказательства фредгольмовой разрешимости задачи с нелинейными преобразованиями мы заново получим априорные оценки решений и построим правый регуляризатор. Для этого предварительно изучим некоторые свойства преобразований Ω_σ вблизи начала координат.

Используя формулу Тейлора, нетрудно получить следующее утверждение, которое будет использовано при доказательстве леммы о представлении преобразований Ω в полярных координатах (см. лемму 3.2).

Лемма 3.1. *Пусть $h = h(r)$ — такая функция, что $|D_r^k h| \leqslant c_k$ при $0 \leqslant r \leqslant \varrho$, $k = 0, \dots, k_0$, где $c_k > 0$ не зависит от r. Пусть $f(r) = r^{-l} h(r)$ при некотором $l \in \mathbb{N}$. Тогда если $|f| \leqslant c$, то $|D_r^k f| \leqslant C_k$ при $0 \leqslant r \leqslant \varrho$, $k = 1, \dots, k_0$, где $C_k > 0$ не зависит от r.*

Следующая лемма описывает структуру нелинейных преобразований Ω_σ в полярных координатах — такое представление оказывается более удобным в случае, когда мы имеем дело с весовыми пространствами.

Лемма 3.2. *При достаточно малом ϱ преобразование $\Omega_\sigma(y)|_{\gamma_\sigma^\varrho}$ представимо в полярных координатах в виде*

$$(\omega_\sigma, r) \mapsto \big(\Phi_\sigma(r), \chi_\sigma r + R_\sigma(r)\big) \quad \text{при } r \leqslant \varrho, \tag{3.1}$$

где $\Phi_\sigma(r)$, $R_\sigma(r)$ — бесконечно гладкие функции, такие, что

$$|\Phi_\sigma| \leqslant c\varrho, \quad |R_\sigma| \leqslant c\varrho r, \tag{3.2}$$

$$|D_r^k \Phi_\sigma| \leqslant c_k, \quad |D_r^k (R_\sigma / r)| \leqslant c_k. \tag{3.3}$$

Здесь $k \geqslant 1$; $c, c_k > 0$ не зависят от ϱ.

Доказательство. Пусть $\Omega_\sigma(y) = (\Omega_\sigma^1(y), \Omega_\sigma^2(y))$. Используя (2.1) и формулу Тейлора в окрестности $r = 0$, получаем

$$\Omega_\sigma^i(r\cos\omega_\sigma, r\sin\omega_\sigma) = \left(\frac{\partial \Omega_\sigma^i}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma + \frac{\partial \Omega_\sigma^i}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma\right) r + O(r^2). \tag{3.4}$$

Заметим, что $\dfrac{\partial\Omega^1_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\dfrac{\partial\Omega^1_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma$ и $\dfrac{\partial\Omega^2_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\dfrac{\partial\Omega^2_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma$ не обращаются в нуль одновременно; это вытекает из невырожденности матрицы Якоби преобразования $y\mapsto\Omega_\sigma(y)$ в начале координат. Пусть, например,

$$\frac{\partial\Omega^1_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\frac{\partial\Omega^1_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma\neq 0. \tag{3.5}$$

Тогда в силу (3.4) при достаточно малом ϱ

$$\Omega^1_\sigma\neq 0\quad\text{при } r\leqslant\varrho, \tag{3.6}$$

и преобразование $\Omega_\sigma|_{\gamma^\varrho_\sigma}$ в полярных координатах имеет вид

$$(\omega_\sigma,r)\mapsto\left(\operatorname{arctg}\frac{\Omega^2_\sigma}{\Omega^1_\sigma}+\pi l,\ \sqrt{\sum_{i=1,2}(\Omega^i_\sigma)^2}\right), \tag{3.7}$$

где $l=0$, если $\Omega^1_\sigma>0$, $\Omega^2_\sigma\geqslant 0$; $l=1$, если $\Omega^1_\sigma<0$; $l=2$, если $\Omega^1_\sigma>0$, $\Omega^2_\sigma<0$.

Из (3.4) и формулы Тейлора имеем

$$\operatorname{arctg}\frac{\Omega^2_\sigma}{\Omega^1_\sigma}=\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{\partial\Omega^2_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\dfrac{\partial\Omega^2_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma}{\dfrac{\partial\Omega^1_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\dfrac{\partial\Omega^1_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma}+O(r),$$

$$\sqrt{\sum_{i=1,2}(\Omega^i_\sigma)^2}=r\sqrt{\sum_{i=1,2}\left(\frac{\partial\Omega^i_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\frac{\partial\Omega^i_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma\right)^2}+O(r^2).$$

Полагая

$$\omega_{kq}=\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{\partial\Omega^2_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\dfrac{\partial\Omega^2_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma}{\dfrac{\partial\Omega^1_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\dfrac{\partial\Omega^1_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma}+\pi l,$$

$$\chi_\sigma=\sqrt{\sum_{i=1,2}\left(\frac{\partial\Omega^i_\sigma}{\partial y_1}(0)\cos\omega_\sigma+\frac{\partial\Omega^i_\sigma}{\partial y_2}(0)\sin\omega_\sigma\right)^2},$$

получим формулу (3.1) и неравенства (3.2).

Докажем первое неравенство в (3.3). Согласно (3.6) $\left|\dfrac{\Omega^2_\sigma}{\Omega^1_\sigma}\right|\leqslant c$ при $r\leqslant\varrho$. Поэтому в силу (3.1) и (3.7) достаточно доказать ограниченность частных производных $D^k_r\dfrac{\Omega^2_\sigma}{\Omega^1_\sigma}$. Запишем

$$\frac{\Omega^2_\sigma}{\Omega^1_\sigma}=\frac{r^{-1}\Omega^2_\sigma}{r^{-1}\Omega^1_\sigma}.$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает, что $r^{-1}\Omega_\sigma^1 \neq 0$ при $r \leqslant \varrho$; поэтому достаточно доказать, что

$$|D_r^k(r^{-1}\Omega_\sigma)| \leqslant c_k.$$

Но Ω_σ — бесконечно гладкое при $r \leqslant \varrho$ преобразование, и так как $\Omega_\sigma(0) = 0$, то $\Omega_\sigma = O(r)$. Следовательно, $|r^{-1}\Omega_\sigma| \leqslant c$. Теперь требуемое утверждение следует из леммы 3.1.

Похожим образом доказывается и второе неравенство в (3.3). Из (3.1) и (3.7) следует соотношение

$$\frac{R_\sigma(r)}{r} = \sqrt{\sum_{i=1,2} \frac{(\Omega_\sigma^i)^2}{r^2}} - \chi_\sigma.$$

В силу (3.4) и (3.5) имеем $\sum\limits_{i=1,2} (\Omega_\sigma^i)^2/r^2 \neq 0$ при $r \leqslant \varrho$; следовательно, достаточно показать, что

$$\left| D_r^k \sum_{i=1,2} (\Omega_\sigma^i)^2/r^2 \right| \leqslant c_k.$$

Но $\sum\limits_{i=1,2} (\Omega_\sigma^i)^2$ бесконечно гладкая при $r \leqslant \varrho$ функция, и так как $\Omega_\sigma(0) = 0$, то $\sum\limits_{i=1,2} (\Omega_\sigma^i)^2 = O(r^2)$. Следовательно, $\left| \sum\limits_{i=1,2} (\Omega_\sigma^i)^2/r^2 \right| \leqslant c$, и вновь необходимое утверждение следует из леммы 3.1. □

Обозначим $\delta = \min(-\omega_1, \omega_2)/2$. Пусть ϱ настолько мало, что

$$|\Phi_\sigma| \leqslant \delta/2, \quad |R_\sigma| \leqslant \chi_\sigma r/2 \quad \text{при } r \leqslant \varrho/d_1. \tag{3.8}$$

Существование такого ϱ вытекает из леммы 3.2.

Введем бесконечно дифференцируемые функции $\zeta_i(\omega)$ и $\zeta_{\sigma i}(\omega)$, $i = 0, \ldots, 4$, такие, что

$$\begin{gathered} \zeta_i(\omega) = 1 \text{ для } |\omega| \leqslant \delta/2^{i+1}, \quad \zeta_i(\omega) = 0 \text{ для } |\omega| \geqslant \delta/2^i \\ \zeta_{\sigma i}(\omega) = \zeta_i(\omega - \omega_\sigma). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Очевидно $\zeta_{\sigma i}(\omega) = 1$ для $|\omega - \omega_\sigma| \leqslant \delta/2^{i+1}$ и $\zeta_{\sigma i}(\omega) = 0$ для $|\omega - \omega_\sigma| \geqslant \delta/2^i$.

Рассмотрим преобразование $\tilde{\Omega}_\sigma(y)$, действующее в полярных координатах по формуле

$$(\omega, r) \mapsto (\omega - \omega_\sigma + \Phi_\sigma(r),\ \chi_\sigma r + R_\sigma(r)). \tag{3.10}$$

В силу леммы 3.2 имеем $\tilde{\Omega}_\sigma(y)|_{\gamma_\sigma^\varrho} = \Omega_\sigma(y)|_{\gamma_\sigma^\varrho}$; поэтому в дальнейшем будем считать, что преобразование $\Omega_\sigma(y)$ задается формулой (3.10). Теперь $\Omega_\sigma(y)$,

вообще говоря, может иметь особенность в начале координат, так как новое преобразование $\Omega_\sigma(y)$ совпадает со старым $\Omega_\sigma(y)$ только на γ_σ^ϱ.

Определение 3.1. Для любой функции $W(y)$ обозначим $\widehat{W}(y) = W(\Omega_\sigma(\mathcal{G}_\sigma^{-1}y))$.

В силу леммы 3.2 преобразование $\Omega_\sigma(\mathcal{G}_\sigma^{-1}y)$ в полярных координатах имеет вид

$$(\omega, r) \mapsto (\omega + \Phi'_\sigma(r), r + R'_\sigma(r)), \tag{3.11}$$

где $\Phi'_\sigma(r) = \Phi_\sigma(\chi_\sigma^{-1}r)$, $R'_\sigma(r) = R_\sigma(\chi_\sigma^{-1}r)$. Легко видеть, что Φ'_σ и R'_σ также удовлетворяют неравенствам (3.2), (3.3).

3.2. Свойства операторов, содержащих нелинейные преобразования, в весовых пространствах

Лемма 3.3. *При достаточно малом $\varrho > 0$ для любой функции $W \in H_a^l(K)$ такой, что* $\operatorname{supp} W \subset \overline{K^\varrho}$, *имеем $\zeta_1\widehat{W} \in H_a^l(K)$ и*

$$\|\zeta_1\widehat{W}\|_{H_a^l(K)} \leqslant c\|W\|_{H_a^l(K)},$$

где $c > 0$ не зависит от W и ϱ.

Доказательство. При доказательстве леммы будем пользоваться следующим очевидным утверждением:

$$W \in H_a^l(K) \Longleftrightarrow D^\alpha W \in H^0_{a+|\alpha|-l}(K),\ |\alpha| \leqslant l. \tag{3.12}$$

Из формулы (3.11) и неравенств (3.8) следует, что преобразование (3.11) отображает $K^\varrho \cap \{y : |\omega| < \delta\}$ в K. Кроме того, из неравенств (3.2), (3.3) следует, что модуль якобиана преобразования (3.11) при малых ϱ ограничен и отличен от нуля в $K^\varrho \cap \{y : |\omega| < \delta\}$. Отсюда вытекает справедливость леммы при $l = 0$ с функцией ζ_0 вместо ζ_1.

Рассмотрим функции $\zeta_0^p \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $(p = 0, \dots, l)$, такие, что $\zeta_0^0 = \zeta_0$, $\zeta_0^l = \zeta_1$, $\zeta_0^{p-1}(\omega) = 1$ при $\omega \in \operatorname{supp}\zeta_0^p$ $(p = 1, \dots, l)$. Пусть лемма верна при $l = p - 1$ с функцией ζ_0^{p-1} вместо ζ_1; докажем, что она верна при $l = p$ с функцией ζ_0^p вместо ζ_1 $(p \geqslant 1)$. Итак, пусть $W \in H_a^p(K)$; тогда $\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \omega}$, $\frac{\partial W}{\partial r} \in H_a^{p-1}(K)$. Следовательно, по индуктивному предположению $\zeta_0^{p-1}\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \omega}}$, $\zeta_0^{p-1}\widehat{\frac{\partial W}{\partial r}} \in H_a^{p-1}(K)$. Отсюда, из соотношений

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial \omega} = \widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \omega}}\left(1 + \frac{R'_\sigma}{r}\right),\\ \frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial r} = \widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \omega}}\left(1 + \frac{R'_\sigma}{r}\right) r\frac{\partial \Phi'_\sigma}{\partial r} + \widehat{\frac{\partial W}{\partial r}}\left(1 + \frac{\partial R'_\sigma}{\partial r}\right),\end{gathered} \tag{3.13}$$

неравенств (3.2), (3.3) и леммы 2.1 [36] получим

$$\zeta_0^{p-1}\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\omega},\ \zeta_0^{p-1}\frac{\partial\widehat{W}}{\partial r}\in H_a^{p-1}(K). \tag{3.14}$$

Кроме того, из соотношения $W\in H_a^p(K)$, вложения $H_a^p(K)\subset H_{a-p}^0(K)$ и утверждения леммы при $l=0$ получим $\zeta_0^p\widehat{W}\in H_{a-p}^0(K)$. Отсюда, из (3.12) и (3.14) следует, что $D^\alpha(\zeta_0^p\widehat{W})\in H_{a+|\alpha|-p}^0(K)$, $|\alpha|\leqslant p$. Снова используя (3.12), получаем требуемое утверждение. □

Таким образом, оператор $W\mapsto\zeta_1\widehat{W}$ является ограниченным в $H_a^l(K)$.

Лемма 3.4. *Для любой функции $W\in H_a^l(K)$ такой, что $\operatorname{supp}W\subset\overline{K^\varrho}$, и любого мультииндекса γ, $1\leqslant|\gamma|\leqslant l$, выполняется неравенство*

$$\|\zeta_2D^\gamma\widehat{W}-\zeta_2\widehat{D^\gamma W}\|_{H_a^{l-|\gamma|}(K)}\leqslant c\varrho\|W\|_{H_a^l(K)}, \tag{3.15}$$

где $c>0$ не зависит от W и ϱ.

Доказательство. Рассмотрим функции $\zeta_1^p\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ $(p=1,\dots,l)$, такие, что $\zeta_1^1=\zeta_1$, $\zeta_1^l=\zeta_2$, $\zeta_1^{p-1}(\omega)=1$ при $\omega\in\operatorname{supp}\zeta_1^p$ $(p=2,\dots,l)$.

Пусть $|\gamma|=1$; тогда неравенство (3.15) достаточно доказать для случая, когда вместо оператора D^γ стоят операторы $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\omega}$, $\frac{\partial}{\partial r}$. Рассмотрим, например, оператор $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\omega}$ (остальные операторы рассматриваются аналогично). Первое из соотношений (3.13) совместно с формулой Лейбница дает

$$\left\|\zeta_1^1\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\omega}-\zeta_1^1\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\omega}}\right\|^2_{H_a^{l-1}(K)}=\left\|\zeta_1^1\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\omega}}\frac{R'_\sigma}{r}\right\|^2_{H_a^{l-1}(K)}\leqslant$$

$$\leqslant k_1\sum_{|\alpha|\leqslant l-1}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int\limits_K r^{2(a+|\alpha|-(l-1))}\left|D^{\alpha-\beta}\frac{R'_\sigma}{r}\right|^2\left|D^\beta\left(\zeta_1^1\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\omega}}\right)\right|^2dy.$$

Отсюда, из последнего неравенства в (3.2) и последнего неравенства в (3.3) получим

$$\left\|\zeta_1^1\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\omega}-\zeta_1^1\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\omega}}\right\|^2_{H_a^{l-1}(K)}\leqslant k_2\varrho^2\left\|\zeta_1^1\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\omega}}\right\|^2_{H_a^{l-1}(K)}. \tag{3.16}$$

Оценка (3.16) и лемма 3.3 доказывают лемму при $|\gamma|=1$ с функцией ζ_1^1 вместо ζ_2.

Предположим, что лемма верна для $1 \leqslant |\gamma| \leqslant p-1$ с функцией ζ_1^{p-1} вместо ζ_2. Докажем, что она верна для $|\gamma| = p$ с функцией ζ_1^p вместо ζ_2 ($p \geqslant 2$). Имеем

$$\begin{aligned}
\|\zeta_1^p D^\gamma \widehat{W} - \zeta_1^p \widehat{D^\gamma W}\|_{H_a^{l-|\gamma|}(K)} &\leqslant \|\zeta_1^p D^{|\gamma|-1}(D^1\widehat{W}) - \zeta_1^p D^{|\gamma|-1}\widehat{D^1 W}\|_{H_a^{l-|\gamma|}(K)} + \\
&+ \|\zeta_1^p D^{|\gamma|-1}\widehat{D^1 W} - \zeta_1^p \widehat{D^{|\gamma|-1}(D^1 W)}\|_{H_a^{l-|\gamma|}(K)} \leqslant \\
&\leqslant k_3\Big(\|\zeta_1^{p-1} D^1\widehat{W} - \zeta_1^{p-1}\widehat{D^1 W}\|_{H_a^{l-1}(K)} + \\
&+ \|\zeta_1^p D^{|\gamma|-1}\widehat{D^1 W} - \zeta_1^p \widehat{D^{|\gamma|-1}(D^1 W)}\|_{H_a^{l-|\gamma|}(K)}\Big),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

где $D^{|\gamma|-1}$ и D^1 — некоторые обобщенные производные порядков $|\gamma|-1$ и 1 соответственно. В силу индуктивного предположения для каждой из двух норм в правой части (3.17) справедливы оценки

$$\|\zeta_1^{p-1} D^1\widehat{W} - \zeta_1^{p-1}\widehat{D^1 W}\|_{H_a^{l-1}(K)} \leqslant k_4 \varrho \|W\|_{H_a^l(K)},$$

$$\|\zeta_1^p D^{|\gamma|-1}\widehat{D^1 W} - \zeta_1^p \widehat{D^{|\gamma|-1}(D^1 W)}\|_{H_a^{l-|\gamma|}(K)} \leqslant k_5 \varrho \|D^1 W\|_{H_a^{l-1}(K)} \leqslant k_6 \varrho \|W\|_{H_a^l(K)}.$$

Отсюда и из (3.17) вытекает требуемое утверждение. □

По сути, множитель ϱ возникает в оценке (3.15) за счет того, что как уменьшаемое, так и вычитаемое в левой части неравенства содержат одно и то же преобразование переменных $\Omega_\sigma(\mathcal{G}_\sigma^{-1} y)$, но уменьшаемое есть производная от преобразованной функции, а вычитаемое — преобразование от производной.

Лемма 3.5. *Для любой функции $U \in H_a^{l+2m}(K)$ такой, что $\operatorname{supp} U \subset \overline{K^\varrho}$, выполняется неравенство*

$$\begin{aligned}
\|(B_{\sigma\mu 1}U)(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}U)(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma)} &\leqslant \\
\leqslant c\left(\varrho\|U\|_{H_a^{l+2m}(K)} + \|\zeta_3 U - \zeta_3 \widehat{U}\|_{H_a^{l+2m}(K)}\right),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где $c > 0$ не зависит от U и ϱ.

Доказательство. Используя непрерывность оператора взятия следа в весовых пространствах, получим

$$\begin{aligned}
\|(B_{\sigma\mu 1}U)(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}U)(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma)} &\leqslant \\
\leqslant k_1\|\zeta_4 B_{\sigma\mu 1}U - \zeta_4 \widehat{B_{\sigma\mu 1}U}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu}(K)} &\leqslant \\
\leqslant k_1\Big(\|\zeta_4 B_{\sigma\mu 1}U - \zeta_4 B_{\sigma\mu 1}\widehat{U}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu}(K)} + \\
+ \|\zeta_4 B_{\sigma\mu 1}\widehat{U} - \zeta_4 \widehat{B_{\sigma\mu 1}U}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu}(K)}\Big).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Оценим первую норму в правой части неравенства (3.19):

$$\|\zeta_4 B_{\sigma\mu 1} U - \zeta_4 B_{\sigma\mu 1} \widehat{U}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu}(K)} \leqslant k_2 \|\zeta_3 U - \zeta_3 \widehat{U}\|_{H_a^{l+2m}(K)}. \tag{3.20}$$

Вторая норма в правой части неравенства (3.19) оценивается при помощи леммы 3.4:

$$\|\zeta_4 B_{\sigma\mu 1} \widehat{U} - \zeta_4 \widehat{B_{\sigma\mu 1} U}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu}(K)} \leqslant k_3 \varrho \|U\|_{H_a^{l+2m}(K)}. \tag{3.21}$$

Из (3.19)–(3.21) следует утверждение леммы. □

Отметим, что правая часть неравенства (3.18) содержит норму разности непреобразованной и преобразованной функций. Для оценки таких разностей нам понадобится следующая

Лемма 3.6. *Для любой функции* $W \in H_{a+1}^1(K)$ *такой, что* $\operatorname{supp} W \subset \overline{K^\varrho}$, *выполняется неравенство*

$$\|\zeta_1 W - \zeta_1 \widehat{W}\|_{H_a^0(K)} \leqslant c\varrho \|W\|_{H_{a+1}^1(K)}. \tag{3.22}$$

где $c > 0$ *не зависит от* W *и* ϱ.

Доказательство. Записывая аргументы функций W и $\widehat{W}$ в полярных координатах, получим

$$\begin{aligned}\|\zeta_1 W - \zeta_1 \widehat{W}\|_{H_a^0(K)} \leqslant \|\zeta_1 W(\omega, r) - \zeta_1 W(\omega + \Phi'_\sigma(r), r)\|_{H_a^0(K)} + \\ + \|\zeta_1 W(\omega + \Phi'_\sigma(r), r) - \zeta_1 W(\omega + \Phi'_\sigma(r), r + R'_\sigma(r))\|_{H_a^0(K)}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Оценим квадрат первой нормы в правой части (3.23), используя неравенство Шварца:

$$\begin{aligned}\|\zeta_1 W(\omega, r) - \zeta_1 W(\omega + \Phi'_\sigma(r), r)\|^2_{H_a^0(K)} = \int\limits_0^\infty r^{2a} r\, dr \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \zeta_1 \int\limits_\omega^{\omega + \Phi'_\sigma(r)} \frac{\partial W}{\partial \omega'}\, d\omega' \right|^2 d\omega \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^\infty r^{2a} r\, dr \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} |\zeta_1|^2 |\Phi'_\sigma(r)| \cdot \left| \int\limits_\omega^{\omega + \Phi'_\sigma(r)} \left| \frac{\partial W}{\partial \omega'} \right|^2 d\omega' \right| d\omega.\end{aligned}$$

Учитывая ограничения на носители функций W, ζ_1 и неравенства (3.8), поменяем порядок интегрирования по ω и ω'; в результате, используя (3.2), получим

$$\|\zeta_1 W(\omega,r) - \zeta_1 W(\omega+\Phi'_\sigma(r),r)\|^2_{H^0_a(K)} \leqslant$$
$$\leqslant k_1 \int\limits_0^\infty r^{2a} r|\Phi'_\sigma(r)|^2\,dr \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \left|\frac{\partial W}{\partial\omega}\right|^2 d\omega \leqslant$$
$$\leqslant k_2\varrho^2 \int\limits_0^\infty r^{2(a+1)} r\,dr \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \left|\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\omega}\right|^2 d\omega \leqslant k_3\varrho^2\|W\|^2_{H^1_{a+1}(K)}.$$

Аналогичным образом оценивается квадрат второй нормы в правой части (3.23).

□

Таким образом, множитель ϱ в неравенстве (3.22) возникает, если увеличить показатель дифференцируемости на 1 (левая часть (3.22) содержит норму в $H^0_a(K)$, а правая — в $H^1_{a+1}(K)$). Это объясняется тем, что, в отличие от неравенства (3.15), в данном случае оценивается разность двух функций, одна из которых не содержит преобразование переменных, а другая содержит.

4. Фредгольмова разрешимость нелокальных задач и устойчивость индекса

4.1. Априорные оценки решений

В данном пунктке докажем априорную оценку для оператора $\mathbf{L}$, гарантирующую конечномерность его ядра и замкнутость образа.

Условие 4.1. *Прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.4 *и* 4.1. *Тогда*

$$\|u\|_{H^{l+2m}_a(G)} \leqslant c\left(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{H}^l_a(G,\partial G)} + \|u\|_{H^0_{a+1-l-2m}(G)}\right) \quad \forall u \in H^{l+2m}_a(G),$$

где $c>0$ *не зависит от* u.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.1 в [23], используя принцип разбиения единицы и формулу Лейбница, сведем доказательство леммы 4.1 к доказательству при достаточно малом $\varrho>0$ априорной оценки

$$\|U\|_{H^{l+2m}_a(K)} \leqslant c\|\mathcal{L}^\Omega U\|_{\mathcal{H}^l_a(K,\gamma)} \quad \forall U \in H^{l+2m}_a(K),\ \operatorname{supp} U \subset \overline{K^\varrho}, \tag{4.1}$$

где $c > 0$ не зависит от U.

Итак, докажем (4.1). В силу условия 4.1 и теоремы 2.1 в [62] оператор $\mathcal{L} : H_a^{l+2m}(K) \to \mathcal{H}_a^l(K,\gamma)$ имеет ограниченный обратный. Следовательно, применяя лемму 3.5, для $U \in H_a^{l+2m}(K)$, $\operatorname{supp} U \subset \overline{K^\varrho}$, получим

$$\begin{aligned} \|U\|_{H_a^{l+2m}(K)} &\leqslant k_1 \|\mathcal{L}U\|_{\mathcal{H}_a^l(K,\gamma)} \leqslant \\ &\leqslant k_2 \left(\|\mathcal{L}^\Omega U\|_{\mathcal{H}_a^l(K,\gamma)} + \varrho \|U\|_{H_a^{l+2m}(K)} + \|\zeta_3 U - \zeta_3 \widehat{U}\|_{H_a^{l+2m}(K)} \right), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от U и ϱ.

Оценим последнюю норму в (4.2). По теореме 4.1 в [40]

$$\begin{aligned} \|\zeta_3 U - \zeta_3 \widehat{U}\|_{H_a^{l+2m}(K)} &\leqslant \\ &\leqslant k_3 \left(\|\mathcal{P}(D)(\zeta_3 U - \zeta_3 \widehat{U})\|_{H_a^l(K)} + + \|\zeta_3 U - \zeta_3 \widehat{U}\|_{H^0_{a-l-2m}(K)} \right), \end{aligned} \tag{4.3}$$

В силу леммы 3.6 и непрерывности вложения $H_a^{l+2m}(K) \subset H^1_{a-l-2m+1}(K)$ имеем

$$\|\zeta_3 U - \zeta_3 \widehat{U}\|_{H^0_{a-l-2m}(K)} \leqslant k_4 \varrho \|U\|_{H_a^{l+2m}(K)}. \tag{4.4}$$

Для оценки первой нормы в правой части (4.3) воспользуемся формулой Лейбница и леммами 3.3 и 3.4:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(D)(\zeta_3 U - \zeta_3 \widehat{U})\|_{H_a^l(K)} &\leqslant k_5 \Big(\|\zeta_3 \mathcal{P}(D) U\|_{H_a^l(K)} + \|\zeta_3 \mathcal{P}(D) \widehat{U}\|_{H_a^l(K)} + \\ &+ \sum_{|\beta| \leqslant 2m-1} \sum_{|\gamma| = 2m-|\beta|} \|D^\gamma \zeta_3 D^\beta U - D^\gamma \zeta_3 D^\beta \widehat{U}\|_{H_a^l(K)} \Big) \leqslant k_6 \Big(\|\mathcal{P}(D) U\|_{H_a^l(K)} + \\ &+ \varrho \|U\|_{H_a^{l+2m}(K)} + \sum_{|\beta| \leqslant 2m-1} \sum_{|\gamma| = 2m-|\beta|} \|D^\gamma \zeta_3 D^\beta U - D^\gamma \zeta_3 D^\beta \widehat{U}\|_{H_a^l(K)} \Big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Так как $|D^\gamma \zeta_3| \leqslant k_7 r^{-|\gamma|} |\zeta_2|$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|\beta| \leqslant 2m-1} \sum_{|\gamma| = 2m-|\beta|} &\|D^\gamma \zeta_3 D^\beta U - D^\gamma \zeta_3 D^\beta \widehat{U}\|_{H_a^l(K)} \leqslant \\ &\leqslant k_8 \sum_{|\alpha| \leqslant l+2m-1} \|\zeta_2 D^\alpha U - \zeta_2 D^\alpha \widehat{U}\|_{H^0_{a+|\alpha|-l-2m}(K)} \leqslant \\ &\leqslant k_9 \sum_{|\alpha| \leqslant l+2m-1} \Big(\|\zeta_2 D^\alpha U - \zeta_2 \widehat{D^\alpha U}\|_{H^0_{a+|\alpha|-l-2m}(K)} + \\ &+ \|\zeta_2 \widehat{D^\alpha U} - \zeta_2 D^\alpha \widehat{U}\|_{H^0_{a+|\alpha|-l-2m}(K)} \Big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Используя лемму 3.6 и непрерывность вложения $H_a^{l+2m}(K) \subset H^{1+|\alpha|}_{a+1+|\alpha|-l-2m}(K)$ при $|\alpha| \leqslant l + 2m - 1$, получим

$$\begin{aligned} \|\zeta_2 D^\alpha U - \zeta_2 \widehat{D^\alpha U}\|_{H^0_{a+|\alpha|-l-2m}(K)} &\leqslant \\ &\leqslant k_{10} \varrho \|D^\alpha U\|_{H^1_{a+1+|\alpha|-l-2m}(K)} \leqslant k_{11} \varrho \|U\|_{H_a^{l+2m}(K)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Аналогично, из леммы 3.4 следует, что

$$\|\zeta_2\widehat{D^\alpha U} - \zeta_2 D^\alpha \widehat{U}\|_{H^0_{a+|\alpha|-l-2m}(K)} \leqslant k_{12}\varrho\|U\|_{H^{l+2m}_a(K)}. \tag{4.8}$$

Теперь оценка (4.1) вытекает из (4.2)–(4.8) при достаточно малом ϱ. $\square$

В силу компактности вложения $H^{l+2m}_a(G) \subset H^0_{a+1-l-2m}(G)$ (см. лемму 3.5 в [36]), из леммы 4.1 следует, что оператор $\mathbf{L}$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

4.2. Построение правого регуляризатора. Фредгольмова разрешимость нелокальных задач

В этом пункте будет построен правый регуляризатор для оператора $\mathbf{L}$, что совместно с леммой 4.1 позволит доказать фредгольмовость нелокальной краевой задачи (2.6), (2.7).

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.4 *и* 4.1. *Тогда существует такой ограниченный оператор* $\mathbf{R} : \mathcal{H}^l_a(G, \partial G) \to H^{l+2m}_a(G)$ *и компактный оператор* $\mathbf{T} : \mathcal{H}^l_a(G, \partial G) \to \mathcal{H}^l_a(G, \partial G)$, *что*

$$\mathbf{LR} = \mathbf{I} + \mathbf{T},$$

где $\mathbf{I}$ — *единичный оператор в* $\mathcal{H}^l_a(G, \partial G)$.

Доказательство. 1. Аналогично доказательству теоремы 5.2 в [23], используя принцип разбиения единицы и формулу Лейбница, сведем доказательство леммы 4.2 к доказательству следующего утверждения: *для всех достаточно малых* $\varrho > 0$ *существуют ограниченные операторы* $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$ *и компактный оператор* $\mathcal{T}$, *действующие из* $\{f \in \mathcal{H}^l_a(K, \gamma) : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}_{d_1\varrho/4}(0)\}$ *в* $H^{l+2m}_a(K)$, $\mathcal{H}^l_a(K, \gamma)$ *и* $\mathcal{H}^l_a(K, \gamma)$ *соответственно и удовлетворяющие условиям*

$$\mathcal{L}^\Omega \mathcal{R} f = f + \mathcal{M} f + \mathcal{T} f, \tag{4.9}$$

$\|\mathcal{M} f\|_{\mathcal{H}^l_a(K,\gamma)} \leqslant c\varrho\|f\|_{\mathcal{H}^l_a(K,\gamma)}$. *Здесь* d_1 — *число, определенное в* (2.2), *а* $c > 0$ *не зависит от* ϱ *и* f.

Итак, построим операторы $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$, удовлетворяющие соотношению (4.9).

Введем функцию $\psi_\varrho(y) = \psi(y/\varrho)$, где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi(y) = 1$ при $|y| \leqslant 1$, $\psi(y) = 0$ при $|y| \geqslant 2$. Очевидно, $\psi_\varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_\varrho(y) = 1$ при $|y| \leqslant \varrho$, $\psi_\varrho(y) = 0$

при $|y| \geqslant 2\varrho$. Поскольку при этом $|D^\alpha \psi_\varrho| \leqslant c_\alpha r^{-|\alpha|}$, из леммы 2.1 в [36] следует оценка

$$\|\psi_\varrho v\|_{H_a^{l+2m}(K)} \leqslant c\|v\|_{H_a^{l+2m}(K)} \quad \text{для всех } v \in H_a^{l+2m}(K), \tag{4.10}$$

где $c > 0$ не зависит от ϱ. Пусть, кроме того, ψ_ϱ, будучи записанной в полярных координатах, не зависит от ω.

Положим $f' = \{f_{\sigma\mu}\}$. В силу условия 4.1 и теоремы 2.1 в [62] оператор $\mathcal{L} : H_a^{l+2m}(K) \to \mathcal{H}_a^l(K, \gamma)$ имеет ограниченный обратный. Следовательно, мы можем определить операторы

$$\mathcal{R}_0 : H_a^l(K) \to H_a^{l+2m}(K), \quad \mathcal{R}' : \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) \to H_a^{l+2m}(K)$$

по формулам

$$\mathcal{R}_0 f_0 = \psi_\varrho \mathcal{L}^{-1}(f_0, 0), \quad \mathcal{R}' f' = \psi_\varrho \mathcal{L}^{-1}(0, f').$$

Таким образом, носители функций $\mathcal{R}_0 f_0$ и $\mathcal{R}' f'$ лежат в шаре радиуса 2ϱ с центром в начале координат.

Введем операторы

$$\mathcal{P} : H_a^{l+2m}(K) \to H_a^l(K), \quad \mathcal{B}, \mathcal{B}^\Omega : \ H_a^{l+2m}(K) \to \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma),$$

действующие по формулам

$$\mathcal{P}U = \mathcal{P}(D)U, \quad \mathcal{B}U = \{\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D)U\}, \quad \mathcal{B}^\Omega U = \{\mathcal{B}^\Omega_{\sigma\mu}(D)U\}.$$

Установим связь между операторами $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\Omega$ и $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}'$. При этом мы будем использовать следующее свойство весовых пространств (см. лемму 3.5 в [36]): оператор вложения

$$\{v \in H_a^{l+1}(K) : \operatorname{supp} v \subset \mathcal{O}_d(0), \ d > 0\} \subset H_a^l(K) \tag{4.11}$$

при любом $d > 0$ компактен.

Из формулы Лейбница, ограниченности носителя $\operatorname{supp} \psi_\varrho$ и компактности вложения (4.11) следует, что

$$\mathcal{P}\mathcal{R}_0 f_0 = \psi_\varrho f_0 + \mathcal{T}_0 f_0, \quad \mathcal{P}\mathcal{R}' f' = \mathcal{T}' f'. \tag{4.12}$$

Здесь $\mathcal{T}_0 : H_a^l(K) \to H_a^l(K)$, $\mathcal{T}' : \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) \to H_a^l(K)$ — компактные операторы. Аналогично,

$$\mathcal{B}\mathcal{R}' f' = \psi_\varrho f' + \big\{(\psi_\varrho(\chi_\sigma y) - \psi_\varrho(y))(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{L}^{-1}(0, f'))(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\big\} + \mathcal{T}_1 f', \tag{4.13}$$

где $\mathcal{T}_1$ — компактный оператор в $\mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$; фигурные скобки указывают на то, что выражение $\{\ldots\}$ есть вектор, компоненты которого определяются индексами σ, μ.

Покажем, что каждое слагаемое, стоящее под знаком суммы в (4.13), есть компактный оператор. Пусть ζ_i есть функции, введенные по формулам (3.9). Введем также функции $\hat{\psi}_0$, $\hat{\psi}_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{\psi}_1(y) = 1 \text{ при } 2d_1\varrho \leqslant |y| \leqslant d_2\varrho,\ \hat{\psi}_1(y) = 0 \text{ вне } d_1\varrho \leqslant |y| \leqslant 2d_2\varrho,$$

$$\hat{\psi}_0(y) = 1 \text{ при } d_1\varrho \leqslant |y| \leqslant 2d_2\varrho,\ \hat{\psi}_0(y) = 0 \text{ вне } d_1\varrho/2 \leqslant |y| \leqslant 4d_2\varrho,$$

где d_1 и d_2 — числа, определенные в (2.2). Тогда в силу непрерывности оператора взятия следа в весовых пространствах

$$\begin{aligned}\|(\psi_\varrho(\chi_\sigma y) - \psi_\varrho(y))(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{L}^{-1}(0,f'))(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma)} \leqslant \\ \leqslant k_2\|\zeta_2(\psi_\varrho(y) - \psi_\varrho(\chi_\sigma^{-1}y))B_{\sigma\mu 1}\mathcal{L}^{-1}(0,f')\|_{H_a^{l+2m-m_\mu}(K)} \leqslant \\ \leqslant k_3\|\zeta_1\hat{\psi}_1\mathcal{L}^{-1}(0,f')\|_{H_a^{l+2m}(K)}. \quad (4.14)\end{aligned}$$

Так как носитель функции $\hat{\psi}_1$ ограничен и отделен от нуля, а функция ζ_1 равна нулю вблизи сторон угла K, то мы можем воспользоваться теоремой 5.1 в [39, гл. 2]: используя соотношение $\mathcal{P}\mathcal{L}^{-1}(0,f') = 0$, из (4.14) получим

$$\begin{aligned}\|(\psi_\varrho(\chi_\sigma y) - \psi_\varrho(y))(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{L}^{-1}(0,f'))(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma)} \leqslant \\ \leqslant k_4\|\hat{\psi}_0\mathcal{L}^{-1}(0,f')\|_{H_a^{l+2m-1}(K)}.\end{aligned}$$

Так как носитель функции $\hat{\psi}_0$ ограничен, то из последнего неравенства и компактности вложения (4.11) следует, что

$$\left\{(\psi_\varrho(\chi_\sigma y) - \psi_\varrho(y))(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{L}^{-1}(0,f'))(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\right\}$$

есть компактный оператор в $\mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$. Совместно с (4.13) это дает

$$\mathcal{B}\mathcal{R}'f' = \psi_\varrho f' + \mathcal{T}_2 f', \quad (4.15)$$

где $\mathcal{T}_2$ компактный оператор в $\mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$.

Наконец, из (4.15) получим формулу для композиции $\mathcal{B}^\Omega\mathcal{R}'$:

$$\mathcal{B}^\Omega\mathcal{R}'f' = \psi_\varrho f' + \mathcal{T}_2 f' + \left\{(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}'f')(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}'f')(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\right\}. \quad (4.16)$$

2. Введем оператор $\mathcal{R} : \mathcal{H}_a^l(K,\gamma) \to H_a^{l+2m}(K)$, действующий по формуле

$$\mathcal{R}(f_0, f') = \mathcal{R}_0 f_0 - \tilde{\mathcal{R}}'\mathcal{B}^\Omega\mathcal{R}_0 f_0 + \mathcal{R}'f'.$$

Здесь $\tilde{\mathcal{R}}' : \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) \to H_a^{l+2m}(K)$ — ограниченный оператор, действующий по формуле

$$\tilde{\mathcal{R}}' f' = \psi_\varrho(d_1 y/2)\mathcal{L}^{-1}(0, f').$$

Аналогично (4.12) и (4.16) доказывается, что

$$\mathcal{P}\tilde{\mathcal{R}}' f' = \tilde{\mathcal{T}}' f', \tag{4.17}$$

$$\mathcal{B}^\Omega \tilde{\mathcal{R}}' f' = \psi_\varrho(d_1 y/2) f' + \mathcal{T}_2' f' + \Big\{ (B_{\sigma\mu 1}\tilde{\mathcal{R}}' f')(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}\tilde{\mathcal{R}}' f')(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} \Big\}, \tag{4.18}$$

где $\tilde{\mathcal{T}}'$, $\mathcal{T}_2'$ — компактные операторы, действующие в тех же пространствах, что и операторы $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}_2$.

Покажем, что $\mathcal{R}$ удовлетворяет соотношению (4.9). Из формул (4.12) и (4.17) следует, что

$$\mathcal{P}\mathcal{R}(f_0, f') = \psi_\varrho f_0 + \mathcal{T}_3(f_0, f'), \tag{4.19}$$

где $\mathcal{T}_3 : \mathcal{H}_a^l(K, \gamma) \to H_a^l(K)$ — компактный оператор.

Далее, учитывая, что $\psi_\varrho(d_1 y/2)\mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0 \equiv \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0$, при помощи (4.18) получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}(f_0, f') &= \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0 - \mathcal{B}^\Omega \tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0 + \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}' f' = \\
&= -\mathcal{T}_2' \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0 - \Big\{ \sum_{k,\,q,\,s} \Big((B_{\sigma\mu 1}[\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0]_k)\Omega_\sigma(y)|_{\gamma_\sigma} - \\
&\qquad - (B_{\sigma\mu 1}[\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0]_k)(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} \Big) \Big\} + \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}' f'.
\end{aligned}$$

Отсюда, используя (4.16), получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^\Omega \mathcal{R} g = \psi_\varrho f' + \mathcal{T}_6(f_0, f') + \{ (B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}' f')(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}' f')(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} \} - \\
- \Big\{ (B_{\sigma\mu 1}\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0)\Omega_\sigma(y)|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}\tilde{\mathcal{R}}' \mathcal{B}^\Omega \mathcal{R}_0 f_0)(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} \Big\},
\end{aligned} \tag{4.20}$$

где $\mathcal{T}_6 : \mathcal{H}_a^l(K, \gamma) \to \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$ — компактный оператор.

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком первой суммы в правой части (4.20). По лемме 3.5

$$\begin{aligned}
\|(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}' f')(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}' f')(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma)} \leqslant \\
\leqslant k_5 \Big(\varrho \|\mathcal{R}' f'\|_{H_a^{l+2m}(K)} + \|\zeta_3 \mathcal{R}' f' - \zeta_3 \widehat{\mathcal{R}' f'}\|_{H_a^{l+2m}(K)} \Big).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Повторяя выкладки (4.3)–(4.8) применительно к $U = \mathcal{R}'f'$, из (4.21) и (4.12) получим

$$\|(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}'f')(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}'f')(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma)} \leqslant$$
$$\leqslant k_6\left(\varrho\|\mathcal{R}'f'\|_{H_a^{l+2m}(K)} + \|\mathcal{P}\mathcal{R}'f'\|_{H_a^l(K)}\right) =$$
$$= k_6\left(\varrho\|\psi_\varrho\mathcal{L}^{-1}(0,f')\|_{H_a^{l+2m}(K)} + \|\mathcal{T}'f'\|_{H_a^l(K)}\right).$$

Отсюда, из неравенства (4.10) и ограниченности оператора $\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{H}_a^l(K,\gamma) \to H_a^{l+2m}(K)$ окончательно выводим

$$\|(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}'f')(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}'f')(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma}\|_{H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma)} \leqslant$$
$$\leqslant k_7(\varrho\|f'\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)} + \|\mathcal{T}'f'\|_{H_a^l(K)}). \quad (4.22)$$

Следовательно, по лемме 1.1

$$(B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}'f')(\Omega_\sigma(y))|_{\gamma_\sigma} - (B_{\sigma\mu 1}\mathcal{R}'f')(\mathcal{G}_\sigma y)|_{\gamma_\sigma} = \mathcal{M}_{\sigma\mu}f' + \mathcal{F}_{\sigma\mu}f',$$

где $\mathcal{M}_{\sigma\mu}, \mathcal{F}_{\sigma\mu} : \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) \to H_a^{l+2m-m_\mu-1/2}(\gamma_\sigma)$ — ограниченные операторы, причем $\|\mathcal{M}_{\sigma\mu}\| \leqslant 2k_7\varrho$, а оператор $\mathcal{F}_{\sigma\mu}$ конечномерный.

Аналогично доказывается, что слагаемые, стоящие во второй сумме в правой части (4.20), представимы в виде «оператор с малой нормой + конечномерный». Отсюда, из (4.20) и (4.19), полагая $\operatorname{supp}(f_0, f') \subset \mathcal{O}_\varrho(0)$, получаем соотношение (4.9). □

Теперь мы можем доказать фредгольмовость оператора $\mathbf{L} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.4 *и* 4.1. *Тогда оператор* $\mathbf{L} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ *фредгольмов.*

Доказательство. Фредгольмовость оператора $\mathbf{L} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ следует из лемм 4.1 и 4.2 настоящей работы и теорем 7.1 и 15.2 в [38]. □

4.3. Устойчивость индекса по отношению к нелинейным возмущениям преобразований

Покажем, что индекс задачи определяется только линейной частью преобразований Ω_σ в окрестности начала координат.

Обозначим через $\hat{\Omega}_\sigma$, $\sigma = 1, 2$, преобразования, обладающие теми же свойствами, что и Ω_σ (см. § 2). Рассмотрим операторы

$$\hat{\mathbf{B}}^1_\mu u = \begin{cases} (B_{\mu 1}(y, D)(\zeta u))(\hat{\Omega}_\sigma(y))|_{\gamma^\varepsilon_\sigma}, & y \in \gamma^\varepsilon_\sigma,\ \sigma = 1, 2, \\ 0, & y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(0). \end{cases}$$

Введем операторы $\hat{\mathbf{B}}_\mu = \mathbf{B}^0_\mu + \hat{\mathbf{B}}^1_\mu + \mathbf{B}^2_\mu$ и

$$\hat{\mathbf{L}} = \{\mathbf{P}(y, D),\, \hat{\mathbf{B}}_\mu\} : H^{l+2m}_a(G) \to \mathcal{H}^l_a(G, \partial G)$$

(ср. (2.8)).

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.4 *и* 4.1*, причем условие* 2.3 *выполнено для преобразований* Ω_σ *и* $\hat{\Omega}_\sigma$ *с одним и тем же линейным оператором* $\mathcal{G}_\sigma$*. Тогда операторы* $\mathbf{L}, \hat{\mathbf{L}} : H^{l+2m}_a(G) \to \mathcal{H}^l_a(G, \partial G)$ *фредгольмовы и* $\operatorname{ind} \mathbf{L} = \operatorname{ind} \hat{\mathbf{L}}$.

Доказательство. Введем оператор $\mathbf{L}_t : H^{l+2m}_a(G) \to \mathcal{H}^l_a(G, \partial G)$ по формуле

$$\mathbf{L}_t u = \{\mathbf{P}(y, D)u,\ \mathbf{B}_\mu + t(\hat{\mathbf{B}}_\mu - \mathbf{B}_\mu\}.$$

Очевидно, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}$, $\mathbf{L}_1 = \hat{\mathbf{L}}$.

Преобразования Ω_σ и $\hat{\Omega}_\sigma$ совпадают с точностью до бесконечно малых в окрестности начала координат; поэтому в силу теоремы 4.1 операторы $\mathbf{L}_t$ фредгольмовы при всех t. Далее, для любых t_0, t

$$\|\mathbf{L}_t u - \mathbf{L}_{t_0} u\|_{\mathcal{H}^l_a(G, \partial G)} \leqslant k_{t_0} |t - t_0| \cdot \|u\|_{H^{l+2m}_a(G)},$$

где $k_{t_0} > 0$ не зависит от $t \in [0, 1]$. Следовательно, по теореме 16.2 в [38] имеем $\operatorname{ind} \mathbf{L}_t = \operatorname{ind} \mathbf{L}_{t_0}$ для всех t из некоторой достаточно малой окрестности точки t_0. Указанные окрестности покрывают отрезок $[0, 1]$. Выделяя конечное подпокрытие, получаем $\operatorname{ind} \mathbf{L} = \operatorname{ind} \mathbf{L}_0 = \operatorname{ind} \mathbf{L}_1 = \operatorname{ind} \hat{\mathbf{L}}$. □

Замечание 4.1. Результаты этой главы обобщаются на случай, когда область G содержится в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$), граница области состоит из N открытых связных (в топологии ∂G) $(n-1)$-мерных многообразий Γ_i класса C^∞, причем в окрестности каждой точки $g \in \partial G \setminus \bigcup\limits_{i=1}^N \Gamma_i$ область G диффеоморфна n-мерному двугранному (плоскому, если $n = 2$) углу. Точка $g \in \partial G \setminus \bigcup\limits_{i=1}^N \Gamma_i$ не обязательно является неподвижной точкой преобразований, входящих в нелокальные условия, но имеет конечную орбиту (более подробно см. [14]).

Глава II

Сильные решения нелокальных эллиптических задач в плоских углах в пространствах Соболева

5. Функциональные пространства

В этом параграфе мы введем обозначения и определим функциональные пространства, которые используются в главах II–VI.

5.1. Пространства непрерывных функций

Область G и углы K_j

Обозначим через $G \subset \mathbb{R}^2$ ограниченную область с границей ∂G. Введем множество $\mathcal{K} \subset \partial G$, состоящее из N точек, и предположим, что $\partial G \setminus \mathcal{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i$, где Γ_i — открытые (в топологии ∂G) кривые класса C^∞. Для простоты обозначений будем считать, что число точек множества $\mathcal{K}$ равно числу кривых Γ_i (все результаты без труда обобщаются на более общий случай). Предположим, что в окрестности каждой точки $g_j \in \mathcal{K}$ область G совпадает с плоским углом

$$K_j = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ |\omega| < \omega_j\}, \quad j = 1, \dots, N,$$

стороны которого обозначим через

$$\gamma_{j\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega = (-1)^\sigma \omega_j\}, \quad j = 1, \dots, N,\ \sigma = 1, 2;$$

здесь ω, r — полярные координаты с полюсом в точке g_j, $0 < \omega_j < \pi$.

Пространства непрерывных функций

Пусть X и M — замкнутые множества, причем множество X непусто. Наряду с пространствами, введенными в п. 1.2, рассмотрим пространства

$$C_M(X) = \{u \in C(X) : u(y) = 0,\ y \in X \cap M\} \tag{5.1}$$

(если $X \cap M = \varnothing$, то считаем, что $C_M(X) = C(X)$).

Введем также пространство вектор-функций

$$\mathcal{C}_M(\partial G) = \prod_{i=1}^{N} C_M(\overline{\Gamma_i})$$

с нормой

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}_M(\partial G)} = \max_{i=1,\dots,N} \max_{y \in \overline{\Gamma_i}} \|\psi_i\|_{C(\overline{\Gamma_i})},\ \psi = \{\psi_i\},\ \psi_i \in C_M(\overline{\Gamma_i}).$$

5.2. Пространства Соболева

Пространства W скалярных функций

Для функций из введенного в п. 1.2 пространства Соболева докажем следующий результат.

Лемма 5.1. *Пусть $f \in W^l(\mathbb{R}^2)$ и $D^\alpha f(0) = 0$, $|\alpha| \leqslant l-2$, если $l \geqslant 2$. Тогда существует такая последовательность $\{f^s\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $s = 1, 2, \dots$, что $f^s(y) = 0$ в некоторой окрестности начала координат (для каждого s своя окрестность) и $f^s \to f$ в $W^l(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. Как известно, множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ плотно в $W^l(\mathbb{R}^2)$. С другой стороны, по теореме вложения Соболева и теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве множество $\{u \in W^l(\mathbb{R}^2) : D^\alpha u(0) = 0,\ |\alpha| \leqslant l-2\}$ есть замкнутое подпространство конечной коразмерности в $W^l(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, по лемме 8.1 в [38] множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \cap \{u \in W^l(\mathbb{R}^2) : D^\alpha u(0) = 0,\ |\alpha| \leqslant l-2\}$ плотно в $\{u \in W^l(\mathbb{R}^2) : D^\alpha u(0) = 0,\ |\alpha| \leqslant l-2\}$. Таким образом, достаточно доказать лемму для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такой, что $D^\alpha f(0) = 0$, $|\alpha| \leqslant l-2$.

Рассмотрим такую функцию $\xi \in C_0^\infty[0,\infty)$, что $0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1$, $\xi(t) = 1$ при $t < 1$ и $\xi(t) = 0$ при $t > 2$. Положим

$$\xi^s(y) = \xi\Big(-\frac{\ln r}{s}\Big),$$

где $r = |y|$ и $s = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $0 \leqslant \xi^s(y) \leqslant 1$, $\xi^s(y) = 0$ при $|y| < e^{-2s}$, $\xi^s(y) = 1$ при $|y| > e^{-s}$ и $|D^\alpha \xi^s(y)| \leqslant c_\alpha/(r^{|\alpha|}s)$ для любого $|\alpha| \geqslant 1$, где $c_\alpha > 0$ не зависит от не зависит от s и y. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что последовательность $\xi^s f$ сходится к f в $W^l(\mathbb{R}^2)$ при $s \to \infty$. $\square$

Для описанных в п. 5.1 области G и части границы Γ_i введем пространства Соболева отрицательного порядка. Для $l \geqslant 0$ обозначим через $W^{-l}(G) \stackrel{\text{def}}{=} (W^l(G))^*$ пространство, сопряженное[1] с $W^l(G)$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(G)$. Норма в $W^{-l}(G)$ определяется следующим образом:

$$\|u\|_{W^{-l}(G)} = \sup_{0 \neq v \in W^l(G)} \frac{|\langle v, u \rangle|}{\|v\|_{W^l(G)}}.$$

Для $l \geqslant 1$ обозначим через $W^{-(l-1/2)}(\Gamma_i) \stackrel{\text{def}}{=} (W^{l-1/2}(\Gamma_i))^*$ пространство, сопряженное с $W^{l-1/2}(\Gamma_i)$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(\Gamma_i)$. Норма в $W^{-(l-1/2)}(\Gamma_i)$ определяется следующим образом:

$$\|g\|_{W^{-(l-1/2)}(\Gamma_i)} = \sup_{0 \neq \psi \in W^{l-1/2}(\Gamma_i)} \frac{|\langle \psi, g \rangle|}{\|\psi\|_{W^{l-1/2}(\Gamma_i)}}.$$

Пространства W вектор-функций

Для любых $l \geqslant 0$ и целых $m_{i\mu}$ $(0 \leqslant m_{i\mu} \leqslant l + 2m - 1)$ введем пространства вектор-функций

$$\begin{gathered} \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{\mu=1}^{m} W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i), \\ \mathcal{W}^l(G, \partial G) = W^l(G) \times \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \end{gathered} \tag{5.2}$$

(здесь и далее число $m \geqslant 1$ целое).

В § 22 (глава V) рассматриваются нелокальные возмущения задачи Дирихле для оператора Лапласа. В этом случае $m = 1$, $m_{i1} = 0$, и пространства (5.2) будем обозначать следующим образом:

$$\mathcal{W}^{l+3/2}(\partial G) = \prod_{i=1}^{N} W^{l+3/2}(\Gamma_i), \quad \mathcal{W}^l(G, \partial G) = W^l(G) \times \mathcal{W}^{l+3/2}(\partial G). \tag{5.3}$$

[1]Не путать с пространством, сопряженным с $\mathring{W}^l(G)$, где $\mathring{W}^l(G)$ — замыкание множества $C_0^\infty(G)$ по норме пространства $W^l(G)$.

Для любых $l \geqslant 0$ и целых $m_{j\sigma\mu}$ $(0 \leqslant m_{j\sigma\mu} \leqslant l+2m-1)$ введем пространства вектор-функций в плоских углах

$$\mathcal{W}^l(K) = \prod_{j=1}^{N} W^l(K_j), \quad \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) = \prod_{j=1}^{N} \prod_{\sigma=1,2} \prod_{\mu=1}^{m} W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}),$$
$$\mathcal{W}^l(K,\gamma) = \mathcal{W}^l(K) \times \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$$

и пространства вектор-функций на дугах

$$\mathcal{W}^l(-\overline{\omega},\overline{\omega}) = \prod_{j=1}^{N} W^l(-\omega_j,\omega_j), \quad \mathcal{W}^l[-\overline{\omega},\overline{\omega}] = \prod_{j=1}^{N} \big(W^l(-\omega_j,\omega_j) \times \mathbb{C}^{2m}\big),$$

где числа ω_j определяют растворы углов K_j.

Для любого множества M и любого $d > 0$ обозначим через $\mathcal{O}_d(M)$ d-окрестность множества M:

$$\mathcal{O}_d(M) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(y,M) < d\},$$

где $\operatorname{dist}(y,M) = \inf\limits_{\eta\in M} |y-\eta|$.

Для любого $d > 0$ обозначим

$$K_j^d = K_j \cap \mathcal{O}_d(\mathcal{K}), \quad \gamma_{j\sigma}^d = \gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{O}_d(\mathcal{K}).$$

Для любого $d > 0$, $l \geqslant 0$ и целых $m_{j\sigma\mu}$ $(0 \leqslant m_{j\sigma\mu} \leqslant l+2m-1)$ введем пространства вектор-функций

$$\mathcal{W}^l(K^d) = \prod_{j=1}^{N} W^l(K_j^d), \quad \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^d) = \prod_{j=1}^{N} \prod_{\sigma=1,2} \prod_{\mu=1}^{m} W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^d),$$
$$\mathcal{W}^l(K^d,\gamma^d) = \mathcal{W}^l(K^d) \times \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^d).$$

Пространства S скалярных функций

Для любого $l \geqslant 2$ обозначим через $S^l(G)$ подпространство пространства $W^l(G)$, состоящее из функций f_0, удовлетворяющих соотношениям

$$D^\alpha f_0(y) = 0, \quad y \in \mathcal{K},\ |\alpha| \leqslant l-2. \tag{5.4}$$

При $l = 0,1$ полагаем $S^l(G) = W^l(G)$.

Для каждой кривой Γ_i $(i = 1,\dots,N)$ обозначим через g_{i1} и g_{i2} ее концевые точки. Напомним, что в некоторой окрестности точки g_{i1} (g_{i2}) область G совпадает с плоским углом, а кривая Γ_i совпадает с отрезком I_{i1} (I_{i2}). Пусть τ_{i1} (τ_{i2}) —

единичный вектор, параллельный отрезку I_{i1} (I_{i2}). Обозначим $D_{\tau_{i1}} = -i\dfrac{\partial}{\partial\tau_{i1}}$, $D_{\tau_{i2}} = -i\dfrac{\partial}{\partial\tau_{i2}}$.

Для любого $l \geqslant 0$ обозначим через $\mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ подпространство пространства $\mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$, состоящее из таких функций $\{f_{i\mu}\}$, что

$$D^{\beta}_{\tau_{i1}} f_{i\mu}|_{y=g_{i1}} = 0, \quad D^{\beta}_{\tau_{i2}} f_{i\mu}|_{y=g_{i2}} = 0, \quad \beta \leqslant l + 2m - m_{i\mu} - 2. \tag{5.5}$$

Положим $\mathcal{S}^l(G, \partial G) = S^l(G) \times \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$.

Пространства S вектор-функций

Для любого $l \geqslant 2$ обозначим через $\mathcal{S}^l(K)$ подпространство пространства $\mathcal{W}^l(K)$, состоящее из таких функций $\{f_j\}$, что

$$D^{\alpha} f_j|_{y=0} = 0, \quad |\alpha| \leqslant l - 2. \tag{5.6}$$

При $l = 0, 1$ полагаем $\mathcal{S}^l(K) = \mathcal{W}^l(K)$.

Для любого $l \geqslant 0$ обозначим через $\mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$ подпространство пространства $\mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$, состоящее из таких функций $\{f_{j\sigma\mu}\}$, что

$$D^{\beta}_{\tau_{j\sigma}} f_{j\sigma\mu}|_{y=0} = 0, \quad \beta \leqslant l + 2m - m_{j\sigma\mu} - 2, \tag{5.7}$$

где $\tau_{j\sigma}$ — единичный вектор, сонаправленный с лучом $\gamma_{j\sigma}$, $D^{\beta}_{\tau_{j\sigma}} = \dfrac{\partial^{\beta}}{\partial\tau^{\beta}_{j\sigma}}$. Если $l + 2m - m_{j\sigma\mu} - 2 < 0$, то соответствующие условия отсутствуют.

Положим $\mathcal{S}^l(K, \gamma) = \mathcal{S}^l(K) \times \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$.

Аналогично вводятся пространства

$$\mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^d), \quad \mathcal{S}^l(K^d), \quad \mathcal{S}^l(K^d, \gamma^d), \quad d > 0.$$

5.3. Весовые пространства Кондратьева

Пространства скалярных функций

Рассмотрим следующие случаи:

1. $Q = K_j$, $Q = K^d_j$ $(d > 0)$ или $Q = \mathbb{R}^2$; обозначим $\mathcal{M} = \{0\}$;

2. $Q = G$; обозначим $\mathcal{M} = \mathcal{K}$.

Для любого $l \geqslant 0$ и любого $a \in \mathbb{R}$ обозначим через $H^l_a(Q) = H^l_a(Q, \mathcal{M})$ пополнение множества $C_0^\infty(\overline{Q} \setminus \mathcal{M})$ по норме

$$\|u\|_{H^l_a(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int\limits_Q \rho^{2(a-l+|\alpha|)} |D^\alpha u|^2 dy \right)^{1/2},$$

где $\rho = \rho(y) = \operatorname{dist}(y, \mathcal{M})$. Для $l \geqslant 1$ обозначим через $H_a^{l-1/2}(\Gamma)$ пространство следов на гладкой кривой $\Gamma \subset \overline{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma)} = \inf \|u\|_{H^l_a(Q)} \quad (u \in H^l_a(Q) : u|_\Gamma = \psi).$$

В главе VI, наряду со стандартными нормами, нам потребуются нормы в весовых пространствах, зависящие от параметра $q > 0$. Положим

$$\begin{aligned} \|\!|u|\!\|_{H^l_a(G)} &= \left(\|u\|^2_{H^l_a(G)} + q^l \|u\|^2_{H^0_a(G)} \right)^{1/2}, & l \geqslant 0, \\ \|\!|v|\!\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma_i)} &= \left(\|v\|^2_{H_a^{l-1/2}(\Gamma_i)} + q^{l-1/2} \|v\|^2_{H^0_a(\Gamma_i)} \right)^{1/2}, & l \geqslant 1, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $\|v\|_{H^0_a(\Gamma_i)} = \left(\int\limits_{\Gamma_i} \rho^{2a} |v(y)|^{1/2} d\Gamma \right)^{1/2}$.

Из лемм 7.1 и 7.2 в [23] следует, что

$$\|\!|u|_{\Gamma_i}|\!\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c \|\!|u|\!\|_{H^l_a(G)} \qquad \forall u \in H^l_a(G), \tag{5.9}$$

где $c > 0$ не зависит от u и $q > 0$.

Докажем ряд вспомогательных результатов о связи между пространствами Соболева и весовыми пространствами Кондратьева. Зафиксируем произвольный индекс i и положим $\Gamma = \Gamma_i$. Пусть $g \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$. Без ограничения общности будем считать, что $g = 0$ и Γ совпадает с осью Oy_1 в достаточно малой окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon(0)$ начала координат. Введем обозначения $G^\varepsilon = G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)$, $\Gamma^\varepsilon = \Gamma \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ и положим $H^l_a(G^\varepsilon) = H^l_a(G^\varepsilon, \{0\})$.

Лемма 5.2. *Если $u \in W^l(G^\varepsilon)$, $l \geqslant 1$, то справедливы следующие утверждения*:

1. $u(y) = P(y) + v(y)$ *для* $y \in G^\varepsilon$, *где* $P(y) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant l-2} p_\alpha y^\alpha$, $v \in W^l(G^\varepsilon) \cap H^l_\delta(G^\varepsilon)$ $\forall \delta > 0$ (*если* $l = 1$, *полагаем* $P(y) \equiv 0$); *в частности,* $u \in H^l_{l-1+\delta}(G^\varepsilon)$;

2. $D^\alpha u|_{y=0} = D^\alpha P|_{y=0}$ *для* $|\alpha| \leqslant l-2$ (*если* $l \geqslant 2$);

3. $\sum\limits_{|\alpha| \leqslant l-2} |p_\alpha| + \|v\|_{H^l_\delta(G^\varepsilon)} \leqslant c_\delta \|u\|_{W^l(G^\varepsilon)}$, *где* $c_\delta > 0$ *не зависит от* u.

Доказательство вытекает из леммы 4.9 в [36] при $l = 1$ и из леммы 4.11 в [36] при $l \geqslant 2$. $\square$

Лемма 5.3. *Если $\psi \in W^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)$, $l \geqslant 1$, то справедливы следующие утверждения*:

1. $\psi(r) = P_1(r) + \varphi(r)$ *для* $0 < r < \varepsilon$, *где* $P_1(r) = \sum\limits_{\beta=0}^{l-2} p_\beta r^\beta$, $\varphi \in W^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon) \cap H_\delta^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)$ $\forall \delta > 0$ (*если* $l = 1$, *полагаем* $P_1(r) \equiv 0$); *в частности,* $\psi \in H_{l-1+\delta}^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)$;
2. $(d^\beta \psi / dr^\beta)|_{r=0} = (d^\beta P_1 / dr^\beta)|_{r=0}$ *для* $\beta = 0, \ldots, l-2$;
3. $\sum\limits_{\beta=0}^{l-2} |p_\beta| + \|\varphi\|_{H_\delta^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)} \leqslant c_\delta \|\psi\|_{W^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)}$, *где* $c_\delta > 0$ *не зависит от* ψ.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u \in W^l(G^\varepsilon)$ такую, что $u|_{\Gamma^\varepsilon} = \psi$ и $\|u\|_{W^l(G^\varepsilon)} \leqslant 2\|\psi\|_{W^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)}$ и применим лемму 5.2. $\square$

Лемма 5.4. *Пусть $\psi \in W^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)$, $l \geqslant 2$, и пусть*

$$\left.\frac{d^s \psi}{dr^s}\right|_{y=0} = 0, \qquad s = 0, \ldots, k, \tag{5.10}$$

для фиксированного $k \leqslant l-2$. Тогда $\psi \in H_{l-2-k+\delta}^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)$ $\forall \delta > 0$ и

$$\|\psi\|_{H_{l-2-k+\delta}^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)} \leqslant c_\delta \|\psi\|_{W^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)}, \tag{5.11}$$

где $c_\delta > 0$ не зависит от ψ.

Доказательство. Из соотношений (5.10) и леммы 5.3 (части 1 и 2) следует, что

$$\psi(r) = \sum_{\beta=k+1}^{l-2} p_\beta r^\beta + \varphi(r), \qquad 0 < r < \varepsilon, \tag{5.12}$$

где

$$\varphi \in H_\delta^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon) \subset H_{l-2-k+\delta}^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon), \qquad \delta > 0. \tag{5.13}$$

Если $k = l-2$, то сумма в (5.12) отсутствует и утверждение леммы вытекает из (5.13) и части 3 леммы 5.3.

Если $k \leqslant l-3$, то сумма состоит из слагаемых вида r^β, где $\beta \geqslant k+1$. Непосредственно проверяется, что $r^\beta \in H_{l-2-k+\delta}^{l-1/2}(\Gamma^\varepsilon)$ для указанных β и любого $\delta > 0$. Следовательно, утверждение леммы вытекает из (5.12), (5.13) и части 3 леммы 5.3. $\square$

Лемма 5.5. *Пусть* $u \in H^{l-1/2}_{a+k}(\Gamma)$, $k, l \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, *и пусть* $B \in C^\infty(\overline{G^\varepsilon})$, $D^\alpha B|_{y=0} = 0$, $|\alpha| \leqslant k-1$. *Тогда*

$$\|Bu\|_{H^l_a(G^\varepsilon)} \leqslant c\|u\|_{H^{l-1/2}_{a+k}(G^\varepsilon)}.$$

Доказательство. Из формулы Тейлора вытекает, что $|D^\sigma B| = O\big(r^{k-|\sigma|}\big)$ для любого σ; следовательно,

$$\begin{aligned}\|Bu\|^2_{H^l_a(G^\varepsilon)} &= \sum_{|\alpha|\leqslant l} \int\limits_{G^\varepsilon} r^{2(a+|\alpha|-l)}|D^\alpha(Bu)|^2 dy \leqslant \\ &\leqslant c_2 \sum_{|\sigma|+|\zeta|\leqslant l} \int\limits_{G^\varepsilon} r^{2(a+|\sigma|+|\zeta|-l)}|D^\sigma B|^2|D^\zeta u|^2 dy \leqslant \\ &\leqslant c_3 \sum_{|\zeta|\leqslant l} \int\limits_{G^\varepsilon} r^{2(a+k+|\zeta|-l)}|D^\zeta u|^2 dy = c_3\|u\|^2_{H^l_{a+k}(K)}.\end{aligned}$$

□

Лемма 5.6. *Пусть* $\psi \in H^{l-1/2}_{a+k}(\Gamma^\varepsilon)$, $k, l \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, *и пусть* $b \in C^\infty(\overline{\Gamma^\varepsilon})$, $\left.\dfrac{\partial^s b}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0$, $s = 0, \dots k-1$. *Тогда*

$$\|b\psi\|_{H^{l-1/2}_a(\Gamma)} \leqslant c\|\psi\|_{H^{l-1/2}_{a+k}(\Gamma)}. \tag{5.14}$$

Доказательство. Обозначим через $\hat{b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ продолжение функции $b(y_1)$ на $\mathbb{R}$ и введем функцию $B(y_1, y_2) = \hat{b}(y_1)$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Очевидно,

$$B \in C^\infty(\overline{K}), \qquad D^\sigma B|_{y=0} = 0, \quad |\sigma| \leqslant k-1. \tag{5.15}$$

Пусть $u \in H^l_{a+k}(G^\varepsilon)$ — такое продолжение функции ψ, что

$$\|u\|_{H^l_{a+k}(K)} \leqslant c_1\|\psi\|_{H^{l-1/2}_{a+k}(\gamma)}, \tag{5.16}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от ψ. Теперь утверждение леммы вытекает из (5.15), (5.16) и леммы 5.5. □

Лемма 5.7. *Пусть* $u \in W^1(\mathbb{R}^2)$ *и* $u(y) = 0$ *при* $|y| \geqslant 1$. *Тогда*

$$\|u(y) - u(\mathcal{G}_0 y)\|_{H^1_0(\mathbb{R}^2)} \leqslant c\|u\|_{W^1(\mathbb{R}^2)},$$

где $\mathcal{G}_0$ *— композиция операторов поворота на угол* ω_0 $(-\pi < \omega_0 \leqslant \pi)$ *и гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом* $\chi_0 > 0$.

Доказательство. Записывая функцию u в полярных координатах (ω, r), имеем

$$u(y) - u(\mathcal{G}_0 y) = u(\omega, r) - u(\omega + \omega_0, \chi_0 r) = v_1 + v_2,$$

где $v_1(\omega, r) = u(\omega, r) - u(\omega + \omega_0, r)$, $v_2(\omega, r) = u(\omega + \omega_0, r) - u(\omega + \omega_0, \chi_0 r)$.

Рассмотрим функцию v_1. По лемме 4.15 в [36]

$$\int\limits_0^\infty r^{-1}|v_1(0, r)|^2 dr \leqslant k_1 \|u\|_{W^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда и из леммы 4.8 в [36] следует, что $v_1 \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$ и

$$\|v_1\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)} \leqslant k_2 \|u\|_{W^1(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.17}$$

Осталось показать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} r^{-2}|v_2|^2 dy \leqslant k_3 \|u\|_{W^1(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.18}$$

Для $\chi_0 > 1$ (случай $0 < \chi_0 < 1$ рассматривается аналогично) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} r^{-2}|v_2|^2 dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\omega \int\limits_0^\infty r^{-1}|v_2(\omega, r)|^2 dr = \int\limits_{-\pi+\omega_0}^{\pi+\omega_0} d\omega \int\limits_0^\infty r^{-1} dr \left| \int\limits_r^{\chi_0 r} \frac{\partial u(\omega, t)}{\partial t} dt \right|^2.$$

Используя неравенство Шварца и меняя пределы интегрирования, получаем оценку (5.18):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} r^{-2}|v_2|^2 dy \leqslant (\chi_0 - 1) \int\limits_{-\pi+\omega_0}^{\pi+\omega_0} d\omega \int\limits_0^\infty dr \int\limits_r^{\chi_0 r} \left| \frac{\partial u(\omega, t)}{\partial t} \right|^2 dt =$$

$$= \frac{(\chi_0 - 1)^2}{\chi_0} \int\limits_{-\pi+\omega_0}^{\pi+\omega_0} d\omega \int\limits_0^\infty \left| \frac{\partial u(\omega, t)}{\partial t} \right|^2 t\, dt \leqslant \frac{(\chi_0 - 1)^2}{\chi_0} \|u\|^2_{W^1(\mathbb{R}^2)}.$$

□

Нам также понадобятся весовые пространства отрицательного (дробного) порядка. Для $l \geqslant 1$ обозначим через $H_a^{-(l-1/2)}(\Gamma_i) \stackrel{\text{def}}{=} (H_{-a}^{l-1/2}(\Gamma_i))^*$ пространство, сопряженное с $H_{-a}^{l-1/2}(\Gamma_i)$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(\Gamma_i)$. Норма в $H_a^{-(l-1/2)}(\Gamma_i)$ задается следующим образом:

$$\|g\|_{H_a^{-(l-1/2)}(\Gamma_i)} = \sup_{0 \neq \psi \in H_{-a}^{l-1/2}(\Gamma_i)} \frac{|\langle \psi, g \rangle|}{\|\psi\|_{H_{-a}^{l-1/2}(\Gamma_i)}}.$$

Лемма 5.8. *Для любых $l \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{R}$ пространство $H^{l+1/2}_{a+1}(\Gamma_i)$ есть плотное подмножество в $H^{l-1/2}_a(\Gamma_i)$ и*

$$\|g\|_{H^{l-1/2}_a(\Gamma_i)} \leqslant c\|g\|_{H^{l+1/2}_{a+1}(\Gamma_i)} \qquad \forall g \in H^{l+1/2}_{a+1}(\Gamma_i),$$

где $c > 0$ не зависит от g.

Доказательство. Если $l = 1, 2, \ldots$, то заключение леммы вытекает из определения весовых пространств. Случай $l = -1, -2, \ldots$ следует из соображений двойственности.

Рассмотрим случай $l = 0$. Пусть $g \in H^{1/2}_{a+1}(\Gamma_i)$. Используя эквивалентные нормы в весовых пространствах (см. лемму 1.3 в [40]), нетрудно проверить, что

$$\left| \int\limits_{\Gamma_i} \psi \overline{g}\, d\Gamma \right| \leqslant c\|\psi\|_{H^{1/2}_{-a}(\Gamma_i)} \|g\|_{H^{1/2}_{a+1}(\Gamma_i)} \qquad \forall \psi \in H^{1/2}_{-a}(\Gamma_i),\ g \in H^{1/2}_{a+1}(\Gamma_i). \tag{5.19}$$

В силу (5.19) и принадлежности $g \in H^{1/2}_{a+1}(\Gamma_i)$ получаем

$$\|g\|_{H^{-1/2}_a(\Gamma_i)} = \sup_{0 \neq \psi \in H^{1/2}_{-a}(\Gamma_i)} \frac{|\langle \psi, g \rangle|}{\|\psi\|_{H^{1/2}_{-a}(\Gamma_i)}} \leqslant c\|g\|_{H^{1/2}_{a+1}(\Gamma_i)}.$$

Теперь докажем, что $H^{1/2}_{a+1}(\Gamma_i)$ является плотным подмножеством в $H^{-1/2}_a(\Gamma_i)$. Предположим противное. Тогда найдется такой ненулевой элемент

$$g \in (H^{-1/2}_a(\Gamma_i))^* = H^{1/2}_{-a}(\Gamma_i)$$

(пространство $H^{1/2}_{-a}(\Gamma_i)$ гильбертово и, значит, рефлексивно), что $\langle \psi, g \rangle = 0$ для всех $\psi \in H^{1/2}_{a+1}(\Gamma_i)$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma_i} \psi \overline{g}\, d\Gamma = \langle \psi, g \rangle = 0 \qquad \forall \psi \in C^\infty_0(\Gamma_i).$$

Учитывая, что $C^\infty_0(\Gamma_i)$ плотно в $H^{1/2}_{-a}(\Gamma_i)$, заключаем, что $g = 0$. □

Пространства вектор-функций

Для любых $l \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$ и целых $m_{i\mu} \geqslant 0$ ($l + 2m - m_{i\mu} \geqslant 1$) введем пространства вектор-функций

$$\begin{gathered} \mathcal{H}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}_a(\partial G) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{\mu=1}^{m} H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}_a(\Gamma_i), \\ \mathcal{H}^l_a(G, \partial G) = H^l_a(G) \times \mathcal{H}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}_a(\partial G). \end{gathered} \tag{5.20}$$

В § 22 (глава V), а также в главе VI рассматриваются нелокальные возмущения задачи Дирихле для дифференциального оператора второго порядка. В этом случае $m = 1$, $m_{i1} = 0$, и пространства (5.20) будем обозначать следующим образом:

$$\mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G) = \prod_{i=1}^{N} H_a^{l+3/2}(\Gamma_i), \quad \mathcal{H}_a^{l}(G, \partial G) = H_a^{l}(G) \times \mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G). \tag{5.21}$$

Помимо стандартных норм в этих пространствах, в главе VI мы будем пользоваться следующими нормами, зависящими от параметра $q > 0$:

$$\begin{gathered} \|\psi\|_{\mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G)} = \left(\sum_{i=1}^{N} \|\psi_i\|^2_{H_a^{l+3/2}(\Gamma_i)} \right)^{1/2}, \quad \psi = \{\psi_i\}, \\ \|(f, \psi)\|_{\mathcal{H}_a^{l}(G, \partial G)} = \left(\|f\|^2_{H_a^{l}(G)} + \|\psi\|^2_{\mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G)} \right)^{1/2}, \end{gathered} \tag{5.22}$$

где $\|\cdot\|_{H_a^{l+3/2}(\Gamma_i)}$ и $\|\cdot\|^2_{H_a^{l}(G)}$ — нормы, определенные в (5.8), $l \geqslant 0$.

В § 25 (глава VI) будем использовать следующие банаховы пространства с нормами, зависящими от параметра $q > 0$:

- $H_{\mathcal{N},a}^{l+2}(G) = C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \cap H_a^{l+2}(G)$ с нормой
$$\|u\|_{H_{\mathcal{N},a}^{l+2}(G)} = \|u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{G})} + \|u\|_{H_a^{l+2}(G)},$$
- $H_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\Gamma_i) = C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i}) \cap H_a^{l+3/2}(\Gamma_i)$ с нормой
$$\|v\|_{H_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\Gamma_i)} = \|v\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})} + \|v\|_{H_a^{l+3/2}(\Gamma_i)},$$
- $\mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G) = \prod\limits_{i=1}^{N} H_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\Gamma_i) = \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G) \cap \mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G)$ с нормой
$$\|\psi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G)} = \sum_{i=1}^{N} \|\psi_i\|_{H_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\Gamma_i)}, \qquad \psi = \{\psi_i\},$$
где $\mathcal{N}$ — замкнутое подмножество ∂G, $l \geqslant 0$.

Для любых $l \geqslant 0$, $a \in \mathbb{R}$ и целых $m_{j\sigma\mu}$ $(0 \leqslant m_{j\sigma\mu} \leqslant l + 2m - 1)$ введем пространства вектор-функций

$$\mathcal{H}_a^{l}(K) = \prod_{j=1}^{N} H_a^{l}(K_j), \quad \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) = \prod_{j=1}^{N} \prod_{\sigma=1,2} \prod_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}),$$
$$\mathcal{H}_a^{l}(K, \gamma) = \mathcal{H}_a^{l}(K) \times \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma).$$

Аналогично вводятся пространства

$$\mathcal{H}_a^{l}(K^d), \quad \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^d), \quad \mathcal{H}_a^{l}(K^d, \gamma^d), \quad d > 0.$$

6. Постановка нелокальной задачи в ограниченной области

6.1. Постановка задачи

Обозначим через $\mathbf{P}(y,D)$ и $B_{i\mu s}(y,D)$ линейные дифференциальные операторы порядка $2m$ и $m_{i\mu}$ соответственно с комплекснозначными коэффициентами класса C^∞-coefficients, а через $\mathbf{P}^0(y,D)$ и $B^0_{i\mu s}(y,D)$ — главные однородные части операторов $\mathbf{P}(y,D)$ и $B_{i\mu s}(y,D)$ ($i=1,\dots,N$, $\mu=1,\dots,m$, $s=0,\dots,S_i$).

Сформулируем условия на операторы $\mathbf{P}(y,D)$ и $B_{i\mu 0}(y,D)$, которые будут соответствовать «локальной» эллиптической задаче (см., например, [39, гл. 2, § 1].

Условие 6.1. *Оператор* $\mathbf{P}(y,D)$ *собственно эллиптичен на* $\overline{G}$.

В частности, условие 6.1 означает, что для всех $\theta\in\mathbb{R}^2$ и $y\in\overline{G}$ выполнена оценка

$$A^{-1}|\theta|^{2m}\leqslant|\mathbf{P}^0(y,\theta)|\leqslant A|\theta|^{2m},\quad A>0. \tag{6.1}$$

Условие 6.2. *Для любого* $y\in\overline{\Gamma_i}$, $i=1,\dots,N$, *система* $\{B_{i\mu 0}(y,D)\}_{\mu=1}^m$ *удовлетворяет условию накрытия* (*условию Лопатинского*) *по отношению к оператору* $\mathbf{P}(y,D)$.

Условие 6.2 означает следующее. Пусть $y\in\overline{\Gamma_i}$. Без ограничения общности предположим, что вблизи заданной точки y кривая $\overline{\Gamma_i}$ определена уравнением $y_2=0$. Пусть многочлен

$$B'_{i\mu 0}(y,\tau)\equiv\sum_{\nu=1}^m b_{i\mu\nu}(y)\tau^{\nu-1}\equiv B^0_{i\mu 0}(y,1,\tau)\ \big(\operatorname{mod}\mathbf{M}^+(y,\tau)\big)$$

есть остаток от деления $B^0_{i\mu 0}(y,1,\tau)$ на $\mathbf{M}^+(y,\tau)$, где

$$\mathbf{M}^+(y,\tau)=\prod_{\nu=1}^m(\tau-\tau_\nu^+(y)),$$

$\tau_1^+(y),\dots,\tau_m^+(y)$ — корни многочлена $\mathbf{P}^0(y,1,\tau)$ с положительной мнимой частью, причем $\mathbf{P}^0(y,1,\tau)$, $B^0_{i\mu 0}(y,1,\tau)$ и $\mathbf{M}^+(y,\tau)$ рассматриваются как многочлены от τ. Тогда условие 6.2 означает, что

$$d_i(y)=\det\|b_{i\mu\nu}(y)\|_{\mu,\nu=1}^m\neq 0.$$

Так как каждая из дуг $\overline{\Gamma_i}$, $i=1,\dots,N$, — компакт, то

$$D=\min_{i=1,\dots,N}\inf_{y\in\overline{\Gamma_i}}|d_i(y)|>0. \tag{6.2}$$

Подчеркнем, что нормальность операторов $B_{i\mu 0}(y,D)$ на дугах $\overline{\Gamma_i}$ в общем случае не предполагается.

Рассмотрим операторы

$$\mathbf{P} : W^{l+2m}(G) \to W^{l}(G), \quad \mathbf{B}^0_{i\mu} : W^{l+2m}(G) \to W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i),$$

заданные формулами

$$\mathbf{P}u = \mathbf{P}(y,D)u, \qquad \mathbf{B}^0_{i\mu}u = B_{i\mu 0}(y,D)u(y)|_{\Gamma_i}.$$

В этой и следующей главах считаем, что $l + 2m - m_{i\mu} \geqslant 1$.

Определим операторы, соответствующие нелокальным условиям вблизи множества $\mathcal{K}$. Пусть Ω_{is} $(i = 1, \dots, N,\ s = 1, \dots, S_i)$ — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_i$ кривой $\overline{\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})}$ на множество $\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ так, что $\Omega_{is}(\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \subset G$ и

$$\Omega_{is}(g) \in \mathcal{K} \quad \text{для } g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}. \tag{6.3}$$

Таким образом, преобразования Ω_{is} отображают дуги $\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ внутрь области G, а их концевые точки $\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ — в концевые точки.

Уточним структуру преобразований Ω_{is} вблизи множества $\mathcal{K}$. Обозначим преобразование $\Omega_{is} : \mathcal{O}_i \to \Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ через Ω^{+1}_{is}, а через $\Omega^{-1}_{is} : \Omega_{is}(\mathcal{O}_i) \to \mathcal{O}_i$ — преобразование, обратное к Ω_{is}. Назовем *орбитой* точки $g \in \mathcal{K}$, и обозначим $\mathrm{Orb}(g)$, множество всех точек вида $\Omega^{\pm 1}_{i_q s_q}(\dots \Omega^{\pm 1}_{i_1 s_1}(g)) \in \mathcal{K}$ $(1 \leqslant s_j \leqslant S_{i_j},\ j = 1, \dots, q)$, т. е. всех тех, которые можно получить, применяя к g последовательно преобразования $\Omega^{+1}_{i_j s_j}$ или $\Omega^{-1}_{i_j s_j}$, отображающие точки множества $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}$.

Очевидно, для любых $g, g' \in \mathcal{K}$ либо $\mathrm{Orb}(g) = \mathrm{Orb}(g')$, либо $\mathrm{Orb}(g) \cap \mathrm{Orb}(g') = \varnothing$. Далее будем считать, что множество $\mathcal{K}$ состоит из одной орбиты (все результаты без труда переносятся на общий случай, когда $\mathcal{K}$ состоит из конечного числа непересекающихся орбит). Для простоты обозначений предположим также, что множество (орбита) $\mathcal{K}$ состоит из N точек: $g_1, \dots, g_N$.

Выберем ε настолько малым (ср. замечание замечание 2.2), чтобы существовали окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ точек $g_j \in \mathcal{K}$, такие, что $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j) \supset \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$ и

1. $\overline{G \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)} = \overline{K_j^{\varepsilon_1}}$;
2. $\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)} \cap \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)} = \varnothing$ для любых $g_j, g_k \in \mathcal{K}$, $k \neq j$;
3. если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \subset \mathcal{O}_i$ и $\Omega_{is}\big(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\big) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$.

Для каждой точки $g_j \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ зафиксируем преобразование $Y_j : y \mapsto y'(g_j)$, представляющее из себя композицию сдвига на вектор $-\overrightarrow{Og_j}$ и поворота на некоторый угол так, что

$$Y_j(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)) = \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0), \qquad Y_j(G \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)) = K_j \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0),$$

$$Y_j(\Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)) = \gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0) \quad (\sigma = 1 \text{ или } 2),$$

где углы $K_j = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ |\omega| < \omega_j\}$ и их стороны $\gamma_{j\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega = (-1)^\sigma \omega_j\}$ (ω, r — полярные координаты с полюсом в начале координат, $0 < \omega_j < \pi$) те же[2], что в п. 5.1.

Рассмотрим следующее условие (см. рис. 6.1).

Условие 6.3. *Пусть $g_j \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k \in \mathcal{K}$; тогда преобразование*

$$Y_k \circ \Omega_{is} \circ Y_j^{-1} : \mathcal{O}_\varepsilon(0) \to \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$$

есть композиция операторов поворота и гомотетии с центром в начале координат.

Замечание 6.1. Из условия 6.3 и предположения $\Omega_{is}(\Gamma_i) \subset G$, в частности, следует, что *если $g \in \Omega_{is}(\overline{\Gamma_i} \setminus \Gamma_i) \cap \overline{\Gamma_j} \cap \mathcal{K} \neq \varnothing$, то кривые $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i})$ и $\overline{\Gamma_j}$ пересекаются в точке g под ненулевым углом.*

Выберем число ε_0, $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon$, удовлетворяющее следующему условию: если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(g_k) \subset \Omega_{is}\big(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\big) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$. Рассмотрим функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что

$$\zeta(y) = 1 \ (y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0/2}(\mathcal{K})), \quad \zeta(y) = 0 \ (y \notin \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{K})). \tag{6.4}$$

Введем ограниченные операторы $\mathbf{B}^1_{i\mu} : W^{l+2m}(G) \to W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^1_{i\mu} u &= \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y, D)(\zeta u)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i}, && y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}), \\ \mathbf{B}^1_{i\mu} u &= 0, && y \in \Gamma_i \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}); \end{aligned}$$

здесь $\big(B_{i\mu s}(y, D)v\big)\big(\Omega_{is}(y)\big) = B_{i\mu s}(y', D_{y'})v(y')|_{y'=\Omega_{is}(y)}$.

[2]Строго говоря, введенные здесь углы K_j получаются из углов K_j, описанных в п. 5.1, посредством сдвига на вектор $-\overrightarrow{Og_j}$ и поворота, однако в дальнейшем мы будем их отождествлять.

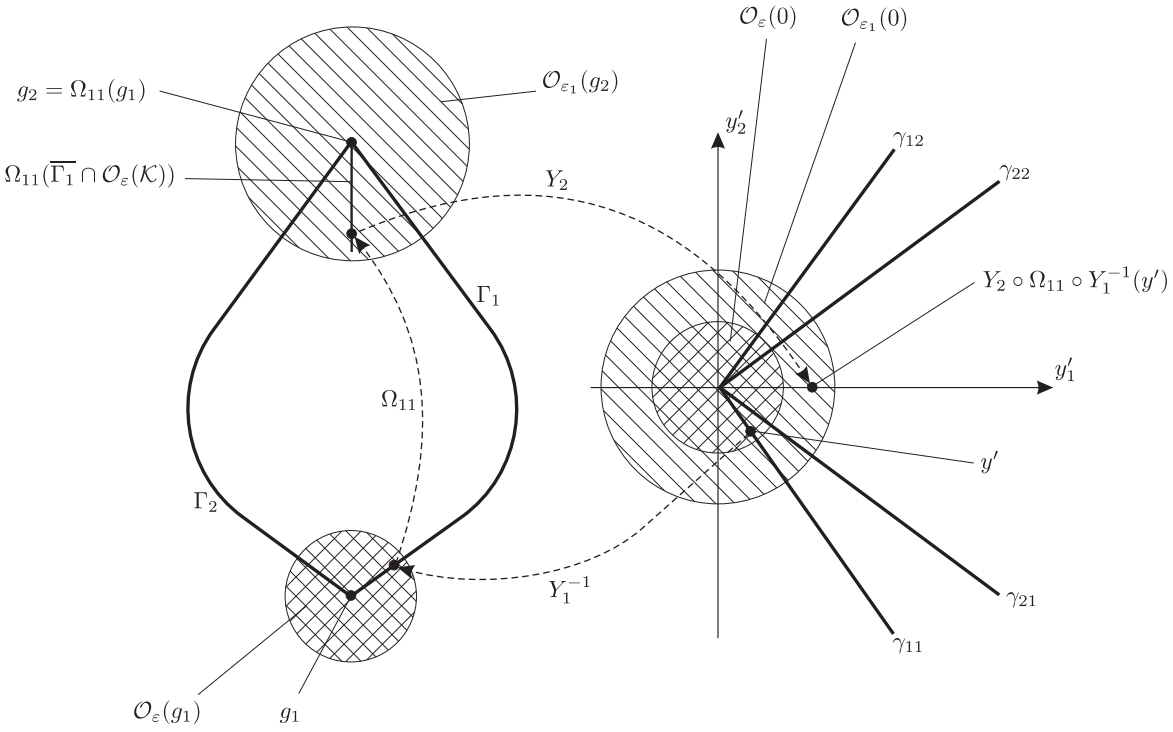

Рис. 6.1. Преобразование $Y_2 \circ \Omega_{11} \circ Y_1^{-1} : \mathcal{O}_\varepsilon(0) \to \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$ — композиция операторов поворота и гомотетии

Так как $\mathbf{B}^1_{i\mu} u = 0$, если $\operatorname{supp} u \subset \overline{G} \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{K})}$, то будем говорить, что операторы $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ *соответствуют нелокальным членам с носителем вблизи множества* $\mathcal{K}$.

Как и ранее, обозначим

$$G_\rho = \{y \in G : \operatorname{dist}(y, \partial G) > \rho\}.$$

Введем ограниченные операторы

$$\mathbf{B}^2_{i\mu} : W^{l+2m}(G) \to W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i),$$

удовлетворяющие следующему условию.

Условие 6.4. *Существуют такие числа* $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$ *и* $\rho > 0$, *что выполнены неравенства*

$$\|\mathbf{B}^2_{i\mu} u\|_{W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_1 \|u\|_{W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})} \quad \forall u \in W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})}), \quad (6.5)$$

$$\|\mathbf{B}^2_{i\mu} u\|_{W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})})} \leqslant c_2 \|u\|_{W^{l+2m}(G_\rho)} \quad \forall u \in W^{l+2m}(G_\rho), \quad (6.6)$$

где $i = 1, \ldots, N$, $\mu = 1, \ldots, m$, $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* u.

Из неравенства (6.5) следует, что $\mathbf{B}^2_{i\mu}u = 0$, если $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$. Поэтому будем говорить, что операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ *соответствуют нелокальным членам с носителем вне множества* $\mathcal{K}$.

Условия 6.1–6.4 считаем выполненными в главах II–V; в главах IV и V условие 6.4 рассматривается при $l = 0$. В главе VI условия 6.1–6.4 будут заменены их аналогами.

Отметим, что априори мы не предполагаем связи между числом ε_0 в определении операторов $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ и числами $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ в условии 6.4.

Будем изучать нелокальную эллиптическую задачу

$$\mathbf{P}u \equiv \mathbf{P}(y, D)u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{6.7}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}u \equiv \mathbf{B}^0_{i\mu}u + \mathbf{B}^1_{i\mu}u + \mathbf{B}^2_{i\mu}u = f_{i\mu}(y) \quad (y \in \Gamma_i,\ i = 1, \dots, N,\ \mu = 1, \dots, m). \tag{6.8}$$

Введем следующий ограниченный оператор, соответствующий задаче (6.7), (6.8) в пространствах Соболева:

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P},\, \mathbf{B}_{i\mu}\} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G),$$

где $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$ — пространство, определенное в п. 5.2.

Определение 6.1. Функция $u \in W^{l+2m}(G)$ называется *сильным решением* задачи (6.7), (6.8) с правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^l(G, \partial G)$, если выполнено равенство $\mathbf{L}u = \{f_0, f_{i\mu}\}$.

В дальнейшем сильные решения задачи (6.7), (6.8) будем называть просто *решениями*.

6.2. Пример нелокальной задачи

Приведем пример задачи с нелокальными условиями, удовлетворяющими условиям этого параграфа.

Пусть операторы $\mathbf{P}(y, D)$ и $B_{i\mu s}(y, D)$ — те же, что и выше. Обозначим через Ω_{is} ($i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, S_i$) невырожденные преобразования класса C^∞, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_i$ кривой Γ_i на $\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ так, что $\Omega_{is}(\Gamma_i) \subset G$. Отметим, что в этом примере *мы изначально не предполагаем выполненными соотношения* (6.3).

Рассмотрим нелокальную задачу

$$\mathbf{P}(y, D)u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{6.9}$$

$$B_{i\mu 0}(y,D)u(y)|_{\Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y,D)u\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i} = f_{i\mu}(y) \qquad (6.10)$$
$$(y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots,N,\ \mu = 1,\dots,m).$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы для любой точки $g \in \mathcal{K}$ множество $\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g)}$ пересекалось с кривой $\overline{\Omega_{is}(\Gamma_i)}$ только тогда, когда $g \in \mathcal{K} \cap \overline{\Omega_{is}(\Gamma_i)}$.

Предположим, что выполнено условие 6.3. В силу замечания 6.1 условие 6.3 представляет собой ограничение на геометрическую структуру носителя нелокальных членов вблизи множества $\mathcal{K}$. Однако если $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i} \setminus \Gamma_i) \subset \partial G \setminus \mathcal{K}$, то на геометрическую структуру кривых $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i})$ вблизи ∂G никаких ограничений не налагается (ср. [59, 63]).

Обозначим

$$\mathbf{P}u = \mathbf{P}(y,D)u, \quad \mathbf{B}^0_{i\mu}u = B_{i\mu 0}(y,D)u(y)|_{\Gamma_i},$$
$$\mathbf{B}^1_{i\mu}u = \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y,D)(\zeta u)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i},$$
$$\mathbf{B}^2_{i\mu}u = \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y,D)((1-\zeta)u)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i},$$

где функция ζ определена в (6.4). Тогда задача (6.9), (6.10) принимает вид (6.7), (6.8).

Аналогично доказательству леммы 2.5 в [63] (где следует заменить весовые пространства на соответствующие пространства Соболева) можно показать, что операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ удовлетворяют условию 6.4.

6.3. Сведение к модельным задачам в бесконечных углах

Как и в главе I, особое внимание следует уделять поведению решений вблизи множества $\mathcal{K}$, состоящего из точек сопряжения краевых условий. Рассмотрим соответствующую модельную задачу в плоских углах. Для этого мы формально положим

$$\mathbf{B}^2_{i\mu} = 0, \quad i = 1,\dots,N,\ \mu = 1,\dots,m. \qquad (6.11)$$

Обозначим $u(y)$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ через $u_j(y)$. Если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$, $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$, $\Omega_{is}(y) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$, то обозначим $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$. Тогда в силу предположения (6.11) нелокальная задача (6.7), (6.8) в ε-окрестности множества $\mathcal{K}$

примет вид

$$\mathbf{P}(y,D)u_j = f_0(y) \quad (y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap G),$$

$$B_{i\mu 0}(y,D)u_j(y)|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y,D)(\zeta u_k)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} = f_{i\mu}(y)$$

$$\big(y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap \Gamma_i,\ i \in \{1 \leqslant i \leqslant N : g_j \in \overline{\Gamma_i}\},\ j = 1,\dots,N,\ \mu = 1,\dots,m\big).$$

Пусть $y \mapsto y'(g_j)$ — описанные выше преобразования координат. Введем функции

$$U_j(y') = u_j(y(y')),\ f_j(y') = f_0(y(y')),\ y' \in K_j^\varepsilon; \quad f_{j\sigma\mu}(y') = f_{i\mu}(y(y')),\ y' \in \gamma_{j\sigma}^\varepsilon,$$

где $\sigma = 1$ ($\sigma = 2$), если преобразование $y \mapsto y'(g_j)$ переводит Γ_i в сторону γ_{j1} (γ_{j2}) угла K_j, и переобозначим y' через y. Тогда в силу условия 6.3 задача (6.7), (6.8) примет вид

$$\mathbf{P}_j(y,D)U_j = f_j(y) \quad (y \in K_j^\varepsilon), \tag{6.12}$$

$$\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U \equiv \sum_{k,s}(B_{j\sigma\mu ks}(y,D)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}} = f_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma}^\varepsilon). \tag{6.13}$$

Здесь $j,k = 1,\dots,N$, $\sigma = 1,2$, $\mu = 1,\dots,m$, $s = 0,\dots,S_{j\sigma k}$;

$$\mathbf{P}_j(y,D), \quad B_{j\sigma\mu ks}(y,D)$$

суть линейные дифференциальные операторы порядков $2m$ и $m_{j\sigma\mu}$ ($l + 2m - m_{j\sigma\mu} \geqslant 1$) соответственно с переменными коэффициентами класса C^∞:

$$\mathbf{P}_j(y,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} p_{j\alpha}(y)D_y^\alpha, \quad B_{j\sigma\mu ks}(y,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu ks\alpha}(y)D_y^\alpha;$$

$\mathcal{G}_{j\sigma ks}$ — оператор поворота на угол $\omega_{j\sigma ks}$ и гомотетии с коэффициентом $\chi_{j\sigma ks} > 0$, причем $|(-1)^\sigma b_j + \omega_{j\sigma ks}| < b_k$, если $(k,s) \neq (j,0)$ (см. замечание 6.1), и $\omega_{j\sigma j0} = 0$, $\chi_{j\sigma j0} = 1$ (т. е. $\mathcal{G}_{j\sigma j0}y \equiv y$).

Очевидно также, что

$$b_{j\sigma\mu ks\alpha}(y) = 0 \quad \text{при } |y| \geqslant \varepsilon_0,\ (k,s) \neq (j,0). \tag{6.14}$$

В главах II–VI будем использовать обозначения

$$d_1 = \min\{\chi_{j\sigma ks}\}/2, \qquad d_2 = 2\max\{\chi_{j\sigma ks}\}. \tag{6.15}$$

Продолжим коэффициенты операторов $\mathbf{P}_j(y,D)$ и $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)$ в $\mathbb{R}^2$ так, чтобы получились гладкие функции с компактным носителем. Рассмотрим оператор $\mathfrak{L}:\mathcal{W}^{l+2m}(K)\to\mathcal{W}^l(K,\gamma)$, заданный формулой

$$\mathfrak{L}U=\{\mathbf{P}_j(y,D)U_j,\ \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U|_{\gamma_{j\sigma}}\},$$

где $\mathcal{W}^{l+2m}(K)$ и $\mathcal{W}^l(K,\gamma)$ — пространства, определенные в п. 5.2. Оператор $\mathfrak{L}$ соответствует задаче (6.12), (6.13).

Обозначим через $\mathcal{P}_j(D)$ и $B_{j\sigma\mu ks}(D)$ главные однородные части операторов $\mathbf{P}_j(0,D)$ и $B_{j\sigma\mu ks}(0,D)$ соответственно. Наряду с задачей (6.12), (6.13) будем изучать модельную нелокальную задачу

$$\mathcal{P}_j(D)U_j=f_j(y)\quad(y\in K_j),\tag{6.16}$$

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U\equiv\sum_{k,s}(B_{j\sigma\mu ks}(D)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}}=f_{j\sigma\mu}(y)\quad(y\in\gamma_{j\sigma}).\tag{6.17}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}:\mathcal{W}^{l+2m}(K)\to\mathcal{W}^l(K,\gamma)$, заданный формулой

$$\mathcal{L}U=\{\mathcal{P}_j(D)U_j,\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U|_{\gamma_{j\sigma}}\}$$

и соответствующий задаче (6.16), (6.17) в пространствах Соболева.

Запишем операторы $\mathcal{P}_j(D)$ и $B_{j\sigma\mu ks}(D)$ в полярных координатах следующим образом: $\mathcal{P}_j(D)=r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega,D_\omega,rD_r)$, $B_{j\sigma\mu ks}(D)=r^{-m_{j\sigma\mu}}\tilde{B}_{j\sigma\mu ks}(\omega,D_\omega,rD_r)$, где $D_\omega=-i\partial/\partial\omega$, $D_r=-i\partial/\partial r$. Рассмотрим оператор (аналитическую оператор-функцию, зависящую от параметра $\lambda\in\mathbb{C}$) $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda):\mathcal{W}^{l+2m}(-\overline{\omega},\overline{\omega})\to\mathcal{W}^l[-\overline{\omega},\overline{\omega}]$, заданный формулой

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi=\{\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega,D_\omega,\lambda)\varphi_j,\ \tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega,D_\omega,\lambda)\varphi\},\tag{6.18}$$

где $\tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega,D_\omega,\lambda)\varphi=\sum\limits_{k,s}(\chi_{j\sigma ks})^{i\lambda-m_{j\sigma\mu}}\tilde{B}_{j\sigma\mu ks}(\omega,D_\omega,\lambda)\varphi_k(\omega+\omega_{j\sigma ks})|_{\omega=(-1)^\sigma\omega_j}$, а пространства $\mathcal{W}^{l+2m}(-\overline{\omega},\overline{\omega})$ и $\mathcal{W}^l[-\overline{\omega},\overline{\omega}]$ введены в п. 5.2.

Основные определения и факты касательно собственных значений и собственных и присоединенных векторов аналитических оператор-функций можно найти в [12]. В дальнейшем для нас будет принципиально, что спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ дискретный, а именно справедлива следующая лемма.

Лемма 6.1 (см. лемму 2.1 в [62]). *Для любого $\lambda\in\mathbb{C}$ оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ фредгольмов и* $\operatorname{ind}\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)=0$.

Спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ дискретный. Для любых чисел $c_1<c_2$ полоса $c_1<\operatorname{Im}\lambda<c_2$ содержит не более конечного числа собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

7. Нелокальные задачи в плоских углах в пространствах Соболева

7.1. Построение «решения» в случае отсутствия собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$

В этом пункте считаем выполненным следующее условие.

Условие 7.1. *Прямая* $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Рассмотрим операторы

$$D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U \equiv D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}\left(\sum_{k,s}(B_{j\sigma\mu ks}(D)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)\right),$$

где $\tau_{j\sigma}$ — единичный вектор, сонаправленный с лучом $\gamma_{j\sigma}$. Используя правило дифференцирования сложной функции, запишем

$$D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U \equiv \sum_{k,s}(\hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y), \tag{7.1}$$

где $\hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)$ — однородные дифференциальные операторы порядка $l+2m-1$ с постоянными коэффициентами. В частности,

$$\hat{B}_{j\sigma\mu j0}(D) = D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}B_{j\sigma\mu j0}(D),$$

так как $\mathcal{G}_{j\sigma j0}y \equiv y$. Формально заменяя нелокальные операторы в (7.1) на соответствующие локальные операторы, введем операторы

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)U \equiv \sum_{k,s}\hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)U_k(y). \tag{7.2}$$

Если $l \geqslant 1$, то наряду с системой (7.2) рассмотрим операторы

$$D^{\xi}\mathcal{P}_j(D)U_j(y), \quad |\xi| = l-1. \tag{7.3}$$

Система операторов (7.2) и (7.3) играет существенную роль в доказательстве следующей леммы, позволяющей сводить задачи в пространствах Соболева к задачам в весовых пространствах.

Лемма 7.1. *Пусть выполнено условие* 7.1. *Тогда существует такой линейный ограниченный оператор*

$$\mathcal{A} : \{f \in \mathcal{S}^l(K,\gamma) : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}_1(0)\} \to \mathcal{S}^{l+2m}(K),$$

что для любой функции $f = \{f_j, f_{j\sigma\mu}\} \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ *функция* $V = \mathcal{A}f$ *удовлетворяет следующим условиям*: $V = 0$ *при* $|y| \geqslant 1$,

$$\|\mathcal{L}V - f\|_{\mathcal{H}_0^l(K)} \leqslant c\|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)}, \tag{7.4}$$

$$\|V\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m}(K)} \leqslant c_a\|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)} \quad \forall a > 0. \tag{7.5}$$

Доказательство. 1. Введем оператор

$$f_{j\sigma\mu} \mapsto \Phi_{j\sigma\mu}, \tag{7.6}$$

ставящий в соответствие функции $f_{j\sigma\mu} \in W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ ее продолжение $\Phi_{j\sigma\mu} \in W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\mathbb{R}^2)$ на $\mathbb{R}^2$, такое, что $\Phi_{j\sigma\mu} = 0$ при $|y| \geqslant 2$. Рассмотрим также такое продолжение функции f_j из K_j на $\mathbb{R}^2$, что продолженная функция (которую также обозначим f_j) равна нулю при $|y| \geqslant 2$. Соответствующие операторы продолжения можно выбрать линейными и ограниченными (см. [67, гл. 6, § 3]).

Рассмотрим следующую линейную алгебраическую систему относительно всех частных производных $D^\alpha W_j$, $|\alpha| = l + 2m - 1$, $j = 1, \dots, N$:

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)W = D^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}}\Phi_{j\sigma\mu}, \tag{7.7}$$

$$D^\xi \mathcal{P}_j(D)W_j = D^\xi f_j \tag{7.8}$$

($j = 1, \dots, N$, $\sigma = 1, 2$, $\mu = 1, \dots, m$, $|\xi| = l-1$). Каждый из операторов $\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)$, заданных формулой (7.2), есть сумма «локальных» операторов, поэтому систему (7.7), (7.8) можно рассматривать как алгебраическую. Предположим, что система (7.7), (7.8) имеет единственное решение для любой правой части. Обозначим через $W_{j\alpha}$ решение системы (7.7), (7.8). Очевидно, что $W_{j\alpha} \in W^1(\mathbb{R}^2)$ и $W_{j\alpha} = 0$ при $|y| \geqslant 2$. В силу леммы 4.17 в [36] существует линейный ограниченный оператор

$$\{W_{j\alpha}\}_{|\alpha|=l+2m-1} \mapsto V_j, \tag{7.9}$$

ставящий в соответствие системе $\{W_{j\alpha}\}_{|\alpha|=l+2m-1} \in \prod\limits_{|\alpha|=l+2m-1} W^1(\mathbb{R}^2)$ такую функцию $V_j \in W^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$, что $V_j(y) = 0$ при $|y| \geqslant 1$ и

$$D^\alpha V_j|_{y=0} = 0, \quad |\alpha| \leqslant l + 2m - 2, \tag{7.10}$$

$$D^\alpha V_j - W_{j\alpha} \in H_0^1(\mathbb{R}^2), \quad |\alpha| = l + 2m - 1. \tag{7.11}$$

2. Покажем, что функция $V = (V_1, \ldots, V_N)$ искомая. Неравенство (7.5) следует из соотношений (7.10), леммы 5.2 и ограниченности оператора (7.9).

Докажем (7.4). Так как функции $W_{j\alpha}$ представляют из себя решение алгебраической системы (7.7), (7.8), а функции V_j удовлетворяют (7.11), то

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)V - D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}\Phi_{j\sigma\mu} \in H_0^1(\mathbb{R}^2), \tag{7.12}$$

$$D^{l-1}(\mathcal{P}_j(D)V_j - f_j) \in H_0^1(\mathbb{R}^2). \tag{7.13}$$

Далее, из (7.10) и (5.6) получаем

$$D^\alpha(\mathcal{P}_j(D)V_j - f_j)|_{y=0} = 0, \quad |\alpha| \leqslant l - 2.$$

Комбинируя эти равенства с соотношениями (7.13) и леммой 5.2, видим, что $\{\mathcal{P}_j(D)V_j - f_j\} \in \mathcal{H}_0^l(K)$.

Теперь покажем, что

$$\{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V - f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma). \tag{7.14}$$

Для этого перейдем в (7.12) от «локальных» операторов $\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)$ обратно к нелокальным $D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)$. Используя лемму 5.7, из (7.12) получим

$$D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V - \Phi_{j\sigma\mu}) \in H_0^1(\mathbb{R}^2). \tag{7.15}$$

Из (7.15) и леммы 4.18 в [36] получаем

$$\int\limits_0^\infty r^{-1}\left|D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V - f_{j\sigma\mu})\right|^2 dr \leqslant$$
$$\leqslant k_1\left\|D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V - \Phi_{j\sigma\mu})\right\|^2_{H_0^1(K_j)}. \tag{7.16}$$

Из неравенств (7.16), соотношений (5.6) и (7.10) и леммы 4.7 в [36] следует, что

$$\int\limits_0^\infty r^{1-2(l+2m-m_{j\sigma\mu})}|\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V - f_{j\sigma\mu}|^2 dr \leqslant$$
$$\leqslant k_2\left\|D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V - \Phi_{j\sigma\mu})\right\|^2_{H_0^1(K_j)}. \tag{7.17}$$

Комбинируя это неравенство с включением

$$\{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V - f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma),$$

из (7.17) и леммы 4.16 в [36] получаем (7.14). Используя ограниченность операторов (7.6) и (7.9), нетрудно также доказать оценку (7.4).

3. Осталось показать, что система (7.7), (7.8) имеет единственное решение для любой правой части. Очевидно, эта система состоит из $(l+2m)N$ уравнений относительно $(l+2m)N$ неизвестных. Следовательно, достаточно показать, что соответствующая система с нулевой правой частью имеет только тривиальное решение. Предположим противное: существует такой нетривиальный набор чисел $\{q_{j\alpha}\}$ ($j = 1, \dots, N$, $|\alpha| = l + 2m - 1$), что после подстановки в левую часть системы (7.7), (7.8) чисел $q_{j\alpha}$ вместо $D^\alpha W_j$, ее правые части обратятся в ноль. Рассмотрим однородный полином $Q_j(y)$ степени $l + 2m - 1$ такой, что $D^\alpha Q_j(y) \equiv q_{j\alpha}$. Тогда $\mathcal{P}_j(D)Q_j(y) \equiv 0$ (так как $D^\xi \mathcal{P}_j(D)Q_j(y) \equiv 0$ для всех $|\xi| = l - 1$) и

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)Q(y) \equiv \sum_{k,s} \hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)Q_k(y) \equiv 0 \quad \big(Q = (Q_1, \dots, Q_N)\big). \tag{7.18}$$

Заметим, что $\hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)Q_k(y) \equiv \mathrm{const}$, а операторы $\mathcal{G}_{j\sigma ks}$ переводят константу в себя. Следовательно, наряду с (7.18) имеем

$$D^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}}\big(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)Q(y)\big) \equiv \sum_{k,s} (\hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)Q_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) \equiv 0. \tag{7.19}$$

Так как $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)Q$ — однородный полином степени $l + 2m - m_{j\sigma\mu} - 1$, то в силу (7.19) $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)Q|_{\gamma_{j\sigma}} \equiv 0$. Таким образом, видим, что вектор-функция $Q = (Q_1, \dots, Q_N)$ есть решение задачи (6.16), (6.17) с нулевой правой частью. Следовательно,

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega, D_\omega, rD_r)\big(r^{l+2m-1}\tilde{Q}_j(\omega)\big) \equiv 0,\\ \sum_{k,s} (\chi_{j\sigma ks})^{(l+2m-1)-m_{j\sigma\mu}} \tilde{B}_{j\sigma\mu ks}(\omega, D_\omega, rD_r)\big(r^{l+2m-1}\tilde{Q}_k(\omega + \omega_{j\sigma ks})\big)|_{\omega=(-1)^\sigma\omega_j} \equiv 0,\end{gathered} \tag{7.20}$$

где $Q_j(y) \equiv r^{l+2m-1}\tilde{Q}_j(\omega)$. Однако тождества (7.20) означают, что

$$\tilde{\mathcal{L}}(-i(l + 2m - 1))\tilde{Q}(\omega) \equiv 0,$$

где $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_N)$. Это противоречит предположению о том, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. □

Следствие 7.1. *Построенная в лемме* 7.1 *функция* V *удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathfrak{L}V - f\|_{\mathcal{H}_0^l(K)} \leqslant c\|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)}. \tag{7.21}$$

Доказательство. В силу неравенства (7.4), достаточно оценить разности

$$(\mathbf{P}_j(y,D) - \mathcal{P}_j(D))V_j, \quad (\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D) - \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D))V.$$

Первая из этих разностей содержит слагаемые вида

$$\big(a_\alpha(y) - a_\alpha(0)\big)D^\alpha V_j \ (|\alpha| = 2m), \quad a_\beta(y)D^\beta V_j \ (|\beta| \leqslant 2m-1),$$

где a_α и a_β — бесконечно дифференцируемые функции. Зафиксируем число a, $0 < a < 1$. Учитывая, что $V = 0$ при $|y| \geqslant 1$, и используя лемму 5.5 и неравенство (7.5), получим

$$\begin{aligned}\|\big(a_\alpha(y) - a_\alpha(0)\big)D^\alpha V_j\|_{H_0^l(K_j)} &\leqslant k_1\|\big(a_\alpha(y) - a_\alpha(0)\big)D^\alpha V_j\|_{H_{a-1}^l(K_j)} \leqslant \\ &\leqslant k_2\|D^\alpha V_j\|_{H_a^l(K_j)} \leqslant k_3\|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)}.\end{aligned}$$

Аналогично, пользуясь определение весовых пространств и неравенством (7.5), получим

$$\|a_\beta(y)D^\beta V_j\|_{H_0^l(K_j)} \leqslant k_4\|a_\beta(y)D^\beta V_j\|_{H_a^{l+1}(K_j)} \leqslant k_5\|V_j\|_{H_a^{l+2m}(K_j)} \leqslant k_6\|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)}.$$

Похожим образом оценивается выражение $(\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D) - \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D))V$. □

7.2. Пространства $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$

Рассмотрим ситуацию, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ содержит собственные значения оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Пусть λ_0 — одно из таких собственных значений.

Определение 7.1. Будем говорить, что λ_0 — *правильное собственное значение оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, если

1. ни один из собственных векторов $\varphi(\omega) = (\varphi_1(\omega), \ldots, \varphi_N(\omega))$, соответствующих λ_0, не имеет присоединенных,

2. для любого собственного вектора $\varphi(\omega) = (\varphi_1(\omega), \ldots, \varphi_N(\omega))$, соответствующего λ_0, функции $r^{i\lambda_0}\varphi_j(\omega)$, $j = 1, \ldots, N$, являются полиномами по переменным y_1, y_2.

Собственное значение λ_0, не являющееся правильным, будем называть *неправильным собственным значением*.

Замечание 7.1. Понятие правильного собственного значения впервые было введено В. А. Кондратьевым [36] для «локальных» эллиптических краевых задач в областях с угловыми или коническими точками на границе.

Очевидно, если λ_0 — правильное собственное значение, то $\operatorname{Re}\lambda_0 = 0$. Следовательно, прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ может содержать не более одного правильного собственного значения. При этом функции $r^{i\lambda_0}\varphi_j(\omega)$ являются *однородными* полиномами степени $i\lambda_0$.

В пп. 7.2–7.4 будем считать выполненным следующее условие.

Условие 7.2. *Прямая* $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ *содержит единственное собственное значение* $\lambda_0 = i(1-l-2m)$*, и это собственное значение правильное.*

При выполнении этого условия заключение леммы 7.1 уже неверно, так как алгебраическая система (7.7), (7.8) может не иметь решения для некоторой правой части, а система операторов (7.2), (7.3) уже не является линейно независимой. Действительно пусть $\varphi(\omega) = (\varphi_1(\omega), \ldots, \varphi_N(\omega))$ — собственный вектор, отвечающий правильному собственному значению $\lambda_0 = i(1-l-2m)$. Тогда по определению правильного собственного значения функция $Q_j(y) = r^{l+2m-1}\varphi_j(\omega)$ есть однородный полином степени $l+2m-1$ по переменным $y = (y_1, y_2)$. Повторяя рассуждения части 3 в доказательстве леммы 7.1, видим, что после подстановки в левую часть системы (7.7), (7.8) чисел $q_{j\alpha} = D^\alpha Q_j$ вместо $D^\alpha W_j$ ее правая часть обращается в ноль. Следовательно, система (7.2), (7.3) линейно зависима.

В этом случае, вместо пространств $\mathcal{S}^l(K,\gamma)$, мы будем использовать пространства $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ (определенные ниже). Отметим, что множество $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ не будет замкнуто в топологии пространства $\mathcal{W}^l(K,\gamma)$.

Выберем из системы (7.2), состоящей из однородных дифференциальных операторов порядка $l+2m-1$, максимальное число линейно независимых операторов и обозначим их

$$\hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D)U. \tag{7.22}$$

Любой оператор $\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)$, не вошедший в систему (7.22), представим в виде

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)U = \sum_{j',\sigma',\mu'} \beta_{j\sigma\mu}^{j'\sigma'\mu'} \hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D)U, \tag{7.23}$$

где $\beta_{j\sigma\mu}^{j'\sigma'\mu'}$ — некоторые константы.

Рассмотрим функции $f = \{f_j, f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^l(K,\gamma)$, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{T}_{j\sigma\mu} f \equiv D^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}} \Phi_{j\sigma\mu} - \sum_{j',\sigma',\mu'} \beta^{j'\sigma'\mu'}_{j\sigma\mu} D^{l+2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1}_{\tau_{j'\sigma'}} \Phi_{j'\sigma'\mu'} \in H^1_0(\mathbb{R}^2). \quad (7.24)$$

Здесь индексы j', σ', μ' соответствуют операторам (7.22), а индексы j, σ, μ — операторам из системы (7.2), не вошедшим в систему (7.22); $\Phi_{j\sigma\mu}$ — некоторые фиксированные продолжения функций $f_{j\sigma\mu}$ to $\mathbb{R}^2$, определяемые оператором (7.6); $\beta^{j'\sigma'\mu'}_{j\sigma\mu}$ — константы из соотношения (7.23). Если система (7.2) линейно независима, то множество условий (7.24) пусто.

Заметим, что выполнение условий (7.24) не зависит от выбора продолжения функций $f_{j\sigma\mu}$ в $\mathbb{R}^2$. Действительно, пусть $\hat{\Phi}_{j\sigma\mu}$ — некоторое продолжение, отличное от $\Phi_{j\sigma\mu}$. Тогда $(\Phi_{j\sigma\mu} - \hat{\Phi}_{j\sigma\mu})|_{\gamma_{j\sigma}} = 0$; следовательно, по теореме 4.8 в [36]

$$D^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}} (\Phi_{j\sigma\mu} - \hat{\Phi}_{j\sigma\mu}) \in H^1_0(\mathbb{R}^2).$$

Теперь дополним систему (7.22) дифференциальными операторами порядка $l+2m-1$ из системы (7.3) таким образом, чтобы получившаяся система состояла из линейно независимых операторов

$$\hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D)U, \;\; D^{\xi'}\mathcal{P}_{j'}(D)U_{j'} \quad (7.25)$$

и любой оператор $D^{\xi}\mathcal{P}_j(D)U_j$, не вошедший в (7.25), был представим в виде

$$D^{\xi}\mathcal{P}_j(D)U_j = \sum_{j',\sigma',\mu'} p^{j'\sigma'\mu'}_{j\xi} \hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D)U + \sum_{j',\xi'} p^{j'\xi'}_{j\xi} D^{\xi'}\mathcal{P}_{j'}(D)U_{j'}, \quad (7.26)$$

где $p^{j',\sigma',\mu'}_{j\xi}$ и $p^{j',\xi'}_{j\xi}$ — некоторые константы.

Продолжим компоненты $f_j \in W^l(K_j)$ вектора f на все $\mathbb{R}^2$. Продолженные функции также обозначим через $f_j \in W^l(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим функции f, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{T}_{j\xi} f \equiv D^{\xi} f_j - \sum_{j',\sigma',\mu'} p^{j'\sigma'\mu'}_{j\xi} D^{l+2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1}_{\tau_{j'\sigma'}} \Phi_{j'\sigma'\mu'} - \sum_{j',\xi'} p^{j'\xi'}_{j\xi} D^{\xi'} f_{j'} \in H^1_0(\mathbb{R}^2). \quad (7.27)$$

Здесь индексы j', σ', μ' и j', ξ' соответствуют операторам (7.25), а индексы j, ξ соответствуют операторам из системы (7.3), не вошедшим в (7.25); $p^{j'\sigma'\mu'}_{j\xi}$ и $p^{j'\xi'}_{j\xi}$ — константы из соотношений (7.26). Аналогично предыдущему можно показать, что выполнение условий (7.27) не зависит от выбора продолжения функций f_j и $f_{j\sigma\mu}$ в $\mathbb{R}^2$.

Заметим, что множество условий (7.27) пусто, если либо $l = 0$, либо $l \geqslant 1$ и система (7.25) содержит все операторы из (7.3).

Введем аналог множества $\mathcal{S}^l(K,\gamma)$ в случае, когда выполнено условие 7.2. Обозначим через $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ множество функций $f \in \mathcal{W}^l(K,\gamma)$, удовлетворяющих условиям (5.6), (5.7), (7.24) и (7.27). Пространство $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ с нормой

$$\|f\|_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)} = \Big(\|f\|^2_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)} + \sum_{j,\sigma,\mu} \|\mathcal{T}_{j\sigma\mu} f\|^2_{H^1_0(\mathbb{R}^2)} + \sum_{j,\xi} \|\mathcal{T}_{j\xi} f\|^2_{H^1_0(\mathbb{R}^2)}\Big)^{1/2} \tag{7.28}$$

является полным. (В определении нормы (7.28) индексы j,σ,μ и j,ξ соответствуют операторам, не вошедшим в систему (7.25).) Введем также пространство

$$\hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) = \{f' \in \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) : (0,f') \in \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)\}.$$

Очевидно, имеют место вложения

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) \subset \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma) \subset W^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma), \\ \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma) \subset \mathcal{S}^l(K,\gamma) \subset \mathcal{W}^l(K,\gamma). \end{gathered} \tag{7.29}$$

Докажем некоторые важные свойства пространства $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$. Следующая лемма показывает, что если функция $U \in \mathcal{W}^{l+2m}(K)$ с компактным носителем удовлетворяет конечному числу условий ортогональности вида

$$D^\alpha U|_{y=0} = 0, \quad |\alpha| \leqslant l + 2m - 2, \tag{7.30}$$

то правая часть соответствующей нелокальной задачи принадлежит $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$.

Лемма 7.2. *Пусть выполнено условие* 7.2. *Предположим, что* $U \in \mathcal{S}^{l+2m}(K)$ *и* $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{\varepsilon d_1}(0)$ (*число* d_1 *определено в* (6.15)). *Тогда*

$$\|\mathcal{L}U\|_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)} \leqslant c\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)}, \quad \|\mathfrak{L}U\|_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)} \leqslant c\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)}. \tag{7.31}$$

Доказательство. 1. Положим $f = \{f_j, f_{j\sigma\mu}\} = \mathcal{L}U$. Из предположений леммы следует, что $f \in \mathcal{W}^l(K,\gamma)$, $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ и функции f_j и $f_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют соотношениям (5.6) и (5.7) соответственно.

Обозначим через $\Phi_{j\sigma\mu} \in W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\mathbb{R}^2)$ продолжение функции $f_{j\sigma\mu}$, определяемое оператором (7.6). Покажем, что

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)U - D^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}} \Phi_{j\sigma\mu} \in H^1_0(\mathbb{R}^2). \tag{7.32}$$

По лемме 5.7 $\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)U - D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$; таким образом, для доказательства (7.32) достаточно показать, что

$$D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U - \Phi_{j\sigma\mu}) \in H_0^1(\mathbb{R}^2). \tag{7.33}$$

Но

$$D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U - \Phi_{j\sigma\mu}) \in W^1(\mathbb{R}^2),$$
$$D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U - \Phi_{j\sigma\mu})|_{\gamma_{j\sigma}} = 0;$$

поэтому соотношения (7.33) следуют из леммы 4.8 в [36]. Соотношение (7.32) доказано.

Операторы $\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)U$ удовлетворяют соотношениям (7.23); следовательно, в силу (7.32) функции $\Phi_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют соотношениям (7.24).

Аналогично из (7.32), равенств $\mathcal{P}_j(D)U_j - f_j = 0$ и соотношений (7.26) вытекает, что функция f удовлетворяет соотношениям (7.27). Следовательно, $f \in \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$, и, как нетрудно проверить, справедливо первое неравенство в (7.31).

2. Теперь для доказательства того, что $\mathfrak{L}U \in \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$, достаточно показать, что

$$D^{l-1}\big(\mathbf{P}_j(y,D) - \mathcal{P}_j(D)\big)U_j \in H_0^1(\mathbb{R}^2),$$
$$D_{\tau_{j\sigma}}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}\big(\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U - \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U\big) \in H_0^1(\mathbb{R}^2),$$

где $U_j \in W^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ — продолжение функции $U_j \in W^{l+2m}(K_j)$ в $\mathbb{R}^2$ (которое также обозначим через U_j). Эти выражения состоят из слагаемых вида

$$\big(a_\alpha(y) - a_\alpha(0)\big)D^\alpha U_j \ (|\alpha| = l+2m-1), \quad a_\beta(y)D^\beta U_j \ (|\beta| \leqslant l+2m-2),$$

где a_α и a_β — бесконечно дифференцируемые функции.

Так как $U_j \in W^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$, то $D^\alpha U_j \in H_1^1(\mathbb{R}^2)$. Отсюда и из леммы 5.5 вытекает, что $\big(a_\alpha(y) - a_\alpha(0)\big)D^\alpha U_j \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$.

Функция $a_\beta D^\beta U_j$ ($|\beta| \leqslant l+2m-2$) принадлежит $W^2(\mathbb{R}^2)$. Отсюда, из соотношений (7.30) и леммы 5.2, следует, что $a_\beta D^\beta U_j \in H_a^2(\mathbb{R}^2) \subset H_{a-1}^1(\mathbb{R}^2)$, $a > 0$. Пусть $0 < a < 1$; тогда в силу компактности носителя функций U_j получаем $a_\beta D^\beta U_j \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$. При этом, как нетрудно проверить, выполнено также второе неравенство в (7.31). □

Следующая лемма показывает, что множество $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ незамкнуто в топологии пространства $\mathcal{W}^l(K,\gamma)$.

Лемма 7.3. *Пусть выполнено условие* 7.2. *Тогда существует такое семейство функций* $f^\delta \in \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$, $\delta > 0$, *что* $\operatorname{supp} f^\delta \subset \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ *и* f^δ *сходится в* $\mathcal{W}^l(K,\gamma)$ *к функции* $f^0 \notin \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство. 1. Как показано выше, если число $\lambda_0 = i(1-l-2m)$ — правильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то система (7.2), (7.3) линейно зависима. Возможны следующие два случая: либо (a) система (7.2) линейно зависима, либо (b) система (7.2) линейно независима, но система (7.2), (7.3) линейно зависима.

2. Вначале предположим, что система (7.2) линейно зависима. Тогда множество условий (7.24) непусто. В этом случае для некоторых j,σ,μ норма (7.28) содержит соответствующее слагаемое $\|\mathcal{T}_{j\sigma\mu} f\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}$. Зафиксируем такие j,σ,μ. Без ограничения общности предположим, что $\gamma_{j\sigma}$ совпадает с осью Oy_1. Введем функции $f^\delta = \{0, f^\delta_{j_1\sigma_1\mu_1}\}$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$ такие, что $f^\delta_{j_1\sigma_1\mu_1} = 0$ для $(j_1,\sigma_1,\mu_1) \neq (j,\sigma,\mu)$ и $f^\delta_{j\sigma\mu}(y_1) = \psi(y_1) y_1^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1+\delta}$, где $\psi \in C_0^\infty\big([0,\infty)\big)$, $\psi(y_1) = 1$ при $0 \leqslant y_1 \leqslant \varepsilon/2$ и $\psi(y_1) = 0$ при $y_1 \geqslant 2\varepsilon/3$. Очевидно,

$$\hat{\Phi}^\delta_{j\sigma\mu}(y) = \psi(r) y_1^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1} r^\delta$$

есть продолжение функции $f^\delta_{j\sigma\mu}$ в $\mathbb{R}^2$. Более того, оператор продолжения, заданный на функциях $f^\delta_{j\sigma\mu}$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$, есть ограниченный оператор из пространства $W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ в пространство $W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\mathbb{R}^2)$. Это следует из оценок $\|f^\delta_{j\sigma\mu}\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \geqslant c_1$ и $\|\hat{\Phi}^\delta_{j\sigma\mu}\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\mathbb{R}^2)} \leqslant c_2$, где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от $0 \leqslant \delta \leqslant 1$.

Таким образом, для $0 < \delta \leqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\|f^\delta\|^2_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)} = \|f^\delta_{j\sigma\mu}\|^2_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})}, \\ &\|f^\delta\|^2_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)} \approx \|f^\delta_{j\sigma\mu}\|^2_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} + \Big\| D_{y_1}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1} \hat{\Phi}^\delta_{j\sigma\mu} \Big\|^2_{H_0^1(\mathbb{R}^2)} \end{aligned} \tag{7.34}$$

(непосредственные вычисления показывают, что для $\delta > 0$ нормы (7.34) конечны). Здесь символ «$\approx$» означает, что соответствующие нормы эквивалентны. Далее, непосредственно проверяется, что $\hat{\Phi}^\delta_{j\sigma\mu} \to \hat{\Phi}^0_{j\sigma\mu}$ в $W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\mathbb{R}^2)$ при $\delta \to 0$. Следовательно, $f^\delta_{j\sigma\mu} \to f^0_{j\sigma\mu}$ в $W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ при $\delta \to 0$. Однако соответствующая функция $f^0 = \{0, f^0_{j\sigma\mu}\}$ не принадлежит $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$. Действительно, предположим противное. Тогда в силу (7.34) $D_{y_1}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1} \hat{\Phi}^0_{j\sigma\mu} \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$, что неверно, так как функция $D_{y_1}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1} \hat{\Phi}^0_{j\sigma\mu}$ равна ненулевой константе вблизи начала координат.

3. Теперь предположим, что система (7.2) линейна независима. Тогда система (7.2), (7.3) линейно зависима. В этом случае условия (7.24) отсутствуют, но множество условий (7.27) непусто. Следовательно, для некоторых j, ξ норма (7.28) содержит соответствующее слагаемое $\|\mathcal{T}_{j\xi} f\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}$. Зафиксируем указанные j, ξ и введем функции $f^\delta = \{f_{j1}^\delta, 0\}$ $(0 \leqslant \delta \leqslant 1)$ такие, что $f_{j1}^\delta = 0$ для $j_1 \neq j$ и $f_j^\delta = \psi(r) y^\xi r^\delta$. Непосредственно проверяется, что $f_j^\delta \to f_j^0$ в $W^l(\mathbb{R}^2)$ при $\delta \to 0$, но $f^0 = \{f_j^0, f_{j\sigma\mu}^0\} \notin \hat{\mathcal{S}}^l(K, \gamma)$, так как $D^\xi f_j^0 \notin H_0^1(\mathbb{R}^2)$. $\square$

7.3. Построение «решения» в случае правильного собственного значения оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im} \lambda = 1 - l - 2m$

Докажем аналог леммы 7.1 в случае выполнения условия 7.2.

Лемма 7.4. *Пусть выполнено условие* 7.2. *Тогда существует такой ограниченный оператор*

$$\hat{\mathcal{A}} : \{f \in \hat{\mathcal{S}}^l(K, \gamma) : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}_1(0)\} \to \mathcal{S}^{l+2m}(K),$$

что для любых $f = \{f_j, f_{j\sigma\mu}\} \in \mathrm{D}(\hat{\mathcal{A}})$ *функция* $V = \hat{\mathcal{A}} f$ *удовлетворяет следующим условиям*: $V = 0$ *при* $|y| \geqslant 1$,

$$\|\mathcal{L} V - f\|_{\mathcal{H}_0^l(K)} \leqslant c \|f\|_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)} \tag{7.35}$$

и имеет место неравенство (7.5).

Доказательство. 1. Аналогично доказательству леммы 7.1 рассмотрим следующую алгебраическую систему относительно всех частных производных $D^\alpha W_j$, $|\alpha| = l + 2m - 1$, $j = 1, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D) W &= D_{\tau_{j'\sigma'}}^{l+2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1} \Phi_{j'\sigma'\mu'}, \\ D^{\xi'} \mathcal{P}_{j'}(D) W_{j'} &= D^{\xi'} f_{j'}, \end{aligned} \tag{7.36}$$

где $\Phi_{j'\sigma'\mu'}$ и $f_{j'}$ — продолжения функций $f_{j'\sigma'\mu'}$ и $f_{j'}$ в $\mathbb{R}^2$, описанные в доказательстве леммы 7.1. Теперь левая часть системы (7.36) содержит только операторы, вошедшие в систему (7.25). Матрица системы (7.36) состоит из $(l+2m)N$ столбцов и q $(q < (l+2m)N)$ линейно независимых строк. Выбирая q линейно независимых столбцов и полагая неизвестные $D^\alpha W_j$, соответствующие оставшимся $(l+2m)N - q$ столбцам, равными нулю, получим систему q

уравнений относительно q неизвестных, которая имеет единственное решение. Таким образом, мы определили линейный ограниченный оператор

$$(W^1(\mathbb{R}^2))^q \ni \left\{ D^{l+2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1}_{\tau_{j'\sigma'}} \Phi_{j'\sigma'\mu'},\ D^{\xi'} f_{j'} \right\} \mapsto$$
$$\mapsto \{D^\alpha W_j\} \equiv \{W_{j\alpha}\} \in (W^1(\mathbb{R}^2))^{(l+2m)N}, \quad (7.37)$$

причем $W_{j\alpha}(y) = 0$ при $|y| \geqslant 2$. Используя функции $D^\alpha W_j$ и оператор (7.9), получим функции V_j, $j = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие соотношениям (7.10) и (7.11). Покажем, что функция $V = (V_1, \ldots, V_N)$ искомая.

2. Аналогично доказательству леммы 7.1 доказывается оценка (7.5) для всех функций V. Докажем неравенство (7.35). Так как $\{W_{j\alpha}\}$ — решение системы (7.36) и функции V_j удовлетворяют условиям (7.11), то

$$\hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D)V - D^{l+2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1}_{\tau_{j'\sigma'}} \Phi_{j'\sigma'\mu'} \in H^1_0(\mathbb{R}^2), \quad (7.38)$$

$$D^{\xi'}(\mathcal{P}_{j'}(D)V_{j'} - f_{j'}) \in H^1_0(\mathbb{R}^2). \quad (7.39)$$

Рассмотрим произвольный оператор $\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)$, не вошедший в систему (7.25). Используя (7.23), имеем

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)V - D^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}} \Phi_{j\sigma\mu} =$$
$$= \sum_{j',\sigma',\mu'} \beta^{j'\sigma'\mu'}_{j\sigma\mu} \left(\hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D)V - D^{l+2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1}_{\tau_{j'\sigma'}} \Phi_{j'\sigma'\mu'} \right) +$$
$$+ \sum_{j',\sigma',\mu'} \beta^{j'\sigma'\mu'}_{j\sigma\mu} D^{l+2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1}_{\tau_{j'\sigma'}} \Phi_{j'\sigma'\mu'} - D^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}} \Phi_{j\sigma\mu}. \quad (7.40)$$

Но $f \in \hat{\mathcal{S}}^l(K, \gamma)$; следовательно, выполнены условия (7.24). Отсюда и из соотношений (7.38) и (7.40) вытекает, что для всех j, σ, μ имеют место соотношения

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)V - D^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}} \Phi_{j\sigma\mu} \in H^1_0(\mathbb{R}^2). \quad (7.41)$$

Аналогично рассматриваются операторы $D^\xi P_j(D)$, которые не вошли в систему (7.25). При помощи соотношений (7.23) и (7.24), (7.26) и (7.27), а также (7.38) и (7.39) доказываются соотношения

$$D^\xi(\mathcal{P}_j(D)V_j - f_j) \in H^1_0(\mathbb{R}^2) \quad (7.42)$$

для всех j, ξ.

Из (7.41) и (7.42), повторяя рассуждения из доказательства леммы 7.1, получаем оценку (7.35). □

Аналогично следствию 7.1 можно доказать следующее следствие леммы 7.4.

Следствие 7.2. *Построенная в лемме* 7.4 *функция* V *удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathfrak{L}V - f\|_{\mathcal{H}_0^l(K)} \leqslant c\|f\|_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)}. \tag{7.43}$$

Рассмотрим ограниченный оператор $\mathcal{L}_a : \mathcal{H}_a^{l+2m}(K) \to \mathcal{H}_a^l(K,\gamma)$, заданный формулой

$$\mathcal{L}_a U = \{\mathcal{P}_j(D)U_j,\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U\}, \tag{7.44}$$

где $\mathcal{H}_a^{l+2m}(K)$ и $\mathcal{H}_a^l(K,\gamma)$ — пространства, введенные в п. 5.3. Оператор $\mathcal{L}_a$ соответствует задаче (6.16), (6.17) в весовых пространствах. Из теоремы 2.1 в [62] следует, что оператор $\mathcal{L}_a$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Используя обратимость оператора $\mathcal{L}_a$ и следующую лемму, мы получим решение задачи (6.16), (6.17) в пространствах Соболева.

Лемма 7.5. *Пусть* $W \in \mathcal{H}_a^{l+2m}(K)$ *при некотором* $a > 0$ *и* $f = \mathcal{L}_a W \in \mathcal{H}_0^l(K,\gamma)$. *Предположим, что замкнутая полоса* $1-l-2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant a+1-l-2m$ *содержит единственное собственное значение* $\lambda_0 = i(1-l-2m)$ *оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ *и это собственное значение правильное. Тогда*

$$\|D^{l+2m}W\|_{\mathcal{H}_0^0(K)} \leqslant c\|f\|_{\mathcal{H}_0^l(K,\gamma)}. \tag{7.45}$$

Лемма 7.5 будет доказана в п. 7.4. Сейчас мы изучим разрешимость задач (6.16), (6.17) и (6.12), (6.13).

Лемма 7.6. *Пусть выполнено условие* 7.2. *Тогда для любой функции* $f \in \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ *такой, что* $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}_\varepsilon(0)$, *существует такое решение* U *задачи* (6.16), (6.17), *что* $U \in \mathcal{S}^{l+2m}(K^d)$ *при любом* $d > 0$ *и выполнены неравенства*

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^d)} \leqslant c_d\|f\|_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)}, \tag{7.46}$$

$$\|U\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)} \leqslant c_d\|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)}. \tag{7.47}$$

Доказательство. 1. Зафиксируем такое число a, $0 < a < 1$, при котором в полосе $1-l-2m < \operatorname{Im}\lambda \leqslant a+1-l-2m$ не содержится собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Существование такого числа a следует из дискретности спектра оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ (см. лемму 6.1). По определению пространства $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ для

функций $f = \{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$, удовлетворяющих условию леммы, выполнены соотношения (5.6) и (5.7). Поэтому, применяя лемму 5.2, имеем

$$\|f\|_{\mathcal{H}_a^l(K,\gamma)} \leqslant k_1 \|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)}. \tag{7.48}$$

Рассмотрим функцию $f - \mathcal{L}V$, где $V = \hat{\mathcal{A}} f \in \mathcal{W}^{l+2m}(K) \cap \mathcal{H}_a^{l+2m}(K)$ — функция, определенная в лемме 7.4. В силу неравенств (7.5) и (7.48)

$$\|f - \mathcal{L}V\|_{\mathcal{H}_a^l(K,\gamma)} \leqslant k_2 \|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)}. \tag{7.49}$$

Следовательно, функция $f - \mathcal{L}V \in \mathcal{H}_a^l(K,\gamma)$ принадлежит области определения оператора $\mathcal{L}_a^{-1}$. Обозначая $W = \mathcal{L}_a^{-1}(f - \mathcal{L}V)$, видим, что $U = V + W$ есть решение задачи (6.16), (6.17).

2. Докажем неравенство (7.47). В силу ограниченности оператора $\mathcal{L}_a^{-1}$ и неравенства (7.49) имеем

$$\|W\|_{H_a^{l+2m}(K)} \leqslant k_3 \|f\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)}. \tag{7.50}$$

Теперь оценка (7.47) следует из неравенств (7.50) и (7.5) и ограниченности вложения $\mathcal{H}_a^{l+2m}(K) \subset \mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)$.

3. Докажем (7.46). В силу ограниченности оператора

$$\hat{\mathcal{A}} : \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma) \to \mathcal{W}^{l+2m}(K)$$

и неравенства (7.50) достаточно оценить функции $D^{l+2m}W$. Из леммы 7.4 следует, что $f - \mathcal{L}V \in \mathcal{H}_0^l(K,\gamma)$ и выполнена оценка (7.35). Следовательно, применяя лемму 7.5 к функции $W = \mathcal{L}_a^{-1}(f - \mathcal{L}V)$ и используя (7.35), получаем

$$\|D^{l+2m}W\|_{\mathcal{H}_0^0(K)} \leqslant k_4 \|f - \mathcal{L}V\|_{\mathcal{H}_0^l(K,\gamma)} \leqslant k_5 \|f\|_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)}.$$

Так как $H_0^0(K_j) = L_2(K_j)$, то неравенство доказано (7.46). □

7.4. Доказательство леммы 7.5

Вначале предположим, что $W \in \prod\limits_{j=1}^{N} C_0^\infty(\overline{K_j} \setminus \{0\})$. Тогда $f_j \in C_0^\infty(\overline{K_j} \setminus \{0\})$ и $f_{j\sigma\mu} \in C_0^\infty(\gamma_{j\sigma})$, где $f = \{f_j, f_{j\sigma\mu}\} = \mathcal{L}W$. Обозначим через $W_j(\omega, r)$ и $f_j(\omega, r)$ функции $W_j(y)$ и $f_j(y)$ соответственно, записанные в полярных координатах. Через $\tilde{W}_j(\omega,\lambda)$, $\tilde{f}_j(\omega,\lambda)$ и $\tilde{f}_{j\sigma\mu}(\lambda)$ обозначим преобразования Фурье функций $W_j(\omega, e^\tau)$, $e^{2m\tau} f_j(\omega, e^\tau)$ и $e^{m_{j\sigma\mu}\tau} f_{j\sigma\mu}(e^\tau)$ по переменной τ. Положим $\tilde{f} = \{\tilde{f}_j, \tilde{f}_{j\sigma\mu}\}$.

Тогда $\lambda \mapsto \tilde{f}(\lambda)$ есть аналитическая функция во всей комплексной плоскости; более того, в полосе $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \mathrm{const}$ при стремлении $|\operatorname{Re}\lambda| \to \infty$ эта функция стремится к нулю, равномерно по ω и λ, быстрее любой степени $|\lambda|$.

Согласно лемме 2.1 в [62] существует такая конечно-мероморфная оператор-функция $\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)$, что $\tilde{\mathcal{R}}(\lambda) = \big(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\big)^{-1}$ для любого числа λ, не являющегося собственным значением оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. При этом если прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то, как показано в доказательстве теоремы 2.1 в [62], решение W представимо в виде

$$W(\omega, e^{\tau}) = \int\limits_{-\infty+i(a+1-l-2m)}^{+\infty+i(a+1-l-2m)} e^{i\lambda\tau}\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda. \tag{7.51}$$

Рассмотрим произвольную производную $D^{l+2m}W(y)$ порядка $l+2m$ функции W по переменным y_1, y_2. Запишем оператор D^{l+2m} в полярных координатах следующим образом: $r^{-(l+2m)}\tilde{M}(\omega, D_\omega, rD_r)$. После подстановки $r = e^{\tau}$ оператор D^{l+2m} примет вид $e^{-(l+2m)\tau}\tilde{M}(\omega, D_\omega, D_\tau)$, где $D_\tau = -i\partial/\partial\tau$. Отсюда и из (7.51) вытекает, что функция $D^{l+2m}W(y)$ может быть получена из функции

$$e^{-(l+2m)\tau}\int\limits_{-\infty+i(a+1-l-2m)}^{+\infty+i(a+1-l-2m)} e^{i\lambda\tau}\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda \tag{7.52}$$

при помощи подстановки $\tau = \ln r$ и последующего перехода к декартовым координатам. Покажем, что оператор-функция $\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)$ аналитична вблизи точки $\lambda_0 = i(1-l-2m)$. Так как λ_0 — (правильное) собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то согласно [12]

$$\tilde{\mathcal{R}}(\lambda) = \frac{A_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + \Gamma(\lambda),$$

где $\Gamma(\lambda)$ — аналитическая вблизи λ_0 оператор-функция, а образ оператора A_{-1} совпадает с линейной оболочкой собственных векторов, соответствующих λ_0. Следовательно, для любой функции $\tilde{f} \in \mathcal{W}^l[-\overline{\omega}, \overline{\omega}]$ имеем

$$\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\tilde{f} = \frac{\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)A_{-1}\tilde{f}}{\lambda - \lambda_0} + \tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\Gamma(\lambda)\tilde{f}.$$

По определению правильного собственного значения функция $r^{l+2m-1}A_{-1}\tilde{f}$ представляет из себя вектор $Q(y) = (Q_1(y), \ldots, Q_N(y))$, где $Q_j(y)$ — некоторые полиномы порядка $l+2m-1$ по переменным y_1, y_2. Следовательно,

$$\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)A_{-1}\tilde{f} = r^{1-l-2m}\tilde{M}(\omega, D_\omega, rD_r)(r^{l+2m-1}A_{-1}\tilde{f}) = rD^{l+2m}Q(y) = 0.$$

Таким образом, оператор-функция $\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)$ аналитична вблизи $\lambda_0 = i(1-l-2m)$, а значит, и в замкнутой полосе $1-l-2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant a+1-l-2m$.

Далее, для $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \mathrm{const}$ норма $\|\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\|_{\mathcal{W}^l[-\overline{\omega},\overline{\omega}]\to\mathcal{W}^0(-\overline{\omega},\overline{\omega})}$ при стремлении $|\operatorname{Re}\lambda| \to \infty$ растет не быстрее некоторой степени $|\lambda|$ (см. лемму 2.1 в [62]), тогда как $\|\tilde{f}(\lambda)\|_{\mathcal{W}^l[-\overline{\omega},\overline{\omega}]}$ стремится к нулю быстрее любой степени $|\lambda|$. Следовательно, в (7.52) мы можем интегрировать по прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ вместо $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$. Таким образом, функция $D^{l+2m}W(y)$ может быть получена из функции

$$e^{-(l+2m)\tau} \int\limits_{-\infty+i(1-l-2m)}^{+\infty+i(1-l-2m)} e^{i\lambda\tau}\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda \tag{7.53}$$

при помощи подстановки $\tau = \ln r$ и последующего перехода к декартовым координатам. Оценим норму функции $D^{l+2m}W$:

$$\|D^{l+2m}W\|^2_{\mathcal{H}^0_0(K)} = \sum_j \int\limits_{K_j} |D^{l+2m}W_j|^2 dy =$$

$$= \sum_j \int\limits_{-\omega_j}^{\omega_j} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(l+2m-1)\tau} \left| \int\limits_{-\infty+i(1-l-2m)}^{+\infty+i(1-l-2m)} e^{i\lambda\tau}\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda \right|^2 d\tau.$$

Отсюда и из комплексного аналога равенства Парсеваля получаем

$$\|D^{l+2m}W\|^2_{\mathcal{H}^0_0(K)} = \int\limits_{-\infty+i(1-l-2m)}^{+\infty+i(1-l-2m)} \|\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{W}^0(-\overline{\omega},\overline{\omega})} d\lambda. \tag{7.54}$$

Оценим норму под знаком интеграла в правой части. Для этого введем эквивалентные нормы, зависящие от параметра $\lambda \neq 0$:

$$|||\tilde{U}_j|||^2_{W^k(-\omega_j,\omega_j)} = \|\tilde{U}_j\|^2_{W^k(-\omega_j,\omega_j)} + |\lambda|^{2k}\|\tilde{U}_j\|^2_{L_2(-\omega_j,\omega_j)},$$

$$|||\tilde{f}|||^2_{\mathcal{W}^l[-\overline{\omega},\overline{\omega}]} = \sum_j \left(|||\tilde{f}_j|||^2_{W^l(-\omega_j,\omega_j)} + \sum_{\sigma,\mu} |\lambda|^{2(l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2)} |\tilde{f}_{j\sigma\mu}|^2 \right).$$

В силу интерполяционного неравенства (см. [1, гл. 1])

$$|\lambda|^{l+2m-k}\|\tilde{U}_j\|_{W^k(-\omega_j,\omega_j)} \leqslant c_k |||\tilde{U}_j|||_{W^{l+2m}(-\omega_j,\omega_j)}, \quad 0 < k < l+2m,$$

и леммы 2.1 в [62] существует такая константа $C > 0$, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ и $|\operatorname{Re}\lambda| > C$, выполнена оценка

$$\|\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)\|^2_{\mathcal{W}^0(-\overline{\omega},\overline{\omega})} \leqslant k_1 |||\tilde{f}(\lambda)|||^2_{\mathcal{W}^l[-\overline{\omega},\overline{\omega}]}. \tag{7.55}$$

Так как оператор-функция $\tilde{M}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{\mathcal{R}}(\lambda) : \mathcal{W}^l[-\overline{\omega}, \overline{\omega}] \to \mathcal{W}^0(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$ аналитична на отрезке $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m,\ |\operatorname{Re}\lambda| \leqslant C\}$, то неравенство (7.55) имеет место на всей прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$. Из (7.54) и (7.55) получаем

$$\|D^{l+2m}W\|^2_{\mathcal{H}^0_0(K)} \leqslant k_1 \int\limits_{-\infty+i(1-l-2m)}^{+\infty+i(1-l-2m)} |||\tilde{f}(\lambda)|||^2_{\mathcal{W}^l[-\overline{\omega},\overline{\omega}]} d\lambda.$$

Отсюда и из неравенств (1.9) и (1.10) в [36] вытекает оценка (7.45). Так как множество $C_0^\infty(\overline{K_j} \setminus \{0\})$ плотно в $H^k_a(K_j)$ при любоых a и k, то оценка (7.45) справедлива для всех $W \in \mathcal{H}^{l+2m}_a(K)$ и $f \in \mathcal{H}^l_0(K, \gamma)$.

Глава III

Сильные решения нелокальных эллиптических задач в ограниченной области в пространствах Соболева

8. Отсутствие собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$

В этом параграфе, используя результаты п. 7.1 (главы II), мы построим правый регуляризатор для оператора

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P},\, \mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + \mathbf{B}^2_{i\mu}\} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G),$$

см. п. 6.1 (главы II), соответствующего задаче (6.7), (6.8) в пространствах Соболева. Из существования правого регуляризатора вытекает замкнутость образа оператора $\mathbf{L}$ и конечномерность его коядра. Для доказательства конечномерности ядра оператора $\mathbf{L}$, мы сведем оператор $\mathbf{L}$ к оператору, действующему в весовых пространствах и имеющему конечномерное ядро.

Обозначим $\mathbf{B}^k = \{\mathbf{B}^k_{i\mu}\}_{i,\mu}$, $k = 0, \ldots, 2$; $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^1 + \mathbf{B}^2$, $\mathbf{C} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^1$. Наряду с оператором $\mathbf{L} = \{\mathbf{P},\, \mathbf{B}\}$ рассмотрим ограниченные операторы

$$\mathbf{L}^0 = \{\mathbf{P},\, \mathbf{B}^0\} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G),$$
$$\mathbf{L}^1 = \{\mathbf{P},\, \mathbf{C}\} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G).$$

Вначале изучим оператор $\mathbf{L}^1$ (т. е. предположим, что $\mathbf{B}^2_{i\mu} = 0$); затем исследуем оператор $\mathbf{L}$ в общем случае $\mathbf{B}^2_{i\mu} \neq 0$. Всюду в этом параграфе считаем выполненным условие 7.1.

8.1. Построение правого регуляризатора в случае $\mathbf{B}^2_{i\mu} = 0$

В этом пункте рассмотрим случай $\mathbf{B}^2_{i\mu} = 0$, т. е. предположим, что носитель нелокальных членов содержится вблизи множества $\mathcal{K}$.

Положим $\delta = \varepsilon_0/d_1$, где ε_0 определяет диаметр носителя функции ζ (см. формулы (6.4)), участвующей в определении нелокальных операторов $\mathbf{B}^1_{i\mu}$, а число d_1 определено в (6.15). Рассмотрим функции $\psi, \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такие, что $0 \leqslant \psi, \xi \leqslant 1$, $\psi(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})$, $\operatorname{supp}\psi \subset \mathcal{O}_{2\delta}(\mathcal{K})$; $\xi(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{2\delta}(\mathcal{K})$, $\operatorname{supp}\xi \subset \mathcal{O}_{4\delta}(\mathcal{K})$.

Лемма 8.1. *Пусть выполнено условие* 7.1. *Тогда для любого достаточно малого* $\varepsilon_0 > 0$ *существуют такие ограниченные операторы*

$$\mathbf{R}_\mathcal{K} : \mathcal{S}^l(G, \partial G) \to S^{l+2m}(G), \quad \mathbf{M}_\mathcal{K}, \mathbf{S}_\mathcal{K} : \mathcal{S}^l(G, \partial G) \to \mathcal{S}^l(G, \partial G),$$

что

$$\mathbf{L}^1 \mathbf{R}_\mathcal{K} f = \psi f + \mathbf{M}_\mathcal{K} f + \mathbf{S}_\mathcal{K} f, \tag{8.1}$$

$\|\mathbf{M}_\mathcal{K}\| \leqslant c_1\varepsilon_0$, $\|\mathbf{S}_\mathcal{K}\| \leqslant c_2$ *и квадрат оператора* $\mathbf{S}_\mathcal{K}$ *компактный*; *более того, оператор* $\mathbf{S}_\mathcal{K}$ *представим в виде* $\mathbf{S}_\mathcal{K} = \mathbf{U}_\mathcal{K} + \mathbf{F}_\mathcal{K}$, *где* $\|\mathbf{U}_\mathcal{K}\| \leqslant c_3$, *а оператор* $\mathbf{F}_\mathcal{K}$ *компактный*; *константы* $c_1, c_2, c_3 > 0$ *не зависят от* ε_0.

Доказательство. Сделаем в окрестности множества $\mathcal{K}$ замену переменных $y \to y'$ из п. 6.1 и обозначим y' снова через y. Функции ψ, ξ и f, записанные в новых координатах, будем обозначать теми же символами.

В силу леммы 7.1 $\psi f - \mathcal{L}\mathcal{A}(\psi f) \in \mathcal{H}^l_0(K, \gamma)$. Следовательно,

$$\mathcal{L}_0^{-1}(\psi f - \mathcal{L}\mathcal{A}(\psi f)) \in \mathcal{H}^{l+2m}_0(K),$$

где $\mathcal{L}_0 : \mathcal{H}^{l+2m}_0(K) \to \mathcal{H}^l_0(K, \gamma)$ — оператор, заданный в (7.44) при $a = 0$. Положим

$$\mathbf{R}_\mathcal{K} f = \xi U, \quad U = \mathcal{L}_0^{-1}(\psi f - \mathcal{L}\mathcal{A}(\psi f)) + \mathcal{A}(\psi f).$$

Покажем, что оператор $\mathbf{R}_\mathcal{K}$ искомый. Используя ограниченность оператора вложения $\mathcal{H}^{l+2m}_0(K) \subset \mathcal{W}^{l+2m}(K)$, заданного на функциях с компактным носителем, неравенство (7.4) и ограниченность оператора $\mathcal{A}$, видим, что оператор $\mathbf{R}_\mathcal{K}$ ограничен.

Докажем соотношение (8.1). Так как $\mathcal{P}_j(D)U_j = \psi f_j$ и $\xi\psi f_j = \psi f_j$, то

$$\mathbf{P}_j(y, D)(\xi U_j) - \psi f_j = [\mathbf{P}_j(y, D), \xi]U_j + \xi(y)\big(\mathbf{P}_j(y, D) - \mathcal{P}_j(D)\big)U_j, \tag{8.2}$$

где $[\cdot,\cdot]$ обозначает коммутатор. Отсюда, используя лемму 1.1, получаем

$$\mathbf{PR}_{\mathcal{K}} f - \psi f_0 = (M_0 + T_0) f, \tag{8.3}$$

где оператор M_0 «малый» (т. е. $\|M_0\| \leqslant k_1 \varepsilon_0$), оператор $T_0 : \mathcal{S}^l(G, \partial G) \to W^l(G)$ компактный, $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от ε_0.

Учитывая, что $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U = \psi f_{j\sigma\mu}$ и $\xi\psi f_{j\sigma\mu} = \psi f_{j\sigma\mu}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)(\xi U) - \psi f_{j\sigma\mu} = [\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D), \xi] U + \\ + \xi(y)\big(\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D) - \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)\big) U. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Пусть $B(y)$ — произвольный коэффициент оператора $B_{j\sigma\mu ks}(y, D)$, $(k, s) \neq (j, 0)$. В силу (6.14) и выбора функции ψ имеем

$$\begin{aligned} B(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) = 0 \quad \text{при } |y| \geqslant \varepsilon_0 / \chi_{j\sigma ks}, \\ \xi(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) = \xi(y) = 1 \quad \text{при } |y| \leqslant \varepsilon_0 / \chi_{j\sigma ks}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой функции v

$$(Bv\xi)(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) \equiv \xi(y)(Bv)(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y). \tag{8.5}$$

Очевидно, при $(k, s) = (j, 0)$ равенство (8.5) также справедливо. Следовательно, коммутатор в правой части формулы (8.4) не содержит старших производных и, значит, является компактным оператором. Младшие производные из второго слагаемого в правой части формулы (8.4) также образуют компактный оператор. Рассмотрим произвольное слагаемое, содержащее старшую производную порядка α, $|\alpha| = m_{j\sigma\mu}$, при $(k, s) \neq (j, 0)$; оно имеет вид

$$\begin{aligned} \xi(y)\big(\zeta(G_{j\sigma ks} y) b(G_{j\sigma ks} y) - b(0)\big)(D^\alpha U)(G_{j\sigma ks} y)|_{\gamma_{j\sigma}} = \\ = \xi(y)\zeta(G_{j\sigma ks} y)\big(b(G_{j\sigma ks} y) - b(0)\big)(D^\alpha U)(G_{j\sigma ks} y)|_{\gamma_{j\sigma}} + \\ + \xi(y)\big(\zeta(G_{j\sigma ks} y) - 1\big) b(0)(D^\alpha U)(G_{j\sigma ks} y)|_{\gamma_{j\sigma}}, \end{aligned} \tag{8.6}$$

где $b(y)$ — бесконечно гладкая функция. Используя лемму 1.1, первую разность в правой части (8.6) можно представить в виде суммы «малого» и компактного операторов. Кроме того, если $(k, s) = (j, 0)$, то вторая разность в правой части (8.6) отсутствует. Таким образом,

$$(\mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu})\mathbf{R}_{\mathcal{K}} f - \psi f_{i\mu} = (M_{i\mu} + T_{i\mu} + S_{i\mu}) f, \tag{8.7}$$

где $\|M_{i\mu}\| \leqslant k_2\varepsilon_0$, оператор $T_{i\mu}$ компактный, а оператор $S_{i\mu}$ состоит из слагаемых, каждое из которых в координатах y' имеет вид

$$S_{j\sigma\mu}f = \xi(y')\big(\zeta(G_{j\sigma ks}y') - 1\big)b(0)(D^\alpha U)(G_{j\sigma ks}y')|_{\gamma_{j\sigma}}, \qquad (k,s) \neq (j,0).$$

Положим $\mathbf{S} = \{0, S_{i\mu}\}$. Представление оператора $\mathbf{S}$ в виде $\mathbf{S} = \mathbf{U}_{\mathcal{K}} + \mathbf{F}$, где $\|\mathbf{U}_{\mathcal{K}}\| \leqslant k_3$, а оператор $\mathbf{F}$ компактный, следует из леммы 1.1. Докажем, что квадрат оператора $\{0, S_{j\sigma\mu}\} : \mathcal{W}^l(K,\gamma) \to \mathcal{W}^l(K,\gamma)$ компактный.

Обозначим $\Phi = \{\Phi_0, \Phi_{j\sigma\mu}\} = \{0, S_{j\sigma\mu}f\}$, $V = \mathcal{L}_0^{-1}(\psi\Phi - \mathcal{L}\mathcal{A}(\psi\Phi)) + \mathcal{A}(\psi\Phi)$. Так как функция ζ имеет компактный носитель и равна единице вблизи начала координат, то носитель функции $\zeta(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y') - 1$ ограничен и отделен от начала координат. Следовательно, используя теорему 4.3 в [39, гл. 2] (об априорной оценке решений эллиптических уравнений) и учитывая, что $\mathcal{P}_j(D)V_j = \psi\Phi_0 = 0$, получаем

$$\|S_{j\sigma\mu}\Phi\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \leqslant k_4\|V_k\|_{W^{l+2m-1}(Q_k)}, \tag{8.8}$$

где Q_k — ограниченные области такие, что $\overline{Q_k} \subset K_k$. Из (8.8) и компактности вложения $W^{l+2m}(Q_k) \subset W^{l+2m-1}(Q_k)$ вытекает компактность оператора $\{0, S_{j\sigma\mu}\}^2$, а значит, и оператора $\mathbf{S}^2 = \{0, S_{i\mu}\}^2$. Отсюда и из соотношений (8.3) и (8.7) получаем утверждение леммы с операторами $\mathbf{M}_{\mathcal{K}} = \{M_0, M_{i\mu}\}$, $\mathbf{S}_{\mathcal{K}} = \{T_0, T_{i\mu}\} + \mathbf{S}$ и $\mathbf{F}_{\mathcal{K}} = \{T_0, T_{i\mu}\} + \mathbf{F}$. □

Лемма 8.2. *Пусть выполнено условие* 7.1. *Тогда для достаточно малого* ε_0 *существуют ограниченный оператор* $\mathbf{R}_1 : \mathcal{S}^l(G, \partial G) \to S^{l+2m}(G)$ *и компактный оператор* $\mathbf{T}_1 : \mathcal{S}^l(G, \partial G) \to \mathcal{S}^l(G, \partial G)$ *такие, что*

$$\mathbf{L}^1\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{T}_1, \tag{8.9}$$

где $\mathbf{I}_1$ *— единичный оператор в* $\mathcal{S}^l(G, \partial G)$.

Доказательство. 1. Согласно общей теории эллиптических краевых задач в областях с гладкой границей (см., например, [8]) существуют такой ограниченный оператор

$$\mathbf{R}_0 : \mathcal{W}^l(G, \partial G) \to \{u \in W^{l+2m}(G) : \operatorname{supp} u \subset \overline{G} \setminus \mathcal{O}_{\delta/2}(\mathcal{K})\} \subset S^{l+2m}(G)$$

и компактный оператор $\mathbf{T}_0 : \mathcal{W}^l(G, \partial G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$, что

$$\mathbf{L}^0\mathbf{R}_0(1-\psi)f = (1-\psi)f + \mathbf{T}_0 f. \tag{8.10}$$

Для любой $f \in \mathcal{S}^l(G, \partial G)$ положим $\hat{\mathbf{R}}_1 f = \mathbf{R}_{\mathcal{K}}(\psi f) + \mathbf{R}_0(1-\psi)f$, где $\mathbf{R}_{\mathcal{K}}$ — оператор, определенный в лемме 8.1. Тогда в силу леммы 8.1 и соотношения (8.10) имеем

$$\mathbf{L}^1 \hat{\mathbf{R}}_1 f = f + \mathbf{M}_{\mathcal{K}} f + (\mathbf{S}_{\mathcal{K}} + \mathbf{T}_0) f + \{0, \mathbf{B}^1 \mathbf{R}^0 (1-\psi) f\}. \tag{8.11}$$

Так как $\operatorname{supp} \mathbf{R}_0(1-\psi)f \subset \overline{G} \setminus \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{K})$, то из определения оператора $\mathbf{B}^1$ следует, что $\mathbf{B}^1 \mathbf{R}_0 (1-\psi) f = 0$. Тогда из соотношения (8.11) и леммы 1.2 вытекает, что оператор $\mathbf{L}^1 \hat{\mathbf{R}}_1 : \mathcal{S}^l(G, \partial G) \to \mathcal{S}^l(G, \partial G)$ фредгольмов и, значит, имеет правый регуляризатор, т. е. существует ограниченный оператор $\mathbf{R}_1' : \mathcal{S}^l(G, \partial G) \to \mathcal{S}^l(G, \partial G)$ и компактный оператор $\mathbf{T}_1 : \mathcal{S}^l(G, \partial G) \to \mathcal{S}^l(G, \partial G)$ такие, что

$$\mathbf{L}^1 \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1' = \mathbf{I}_1 + \mathbf{T}_1,$$

где $\mathbf{I}_1$ — единичный оператор в пространстве $\mathcal{S}^l(G, \partial G)$. Обозначая $\mathbf{R}_1 = \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1'$, завершаем доказательство. □

8.2. Построение правого регуляризатора в случае $\mathbf{B}^2_{i\mu} \neq 0$

В этом пункте будем считать число ε_0 фиксированным и рассмотрим оператор $\mathbf{L}$ в случае $\mathbf{B}^2_{i\mu} \neq 0$. Другими словами, предположим, что носитель нелокальных членов содержится не только вблизи множества $\mathcal{K}$, но и вне этого множества.

Пусть ξ и ψ — функции, определенные перед леммой 8.1, но теперь считаем, что $\delta > 0$ произвольно (в частности, не зависит от ε_0).

При построении правого регуляризатора для оператора $\mathbf{L}$ нам понадобится «правый регуляризатор» $\mathbf{R}_{\mathcal{K}}'$ для оператора $\mathbf{L}^1$, определенный на функциях $f' = \{f_{i\mu}\} \in \mathcal{S}_1^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G))$ и обладающий тем свойством, что диаметр носителя функции $\mathbf{R}_{\mathcal{K}}' f'$, сосредоточенного вблизи множества $\mathcal{K}_1$, может быть сделан сколь угодно малым.

Лемма 8.3. *Пусть выполнено условие* 7.1. *Тогда для любого* δ, $0 < \delta < 1$, *существуют такие ограниченные операторы*

$$\mathbf{R}_{\mathcal{K}}' : \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to S^{l+2m}(G), \quad \mathbf{M}_{\mathcal{K}}', \mathbf{T}_{\mathcal{K}}' : \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to \mathcal{S}^l(G, \partial G),$$

что

$$\mathbf{L}^1 \mathbf{R}_{\mathcal{K}}' f' = \psi\{0, f'\} + \mathbf{M}_{\mathcal{K}}' f' + \mathbf{T}_{\mathcal{K}}' f', \tag{8.12}$$

$\|\mathbf{M}_{\mathcal{K}}'\| \leqslant c\delta$, *оператор* $\mathbf{T}_{\mathcal{K}}'$ *компактный,* $c > 0$ *не зависит от* δ.

Доказательство. Сделаем в окрестности множества $\mathcal{K}$ замену переменных $y \to y'$ из п. 6.1 и обозначим y' снова через y. Функции ψ, ξ и f', записанные в новых координатах, будем обозначать теми же символами.

Положим $f = (0, f') \in \mathcal{S}^l(G, \partial G)$. В силу леммы 7.1 $\psi f - \mathcal{L}\mathcal{A}(\psi f) \in \mathcal{H}_0^l(K, \gamma)$. Следовательно,

$$\mathcal{L}_0^{-1}(\psi f - \mathcal{L}\mathcal{A}(\psi f)) \in \mathcal{H}_0^{l+2m}(K),$$

где $\mathcal{L}_0 : \mathcal{H}_0^{l+2m}(K) \to \mathcal{H}_0^l(K, \gamma)$ — оператор, заданный в (7.44) при $a = 0$. Положим

$$\mathbf{R}'_{\mathcal{K}} f' = \xi U, \quad U = \mathcal{L}_0^{-1}(\psi f - \mathcal{L}\mathcal{A}(\psi f)) + \mathcal{A}(\psi f).$$

Покажем, что оператор $\mathbf{R}'_{\mathcal{K}}$ искомый. Используя ограниченность оператора вложения $\mathcal{H}_0^{l+2m}(K) \subset \mathcal{W}^{l+2m}(K)$, заданного на функциях с компактным носителем, неравенство (7.4) и ограниченность операторов $\mathcal{A}$, получаем ограниченность оператора $\mathbf{R}'_{\mathcal{K}}$.

Докажем соотношение (8.12). Аналогично доказательству леммы 8.1 имеем

$$\mathbf{P}_j(y, D)(\xi U_j) = [\mathbf{P}_j(y, D), \xi] U_j + \xi(y)\big(\mathbf{P}_j(y, D) - \mathcal{P}_j(D)\big) U_j, \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)(\xi U) - \psi f_{j\sigma\mu} = {} & [\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D), \xi] U + \\ & + \xi(y)\big(\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D) - \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)\big) U. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Из равенства (8.13) и леммы 1.1 получаем

$$\mathbf{P}\mathbf{R}'_{\mathcal{K}} f' = (M'_0 + T'_0) f', \tag{8.15}$$

где оператор M'_0 «малый» (т. е. $\|M'_0\| \leqslant k_1 \delta$), оператор $T_0 : \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to W^l(G)$ компактный, $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от δ.

Коммутатор в правой части формулы (8.4) содержит младшие производные функции U и операторы вида

$$U_k \mapsto J_{j\sigma\mu ks} = \big(\xi(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) - \xi(y)\big)\big(B_{j\sigma\mu ks}(y, D) U_k\big)\big(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y\big)\big|_{\gamma_{j\sigma}}, \qquad (k, s) \neq (j, 0). \tag{8.16}$$

Так как функция ξ имеет компактный носитель и равна единице вблизи начала координат, то носитель функции $\xi(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) - \xi(y)$ ограничен и отделен от начала координат. Следовательно, используя теорему 4.3 в [39, гл. 2] (об априорной оценке решений эллиптических уравнений) и учитывая, что $\mathcal{P}_j(D) U_j = 0$, получаем

$$\|J_{j\sigma\mu ks}\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \leqslant k_2 \|U_k\|_{W^{l+2m-1}(Q_k)}, \tag{8.17}$$

где Q_k — ограниченная область такая, что $\overline{Q_k} \subset K_k$. Из (8.17) и компактности вложения $W^{l+2m}(Q_k) \subset W^{l+2m-1}(Q_k)$ вытекает компактность оператора (8.16), а значит, и коммутатора в (8.4).

Младшие производные из второго слагаемого в правой части формулы (8.4) также образуют компактный оператор. Рассмотрим произвольное слагаемое, содержащее старшую производную порядка α, $|\alpha| = m_{j\sigma\mu}$, при $(k,s) \neq (j,0)$; оно имеет вид

$$\begin{aligned}\xi(y)\big(\zeta(G_{j\sigma ks}y)b(G_{j\sigma ks}y) - b(0)\big)(D^\alpha U)(G_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}} = \\ = \xi(y)\zeta(G_{j\sigma ks}y)\big(b(G_{j\sigma ks}y) - b(0)\big)(D^\alpha U)(G_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}} + \\ + \xi(y)\big(\zeta(G_{j\sigma ks}y) - 1\big)b(0)(D^\alpha U)(G_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}}. \quad (8.18)\end{aligned}$$

Используя лемму 1.1, первую разность в правой части (8.18) можно представить в виде суммы «малого» и компактного операторов. Кроме того, если $(k,s) = (j,0)$, то вторая разность в правой части (8.18) отсутствует. Таким образом,

$$(\mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu})\mathbf{R}'_{\mathcal{K}} f' - \psi f' = (M'_{i\mu} + T'_{i\mu} + S'_{i\mu}) f', \quad (8.19)$$

где $\|M'_{i\mu}\| \leqslant k_3\delta$, оператор $T'_{i\mu}$ компактный, а оператор $S'_{i\mu}$ состоит из слагаемых, которые в координатах y' записываются в виде

$$S'_{j\sigma\mu} f' = \xi(y')\big(\zeta(G_{j\sigma ks}y') - 1\big)b(0)(D^\alpha U_k)(G_{j\sigma ks}y')|_{\gamma_{j\sigma}}.$$

Так как функция ζ имеет компактный носитель и равна единице вблизи начала координат, то носитель функции $\zeta(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y') - 1$ ограничен и отделен от начала координат. Снова используя теорему 4.3 в [39, гл. 2] (об априорной оценке решений эллиптических уравнений) и учитывая, что $\mathcal{P}_j(D)U_j = 0$, получаем

$$\|S'_{j\sigma\mu} f'\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \leqslant k_3 \|U_k\|_{W^{l+2m-1}(Q_k)}, \quad (8.20)$$

где Q_k — ограниченные области такие, что $\overline{Q_j} \subset K_k$. Из (8.20) и компактности вложения $W^{l+2m}(Q_k) \subset W^{l+2m-1}(Q_k)$ вытекает компактность оператора $S'_{j\sigma\mu}$, а значит, и $S'_{i\mu}$. Отсюда и из соотношений (8.15) и (8.19) получаем утверждение леммы. □

Для каждой точки $g \in \partial G \backslash \mathcal{O}_{2\delta}(\mathcal{K})$ рассмотрим ее $\delta/2$-окрестность $\mathcal{O}_{\delta/2}(g)$. Все эти окрестности, вместе с множеством $\mathcal{O}_{2\delta}(\mathcal{K})$, образуют покрытие ∂G. Выберем конечное подпокрытие $\mathcal{O}_{2\delta}(\mathcal{K})$, $\mathcal{O}_{\delta/2}(g_j)$, $j = 1, \ldots, J$, $J = J(\delta)$ границы ∂G. Пусть $\psi, \psi'_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, \ldots, J$, — разбиение единицы, подчиненное

этому покрытию (считаем, что функция ψ из леммы 8.3 совпадает с функцией ψ из введенного здесь разбиения единицы).

Согласно общей теории эллиптических краевых задач в областях с гладкой границей (см., например, [8]) существуют такие ограниченные операторы

$$\mathbf{R}'_{0j} : \{f' \in \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G),\ \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}_{\delta/2}(g_j)\} \to \\ \to \{u \in W^{l+2m}(G) : \operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{\delta}(g_j)\}$$

и компактные операторы

$$\mathbf{T}'_{0j} : \{f' \in \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}_{\delta/2}(g_j)\} \to \\ \to \{f \in \mathcal{W}^{l}(G, \partial G) : \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}_{\delta}(g_j)\},$$

что

$$\mathbf{L}^0 \mathbf{R}'_{0j} f' = \{0, f'\} + \mathbf{T}'_{0j} f'.$$

Для любой функции $f' \in \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ положим

$$\mathbf{R}'_1 f' = \mathbf{R}'_{\mathcal{K}} f' + \sum_{j=1}^{J} \mathbf{R}'_{0j}(\psi'_j f'). \tag{8.21}$$

Аналогично доказательству леммы 8.2 (используя лемму 8.3 вместо леммы 8.1) можно показать, что

$$\mathbf{L}^1 \mathbf{R}'_1 f' = \{0, f'\} + \mathbf{M}'_1 f' + \mathbf{T}'_1 f'; \tag{8.22}$$

здесь $\mathbf{M}'_1, \mathbf{T}'_1 : \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to \mathcal{S}^{l}(G, \partial G)$ — такие ограниченные операторы, что $\|\mathbf{M}'_1\| \leqslant c\delta$, где $c > 0$ не зависит от δ, а $\mathbf{T}'_1$ — компактный оператор.

При помощи операторов $\mathbf{R}_1$ (см. лемму 8.2) и $\mathbf{R}'_1$ (см. (8.21)) мы построим правый регуляризатор для оператора $\mathbf{L}$ в случае $\mathbf{B}^2_{i\mu} \neq 0$.

Введем множество

$$\mathcal{S}^l_B(G, \partial G) = \{f \in \mathcal{S}^l(G, \partial G) : \\ \Phi = \mathbf{B}^2 \mathbf{R}_1 f \text{ и } \mathbf{B}^2 \mathbf{R}'_1 \Phi \text{ принадлежат } \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)\}.$$

Из теоремы вложения Соболева и теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве следует, что $\mathcal{S}^l_B(G, \partial G)$ — замкнутое подпространства конечной коразмерности в $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$. Очевидно также, что $\mathcal{S}^l_B(G, \partial G) \subset \mathcal{S}^l(G, \partial G)$.

Лемма 8.4. *Пусть выполнено условие* 7.1. *Тогда существуют ограниченный оператор* $\mathbf{R} : \mathcal{W}^l(G, \partial G) \to W^{l+2m}(G)$ *и компактный оператор* $\mathbf{T} : \mathcal{W}^l(G, \partial G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ *такие, что*

$$\mathbf{LR} = \mathbf{I} + \mathbf{T}, \tag{8.23}$$

где $\mathbf{I}$ — *единичный оператор в* $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$.

Доказательство. 1. Положим $\Phi = \mathbf{B}^2\mathbf{R}_1 f$, где $f = \{f_0, f'\} \in \mathcal{S}^l_B(G, \partial G)$. Тогда по определению пространства $\mathcal{S}^l_B(G, \partial G)$ функции Φ и $\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi$ принадлежат области определения оператора $\mathbf{R}'_1$. Следовательно, мы можем ввести ограниченный оператор $\mathbf{R}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}^l_B(G, \partial G) \to W^{l+2m}(G)$ по формуле

$$\mathbf{R}_{\mathcal{S}} f = \mathbf{R}_1 f - \mathbf{R}'_1\Phi + \mathbf{R}'_1\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi.$$

Покажем, что оператор $\mathbf{R}_{\mathcal{S}}$ является правым обратным к $\mathbf{L}$ с точностью до суммы малого и компактного возмущений. Для простоты будем обозначать одной и той же буквой M различные операторы (действующие в соответствующих пространствах), чьи нормы не превосходят $c\delta$. Аналогично, одной и той же буквой T будем обозначать различные компактные операторы.

В силу (8.9) и (8.22) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{PR}_{\mathcal{S}} f &= \mathbf{PR}_1 f - \mathbf{PR}'_1(\Phi - \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi) = \\ &= f_0 + Tf_0 - M(\Phi - \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi) - T(\Phi - \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi) = f_0 + Mf + Tf, \end{aligned} \tag{8.24}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{CR}_{\mathcal{S}} f &= \mathbf{CR}_1 f - \mathbf{CR}'_1\Phi + \mathbf{CR}'_1\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi = \\ &= (f' + Tf') - (\Phi + M\Phi + T\Phi) + (\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi + M\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi + T\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi) = \\ &= f' - \Phi + \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi + Mf + Tf. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Применяя оператор $\mathbf{B}^2$ к функции $\mathbf{R}_{\mathcal{S}} f$, получим

$$\mathbf{B}^2\mathbf{R}_{\mathcal{S}} f = \Phi - \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi + \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi. \tag{8.26}$$

Складывая неравенства (8.25) и (8.26), получаем

$$\mathbf{BR}_{\mathcal{S}} f = f' + Mf + Tf + \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi. \tag{8.27}$$

Покажем, что

$$\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_1\Phi = 0 \tag{8.28}$$

для достаточно малого $\delta = \delta(\varkappa_1, \varkappa_2, \rho)$, где $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ — константы из условия 6.4. (Отметим, что δ не зависит от ε_0.)

В силу (8.21) имеем $\operatorname{supp} \mathbf{R}_1' \Phi \subset \overline{G} \setminus \overline{G}_{4\delta}$. Пусть δ настолько мало, что $4\delta < \rho$. Тогда из оценки (6.6) следует, что $\operatorname{supp} \mathbf{B}^2 \mathbf{R}_1' \Phi \subset \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$.

Далее, пусть δ настолько мало, что $4\delta < \varkappa_1$ и $\varkappa_2 + 3\delta/2 < \varkappa_1$. Тогда, используя (8.21) еще раз, видим, что $\operatorname{supp} \mathbf{R}_1' \mathbf{B}^2 \mathbf{R}_1' \Phi \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$. Отсюда и из неравенства (6.5) получаем (8.28).

Из соотношений (8.24), (8.27) и (8.28) вытекает, что

$$\mathbf{L}\mathbf{R}_{\mathcal{S}} = \mathbf{I}_{\mathcal{S}} + M + T,$$

где $\mathbf{I}_{\mathcal{S}}, M, T : \mathcal{S}_B^l(G, \partial G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ — такие ограниченные операторы, что $\mathbf{I}_{\mathcal{S}} f = f$, $\|M\| \leqslant c\delta$ ($c > 0$ не зависит от δ), а оператор T компактный.

3. Так как подпространство $\mathcal{S}_B^l(G, \partial G)$ имеет конечную коразмерность в $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$, то оператор $\mathbf{I}_{\mathcal{S}}$ фредгольмов. Следовательно, в силу теорем 16.2 и 16.4 в [38] оператор $\mathbf{I}_{\mathcal{S}} + M + T$ также фредгольмов при достаточно малом δ. Теперь из теоремы 15.2 в [38] вытекает существование ограниченного оператора $\tilde{\mathbf{R}}$ и компактного оператора $\mathbf{T}$, действующих из $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$ в $\mathcal{S}_B^l(G, \partial G)$ и в $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$ соответственно и таких, что $(\mathbf{I}_{\mathcal{S}} + M + T)\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I} + \mathbf{T}$. Обозначая $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathcal{S}} \tilde{\mathbf{R}} : \mathcal{W}^l(G, \partial G) \to W^{l+2m}(G)$, получим (8.23). □

8.3. Фредгольмова разрешимость нелокальных задач

В этом пункте мы докажем следующий результат о разрешимости задачи (6.7), (6.8) в ограниченных областях в пространствах Соболева.

Теорема 8.1. *Пусть выполнено условие* 7.1*; тогда оператор* $\mathbf{L} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind} \mathbf{L} = \operatorname{ind} \mathbf{L}^1$.

Обратно, пусть оператор $\mathbf{L} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ *фредгольмов*; *тогда выполнено условие* 7.1.

Ниже будет показано, что если условие 7.1 нарушено, то образ оператора $\mathbf{L}$ незамкнут (лемма 8.7). Отсюда, из теоремы 8.1 настоящей работы и теоремы 7.1 в [38] получаем следующий результат.

Следствие 8.1. *Условие* 7.1 *необходимо и достаточно для выполнения априорной оценки*

$$\|u\|_{W^{l+2m}(G)} \leqslant c(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{W}^l(G,\partial G)} + \|u\|_{L_2(G)}),$$

где $c > 0$ *не зависит от* u.

Доказательство теоремы 8.1**. Достаточность**

Покажем, что ядро оператора $\mathbf{L}$ конечномерно. Для этого рассмотрим задачу (6.7), (6.8) в весовых пространствах.

Введем оператор

$$\mathbf{L}_a = \{\mathbf{P},\, \mathbf{B}\} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G), \quad a > l + 2m - 1,$$

соответствующий задаче (6.7), (6.8) в весовых пространствах. Заметим, что в силу (6.5) и леммы 5.3 при $a > l + 2m - 1$ имеем

$$\mathbf{B}_{i\mu}^2 u \in W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i) \subset H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$$

для любой функции $u \in H_a^{l+2m}(G) \subset W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$. Так как функции $\mathbf{B}_{i\mu}^0 u$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^1 u$ также принадлежат $H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, то оператор $\mathbf{L}_a$ корректно определен.

Таким образом, операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_a$ соответствуют одной и той же нелокальной задаче (6.7), (6.8), которая рассматривается соответственно в пространствах Соболева и весовых пространствах.

Лемма 8.5. *Ядро оператора* $\mathbf{L}$ *конечномерно.*

Доказательство. Из леммы 6.1 настоящей работы и[1] теоремы 3.2 в [63] следует, что оператор $\mathbf{L}_a$ фредгольмов для почти всех $a > l + 2m - 1$. Зафиксируем $a > l + 2m - 1$, при котором оператор $\mathbf{L}_a$ фредгольмов. По лемме 5.2 $W^{l+2m}(G) \subset H_a^{l+2m}(G)$; следовательно, $\ker \mathbf{L} \subset \ker \mathbf{L}_a$. Так как $\ker \mathbf{L}_a$ конечномерно при выбранном a, то и $\ker \mathbf{L}$ также конечномерно. □

Замечание 8.1. Подчеркнем, что ядро оператора $\mathbf{L}$ конечномерно вне зависимости от расположения собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

В силу теоремы 15.2 в [38] и леммы 8.4 образ оператора $\mathbf{L}$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Отсюда и из леммы 8.5 следует фредгольмовость оператора $\mathbf{L}$.

Покажем, что $\operatorname{ind} \mathbf{L} = \operatorname{ind} \mathbf{L}^1$. Введем оператор

$$\mathbf{L}_t u = \{\mathbf{P}u,\, \mathbf{C}u + (1-t)\mathbf{B}^2 u\}.$$

[1]Теорема 3.2 в [63] сформулирована для случая, когда операторы $\mathbf{B}_{i\mu}^2$ имеют тот же вид, что в п. 6.2 (главы II). Однако доказательство теоремы 3.2 в [63] основано на неравенствах (6.5) и (6.6) и не зависит от явного вида операторов $\mathbf{B}_{i\mu}^2$ (см. также [23]).

Очевидно, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}^1$.

По доказанному операторы $\mathbf{L}_t$ фредгольмовы при всех t. Далее, для любых t_0 и t справедлива оценка

$$\|\mathbf{L}_t u - \mathbf{L}_{t_0} u\|_{\mathcal{W}^l(G,\partial G)} \leqslant k_{t_0}|t - t_0| \cdot \|u\|_{W^{l+2m}(G)},$$

где $k_{t_0} > 0$ не зависит от t. Следовательно, по теореме 16.2 в [38] $\operatorname{ind}\mathbf{L}_t = \operatorname{ind}\mathbf{L}_{t_0}$ для всех t из достаточно малой окрестности точки t_0. Так как t_0 произвольно, то эти окрестности покрывают отрезок $[0,1]$. Выбирая конечное подпокрытие, получаем $\operatorname{ind}\mathbf{L} = \operatorname{ind}\mathbf{L}_0 = \operatorname{ind}\mathbf{L}_1 = \operatorname{ind}\mathbf{L}^1$. Достаточность условия 7.1 в теореме 8.1 доказана.

Доказательство теоремы 8.1. Необходимость

Положим $d = d(\varrho) = 2d_2\varrho$, где d_2 определено в (6.15).

Лемма 8.6. *Пусть образ оператора* $\mathbf{L}$ *замкнут. Тогда при всех достаточно малых* $\varrho > 0$ *и* $U \in \mathcal{W}^{l+2m}(K^d)$ *выполнена оценка*

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} \leqslant c\left(\|\mathcal{L}U\|_{\mathcal{W}^l(K^{2\varrho},\gamma^{2\varrho})} + \sum_{j=1}^{N}\|\mathcal{P}_j(D)U_j\|_{W^l(K_j^d)} + \|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K^d)}\right). \tag{8.29}$$

Доказательство. 1. Так как образ оператора $\mathbf{L}$ замкнут, то в силу леммы 8.5, компактности оператора вложения $W^{l+2m}(G) \subset W^{l+2m-1}(G)$ и теоремы 7.1 в [38] следует, что

$$\|u\|_{W^{l+2m}(G)} \leqslant c(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{W}^l(G,\partial G)} + \|u\|_{W^{l+2m-1}(G)}). \tag{8.30}$$

Подставим в (8.30) такую функцию $u \in W^{l+2m}(G)$, что $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{2\varrho}(\mathcal{K})$, $2\varrho < \min\{\varepsilon_0, \varkappa_1\}$. В силу (6.5) $\mathbf{B}^2 u = 0$ для такой функции u. Следовательно, используя лемму 3.2 в [39, гл. 2], получим оценку

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)} \leqslant c(\|\mathcal{L}U\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)} + \|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K)}), \tag{8.31}$$

справедливую для всех таких $U \in \mathcal{W}^{l+2m}(K)$, что $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{2\varrho}(0)$, где ϱ достаточно мало.

2. Теперь снимем ограничение $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{2\varrho}(0)$ и покажем, что оценка (8.29) справедлива для любой функции $U \in \mathcal{W}^{l+2m}(K^d)$.

Введем функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\psi(y) = 1$ при $|y| \leqslant \varrho$, $\operatorname{supp}\psi \subset \mathcal{O}_{2\varrho}(0)$ и ψ не зависит от полярного угла ω. Используя неравенство (8.31) и

формулу Лейбница, для функций $U \in \mathcal{W}^{l+2m}(K^d)$ получим

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} &\leqslant \|\psi U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)} \leqslant k_1(\|\mathcal{L}(\psi U)\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)} + \|\psi U\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K)}) \leqslant \\ &\leqslant k_2(\|\psi \mathcal{L} U\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)} + \sum_{j,\sigma,\mu} \sum_{(k,s)\neq(j,0)} \|J_{j\sigma\mu ks}\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} + \\ &+ \|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K^{2\varrho})}),\end{aligned} \tag{8.32}$$

где

$$J_{j\sigma\mu ks} = \big(\psi(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) - \psi(y)\big)\big(B_{j\sigma\mu ks}(D)U_k\big)\big(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y\big)\big|_{\gamma_{j\sigma}}.$$

Аналогично (8.17) получаем

$$\begin{aligned}\|J_{j\sigma\mu ks}\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} &\leqslant k_4(\|\mathcal{P}_k(D)U_k\|_{W^l(\{d_1\varrho/2<|y|<2d_2\varrho\})} + \\ &+ \|U_k\|_{W^{l+2m-1}(\{d_1\varrho/2<|y|<2d_2\varrho\})}).\end{aligned} \tag{8.33}$$

Теперь оценка (8.29) следует из (8.32) и (8.33). □

Лемма 8.7. *Пусть на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ *имеется собственное значение оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда образ оператора* $\mathbf{L}$ *незамкнут.*

Доказательство. 1. Предположим, что образ оператора $\mathbf{L}$ замкнут. Возможны следующие два случая: либо (a) прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ содержит неправильное собственное значение, либо (b) прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ содержит только правильное собственное значение $\lambda_0 = i(1-l-2m)$ (см. определение 7.1).

2. Вначале предположим, что на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ имеется неправильное собственное значение $\lambda = \lambda_0$. Покажем, что оценка (8.29) в этом случае нарушается. Обозначим через $\varphi^{(0)}(\omega), \dots, \varphi^{(\varkappa-1)}(\omega)$ собственный и присоединенные векторы (*жорданову цепочку* длины $\varkappa \geqslant 1$), соответствующие собственному значению λ_0 (см. [12]). Векторы $\varphi^{(k)}(\omega)$ принадлежат $\mathcal{W}^{l+2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$, и по лемме 2.1 в [13]

$$\mathcal{L}V^k = 0, \tag{8.34}$$

где

$$V^k = r^{i\lambda_0} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!}(i\ln r)^k \varphi^{(k-s)}(\omega), \quad k = 0, \dots, \varkappa - 1.$$

Так как λ_0 неправильное собственное значение, то функция $V^k(y)$ не является вектор-полиномом при некотором $k \geqslant 0$. Предположим для простоты, что $V^0 = r^{i\lambda_0}\varphi^{(0)}(\omega)$ не является вектор-полиномом (случай $k > 0$ рассматривается аналогично).

Введем последовательность $U^\delta = r^\delta V^0/\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)}$. Для любого $\delta > 0$ знаменатель конечен, но $\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} \to \infty$ при $\delta \to 0$, так как V^0 не является вектор-полиномом. Однако $\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K^d)} \leqslant c$, где $c > 0$ не зависит от $\delta \geqslant 0$; следовательно,

$$\|U^\delta\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K^d)} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0. \tag{8.35}$$

Более того, из соотношения (8.34) имеем

$$\mathcal{P}_j(D)U^\delta = \frac{r^\delta \mathcal{P}_j(D)V^0 + \sum\limits_{|\alpha|+|\beta|=2m, |\alpha|\geqslant 1} p_{j\alpha\beta} D^\alpha r^\delta \cdot D^\beta V_j^0}{\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)}} = \\ = \frac{\sum\limits_{|\alpha|+|\beta|=2m, |\alpha|\geqslant 1} p_{j\alpha\beta} D^\alpha r^\delta \cdot D^\beta V_j^0}{\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)}},$$

где $p_{j\alpha\beta}$ — некоторые комплексные константы. Следовательно,

$$|D^\xi \mathcal{P}_j(D)U^\delta| \leqslant c_{j\xi}\delta r^{l-1-|\xi|+\delta}/\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} \quad (|\xi| \leqslant l),$$

откуда получаем

$$\|\mathcal{P}_j(D)U^\delta\|_{W^l(K_j^d)} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0. \tag{8.36}$$

Аналогично, используя (8.34), можно доказать, что

$$\|\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^\delta|_{\gamma_{j\sigma}}\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^{2\varrho})} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0. \tag{8.37}$$

(Для доказательства (8.37) нужно дополнительно оценить выражение

$$\frac{\sum\limits_{(k,s)\neq(j,0)} \|(\chi_{j\sigma ks}^\delta - 1) r^\delta (B_{j\sigma\mu ks}(y,D)V^0)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}}\|_{W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^{2\varrho})}}{\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)}},$$

которое также стремится к нулю при $\delta \to 0$ в силу неравенства $|\chi_{j\sigma ks}^\delta - 1| \leqslant k_6\delta$.)

Однако утверждения (8.35)–(8.37) противоречат оценке (8.29), так как

$$\|U^\delta\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} = 1.$$

3. Осталось рассмотреть случай, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ имеется только правильное собственное значение $\lambda_0 = i(1 - l - 2m)$ of $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. В этом случае мы не можем повторить приведенные выше рассуждения, так как V^0 — вектор-полином и нормы $\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)}$ равномерно ограничены при $\delta \to 0$.

Воспользуемся результатами из п. 7.3 (главы II). Согласно лемме 7.3 существует такая последовательность $f^\delta \in \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$, $\delta > 0$, что $\operatorname{supp} f^\delta \subset \mathcal{O}_\varrho(0)$ и f^δ

сходится в $\mathcal{W}^l(K,\gamma)$ к функции $f^0 \notin \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ при $\delta \to 0$. По лемме 7.6 для каждой функции f^δ существует такая функция $U^\delta \in \mathcal{W}^{l+2m}(K^d)$, что

$$\mathcal{L}U^\delta = f^\delta, \tag{8.38}$$

$$\|U^\delta\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K^d)} \leqslant c\|f^\delta\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)} \tag{8.39}$$

($c > 0$ не зависит от δ) и U^δ удовлетворяет соотношениям (7.30). Из неравенств (8.29) и (8.39), соотношения (8.38) и сходимости f^δ в пространстве $\mathcal{W}^l(K,\gamma)$ следует, что последовательность U^δ фундаментальна в $\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)$. Значит, последовательность U^δ сходится в $\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)$ к некоторой функции U при $\delta \to 0$. Более того, предельная функция U также удовлетворяет соотношениям (7.30) и в силу ограниченности оператора

$$\mathcal{L} : \mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho) \to \mathcal{W}^l(K^{2d_1\varrho}, \gamma^{2d_1\varrho})$$

имеет место равенство

$$\mathcal{L}U = f^0 \quad \text{при } y \in \mathcal{O}_{2d_1\varrho}(0).$$

Рассмотрим функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\psi(y) = 1$ при $|y| \leqslant d_1^2\varrho$ и $\operatorname{supp}\psi \subset \mathcal{O}_{2d_1^2\varrho}(0)$. Очевидно, $\psi U \in \mathcal{W}^{l+2m}(K)$, ψU удовлетворяет соотношениям (7.30) и $\operatorname{supp}\mathfrak{L}(\psi U) \subset \mathcal{O}_{2d_1\varrho}(0)$. Следовательно,

$$\mathcal{L}(\psi U) = \psi f^0 + \hat{f},$$

где $\hat{f} \in \mathcal{W}^l(K,\gamma)$ и носитель $\hat{f}$ компактен и отделен от начала координат. Значит, функция $\psi f^0 + \hat{f}$, так же как и f^0, не принадлежит $\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$. Но это противоречит лемме 7.2. □

Теперь необходимость условия 7.1 в теореме 8.1 вытекает из леммы 8.7.

9. Нелокальные задачи в весовых пространствах с малым показателем веса

9.1. Формулировка основного результата

В п. 8.3 мы ввели оператор

$$\mathbf{L}_a = \{\mathbf{P}, \mathbf{B}\} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G), \quad a > l + 2m - 1. \tag{9.1}$$

Как уже отмечалось выше, оператор $\mathbf{L}_a$ фредгольмов при почти всех $a > l + 2m - 1$ в силу леммы 6.1 настоящей работы и теоремы 3.2 в [63].

В этом параграфе мы изучим задачу (6.7), (6.8) в весовых пространствах с показателем веса $a > 0$. В этом случае, как и ранее, $\mathbf{B}^2_{i\mu}u \in W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ для всех $u \in H^{l+2m}_a(G) \subset W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$. Однако функция $\mathbf{B}^2_{i\mu}u$ может теперь не принадлежать пространству $H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}_a(\Gamma_i)$, и тогда оператор $\mathbf{L}_a$, заданный в (9.1), не будет корректно определен.

Введем множество

$$S^{l+2m}_a(G) = \left\{u \in H^{l+2m}_a(G) : \text{функции } \mathbf{B}^2_{i\mu}u \text{ удовлетворяют условиям (5.5)}\right\}.$$

Используя неравенство (6.5), получим

$$\|\mathbf{B}^2_{i\mu}u\|_{W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_1\|u\|_{W^{l+2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})} \leqslant k_2\|u\|_{H^{l+2m}_a(G)}$$

для всех $u \in H^{l+2m}_a(G)$. Отсюда, из неравенства Соболева и теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве следует, что $S^{l+2m}_a(G)$ есть замкнутое подпространство конечной коразмерности в $H^{l+2m}_a(G)$.

С другой стороны, по лемме 5.2 $\mathbf{B}^2_{i\mu}u \in H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}_a(\Gamma_i)$ для любой функции $u \in S^{l+2m}_a(G)$, $a > 0$. Так как функции $\mathbf{B}^0_{i\mu}u$ и $\mathbf{B}^1_{i\mu}u$ принадлежат пространству $H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}_a(\Gamma_i)$ при всех $a \in \mathbb{R}$ и $u \in S^{l+2m}_a(G)$ (и даже при $u \in H^{l+2m}_a(G)$), то

$$\{\mathbf{P}u,\, \mathbf{B}u\} \in \mathcal{H}^l_a(G, \partial G) \quad \forall u \in S^{l+2m}_a(G),\ a > 0.$$

Таким образом, существует такое *конечномерное* пространство $\mathcal{R}^l_a(G, \partial G)$ (содержащееся в $\{0\} \times \prod\limits_{i,\mu} H^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}_{a'}(\Gamma_i)$, $a' > l + 2m - 1$), что

$$\{\mathbf{P}u,\, \mathbf{B}u\} \in \mathcal{H}^l_a(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l_a(G, \partial G) \quad \forall u \in H^{l+2m}_a(G),\ a > 0.$$

Следовательно, мы можем определить ограниченный оператор

$$\mathbf{L}_a = \{\mathbf{P},\, \mathbf{B}\} : H^{l+2m}_a(G) \to \mathcal{H}^l_a(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l_a(G, \partial G), \quad a > 0.$$

Очевидно, можно считать, что $\mathcal{R}^l_a(G, \partial G) = \{0\}$, если $a > l + 2m - 1$.

Теорема 9.1. *Пусть $a > 0$ и прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$; тогда оператор $\mathbf{L}_a : H^{l+2m}_a(G) \to \mathcal{H}^l_a(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l_a(G, \partial G)$ фредгольмов.*

Обратно, пусть оператор $\mathbf{L}_a : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$ *фредгольмов*; *тогда прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Заметим, что если $f \in \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$, то $\|f\|_{\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)\dotplus\mathcal{R}_a^l(G,\partial G)} = \|f\|_{\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)}$. Отсюда, из теоремы 9.1 и теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве вытекает следующий результат.

Следствие 9.1. *Пусть* $a > 0$ *и прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда существуют такие функции* $f^q \in \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$, $q = 1, \dots, q_1$, *что если правая часть* f *задачи* (6.7), (6.8) *принадлежит* $\mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ *и*

$$(f, f^q)_{\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)} = 0, \quad q = 1, \dots, q_1,$$

то задача (6.7), (6.8) *имеет решение* $u \in H_a^{l+2m}(G)$.

Следствие 9.1 показывает, что хотя включение $u \in H_a^{l+2m}(G)$ при $0 < a \leqslant l+2m-1$, вообще говоря, не влечет включения $\mathbf{L}_a u \in \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$, но если на правую часть $f \in \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ наложить конечное число условий ортогональности, то задача (6.7), (6.8) будет иметь решение $u \in H_a^{l+2m}(G)$.

9.2. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 9.1. Достаточность

Лемма 9.1. *Ядро оператора* $\mathbf{L}_a$ *конечномерно.*

Доказательство. Так как $H_a^{l+2m}(G) \subset H_{a'}^{l+2m}(G)$ при $a \leqslant a'$, то доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 8.5. □

Перейдем к построению правого регуляризатора для оператора $\mathbf{L}_a$.

Как отмечалось выше, функции $\mathbf{B}_{i\mu}^0 u$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^1 u$ принадлежат $H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ при всех $u \in H_a^{l+2m}(G)$ и $a \in \mathbb{R}$. Следовательно, мы можем задать ограниченный оператор

$$\mathbf{L}_a^1 = \{\mathbf{P}, \mathbf{C}\} : H_a^{l+2m}(G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G).$$

В [63, § 3] доказано существование ограниченного оператора

$$\mathbf{R}_{a,1} : \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \to H_a^{l+2m}(G)$$

и компактного оператора $\mathbf{T}_{a,1} : \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ таких, что

$$\mathbf{L}_a^1 \mathbf{R}_{a,1} = \mathbf{I}_a + \mathbf{T}_a, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{I}_a$ — единичный оператор в $\mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$.

Сформулируем аналог леммы 8.3 в весовых пространствах.

Пусть ξ и ψ — функции, определенные перед леммой 8.1, но теперь считаем, что $\delta > 0$ произвольно (в частности, не зависит от ε_0).

Лемма 9.2. *Пусть прямая* $\operatorname{Im} \lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда для любого* δ, $0 < \delta < 1$, *существуют такие ограниченные операторы*

$$\mathbf{R}'_{a,\mathcal{K}} : \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to H_a^{l+2m}(G),$$
$$\mathbf{M}'_{a,\mathcal{K}}, \mathbf{T}'_{a,\mathcal{K}} : \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$$

что $\|\mathbf{M}'_{a,\mathcal{K}}\| \leqslant c\delta$, *где* $c > 0$ *не зависит от* δ, *оператор* $\mathbf{T}'_{a,\mathcal{K}}$ *компактный и*

$$\mathbf{L}_a^1 \mathbf{R}'_{a,\mathcal{K}} f' = \psi\{0, f'\} + \mathbf{M}'_{a,\mathcal{K}} f' + \mathbf{T}'_{a,\mathcal{K}} f'.$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 в [62] следует, что оператор $\mathcal{L}_a$, определенный в (7.44), имеет ограниченный обратный. Положим

$$\mathbf{R}'_{a,\mathcal{K}} f' = \xi U, \quad U = \mathcal{L}_a^{-1}(\psi\{0, f'\}),$$

где ξ и ψ — те же функции, что в доказательстве леммы 8.3. Далее доказательство аналогично доказательству леммы 8.3. □

Для любой функции $f' \in \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ положим

$$\mathbf{R}'_{a,1} f' = \mathbf{R}'_{a,\mathcal{K}} f' + \sum_{j=1}^{J} \mathbf{R}'_{0j}(\psi'_j f'), \tag{9.3}$$

где функции ψ'_j и операторы $\mathbf{R}'_{0j}$ те же, что в п. 8.2.

При помощи леммы 9.2 непосредственно проверяется, что

$$\mathbf{L}_a^1 \mathbf{R}'_{a,1} f' = \{0, f'\} + \mathbf{M}'_{a,1} f' + \mathbf{T}'_{a,1} f'. \tag{9.4}$$

Здесь $\mathbf{M}'_{a,1}, \mathbf{T}'_{a,1} : \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$ — такие ограниченные операторы, что $\|\mathbf{M}'_{a,1}\| \leqslant c\delta$, где $c > 0$ не зависит от δ, а оператор $\mathbf{T}'_{a,1}$ компактный.

Используя операторы $\mathbf{R}_{a,1}$ и $\mathbf{R}'_{a,1}$, мы построим правый регуляризатор для задачи (6.7), (6.8) в весовых пространствах в случае, когда $\mathbf{B}_{i\mu}^2 \neq 0$.

Для $a > 0$ введем множество

$$\mathcal{S}_a^l(G,\partial G) = \{f \in \mathcal{H}_a^l(G,\partial G) : \\ \Phi = \mathbf{B}^2\mathbf{R}_{a,1}f \text{ и } \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_{a,1}\Phi \text{ принадлежат } \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)\}.$$

Прежде всего, покажем, что $\mathcal{S}_a^l(G,\partial G)$ — замкнутое подпространство конечной коразмерности в $\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)$. Действительно, применяя неравенство (6.5), получим

$$\begin{aligned} \|\Phi_{i\mu}\|_{W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} &\leqslant k_1\|\mathbf{R}_{a,1}f\|_{W^{l+2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})} \leqslant \\ &\leqslant k_2\|\mathbf{R}_{a,1}f\|_{H_a^{l+2m}(G)} \leqslant k_3\|f\|_{\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Так как функция $\Phi_{i\mu}$ удовлетворяет условиям (5.5), то из (9.5) и леммы 5.2 вытекает, что $\Phi \in \mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ и

$$\|\Phi_{i\mu}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_4\|f\|_{\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)}. \tag{9.6}$$

Следовательно, выражение $\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_{a,1}\Phi$ корректно определено. Аналогично, используя (9.6) и (5.5), получим

$$\|\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_{a,1}\Phi\|_{\mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)} \leqslant k_5\|f\|_{\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)}, \tag{9.7}$$

$$\|\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_{a,1}\Phi\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)} \leqslant k_6\|f\|_{\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)}. \tag{9.8}$$

Из (9.5), (9.7), теоремы вложения Соболева и теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве вытекает, что $\mathcal{S}_a^l(G,\partial G)$ — замкнутое подпространство конечной коразмерности в $\mathcal{H}_a^l(G,\partial G)$. Следовательно,

$$\mathcal{H}_a^l(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G,\partial G) = \mathcal{S}_a^l(G,\partial G) \dotplus \hat{\mathcal{R}}_a^l(G,\partial G), \tag{9.9}$$

где $\hat{\mathcal{R}}_a^l(G,\partial G)$ — некоторое *конечномерное* пространство.

Теперь докажем следующий результат.

Лемма 9.3. *Пусть $a > 0$ и прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Тогда существуют ограниченный оператор $\mathbf{R}_a : \mathcal{H}_a^l(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G,\partial G) \to H_a^{l+2m}(G)$ и компактный оператор $\mathbf{T}_a : \mathcal{H}_a^l(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G,\partial G) \to \mathcal{H}_a^l(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G,\partial G)$ такие, что*

$$\mathbf{L}_a\mathbf{R}_a = \hat{\mathbf{I}}_a + \mathbf{T}_a, \tag{9.10}$$

где $\hat{\mathbf{I}}_a$ — единичный оператор в $\mathcal{H}_a^l(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G,\partial G)$.

Доказательство. 1. Положим $\Phi = \mathbf{B}^2\mathbf{R}_{a,1}f$, где $f \in \mathcal{S}_a^l(G, \partial G)$. Из (9.6) и (9.8) вытекает, что функции $\{0, \Phi\}$ и $\{0, \mathbf{B}^2\mathbf{R}'_{a,1}\Phi\}$ принадлежат $\mathcal{H}_a^l(G, \partial G)$. Следовательно, функции Φ и $\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_{a,1}\Phi$ принадлежат области определения оператора $\mathbf{R}'_{a,1}$, и мы можем ввести оператор

$$\mathbf{R}_{a,\mathcal{S}} : \mathcal{S}_a^l(G, \partial G) \to H_a^{l+2m}(G)$$

по формуле

$$\mathbf{R}_{a,\mathcal{S}}f = \mathbf{R}_{a,1}f - \mathbf{R}'_{a,1}\Phi + \mathbf{R}'_{a,1}\mathbf{B}^2\mathbf{R}'_{a,1}\Phi.$$

Аналогично доказательству леммы 8.4, используя неравенства (9.2) и (9.4), можно показать, что

$$\mathbf{L}_a\mathbf{R}_{a,\mathcal{S}} = \mathbf{I}_{a,\mathcal{S}} + M + T,$$

где $\mathbf{I}_{a,\mathcal{S}}, M, T : \mathcal{S}_a^l(G, \partial G) \to \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$ — такие ограниченные операторы, что $\mathbf{I}_{a,\mathcal{S}}f = f$, $\|M\| \leqslant c\delta$ ($c > 0$ не зависит от δ), а оператор T компактный.

2. Согласно (9.9) подпространство $\mathcal{S}_a^l(G, \partial G)$ имеет конечную коразмерность в $\mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$; следовательно, оператор $\mathbf{I}_{a,\mathcal{S}}$ фредгольмов. В силу теорем 16.2 и 16.4 в [38] оператор $\mathbf{I}_{a,\mathcal{S}} + M + T$ также фредгольмов при достаточно малом δ. Из теоремы 15.2 в [38] вытекает существование ограниченного оператора $\tilde{\mathbf{R}}_a$ и компактного оператора $\mathbf{T}_a$, действующих из $\mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$ в $\mathcal{S}_a^l(G, \partial G)$ и в $\mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G)$ соответственно и таких, что $(\mathbf{I}_{a,\mathcal{S}} + M + T)\tilde{\mathbf{R}}_a = \hat{\mathbf{I}}_a + \mathbf{T}_a$. Обозначая $\mathbf{R}_a = \mathbf{R}_{a,\mathcal{S}}\tilde{\mathbf{R}}_a : \mathcal{H}_a^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^l(G, \partial G) \to H_a^{l+2m}(G)$, получим (9.10). Лемма 9.3 доказана. □

В силу теоремы 15.2 в [38] и леммы 9.3 образ оператора $\mathbf{L}_a$, $a > 0$, замкнут и имеет конечную коразмерность. Отсюда и из леммы 9.1 получаем первую часть теоремы 9.1.

Доказательство теоремы 9.1. Необходимость

Лемма 9.4. *Пусть $a > 0$ и прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ содержит собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Тогда образ оператора $\mathbf{L}_a$ незамкнут.*

Доказательство. 1. Положим $d = d(\varrho) = 2d_2\varrho$, где d_2 определено в (6.15).

Предположим, что образ оператора $\mathbf{L}_a$ замкнут. Тогда аналогично доказательству леммы 8.6, используя лемму 9.1, компактность оператора вложения

$H_a^{l+2m}(G) \subset H_a^{l+2m-1}(G)$ и теорему 7.1 в [38], можно показать, что

$$\|U\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m}(K^\varrho)} \leqslant c\Big(\|\mathcal{L}U\|_{\mathcal{H}_a^l(K^{2\varrho},\gamma^{2\varrho})} + \sum_{j=1}^N \|\mathcal{P}_j(D)U_j\|_{H_a^l(K_j^d)} + \|U\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m-1}(K^d)}\Big) \quad (9.11)$$

при всех $U \in \mathcal{H}_a^{l+2m}(K^d)$ и достаточно малом ϱ.

2. Пусть λ_0 — собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащее на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$, и $\varphi^{(0)}(\omega)$ — соответствующий собственный вектор. Вектор $\varphi^{(0)}(\omega)$ принадлежит $\mathcal{W}^{l+2m}(-\overline{\omega},\overline{\omega})$, и по лемме 2.1 в [13]

$$\mathcal{L}V^0 = 0, \quad (9.12)$$

где $V^0 = r^{i\lambda_0}\varphi^{(0)}(\omega)$.

Подставим последовательность $U^\delta = r^\delta V^0/\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m}(K^\varrho)}$, $\delta > 0$, в (9.11) и устремим δ к нулю. Аналогично доказательству леммы 8.7, используя соотношение (9.12), нетрудно проверить, что правая часть неравенства (9.11) стремится к нуля, тогда как левая часть равна единице. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Теперь вторая часть теоремы 9.1 вытекает из леммы 9.4.

10. Правильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$

В предыдущих параграфах мы доказали фредгольмову разрешимость задачи (6.7), (6.8) в тех случаях, когда соответствующая прямая на комплексной плоскости не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. В этом параграфе, используя результаты п. 7.3 (главы II), мы изучим ситуацию, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1-l-2m$ имеется только правильное собственное значение $\lambda_0 = i(1-l-2m)$ оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, т. е. будем считать выполненным условие 7.2. В этом случае в силу теоремы 8.1 оператор $\mathbf{L} : W^{l+2m}(G) \to \mathcal{W}^l(G,\partial G)$ не фредгольмов (его образ незамкнут). Поэтому свяжем с задачей (6.7), (6.8) оператор, действующий в других пространствах, и докажем его фредгольмовость.

10.1. Построение правого регуляризатора в случае $\mathbf{B}_{i\mu}^2 = 0$

Введем функции $\hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такие, что $\hat{\psi}(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K})$ и $\operatorname{supp}\hat{\psi} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$. Пусть вектору $\hat{\psi}f = \{\hat{\psi}f_0, \hat{\psi}f_{i\mu}\}$ правых частей задачи (6.7), (6.8) соот-

ветствует вектор $F = \{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$ правых частей задачи (6.12), (6.13). Очевидно, $\operatorname{supp} F \subset \mathcal{O}_\varepsilon(0)$.

Рассмотрим пространство $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ с нормой

$$\|f\|_{\hat{\mathcal{S}}^l(G,\partial G)} = \Big(\|(1-\hat{\psi})f\|^2_{\mathcal{W}^l(G,\partial G)} + \|F\|^2_{\hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)}\Big)^{1/2}. \tag{10.1}$$

Введем также пространство

$$\hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) = \{f' \in \mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) : (0, f') \in \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)\}.$$

Очевидно, имеют место вложения (ср. (7.29))

$$\hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \subset \mathcal{S}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \subset W^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G),$$
$$\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \subset \mathcal{S}^l(G, \partial G) \subset \mathcal{W}^l(G, \partial G).$$

Согласно лемме 7.3 множество $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ незамкнуто в топологии пространства $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$.

С другой стороны, в силу леммы 7.2, если $u \in S^{l+2m}(G)$, то $\{\mathbf{P}u, \mathbf{C}u\} \in \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ (оператор $\mathbf{C} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^1$ определен в § 8).

Рассмотрим оператор

$$\hat{\mathbf{L}}^1 = \{\mathbf{P}, \mathbf{C}\} : S^{l+2m}(G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G).$$

В силу леммы 7.2 оператор $\hat{\mathbf{L}}^1$ ограничен.

Пусть ψ и ξ — функции, определенные перед леммой 8.1.

Теорема 10.1. *Пусть выполнено условие* 7.2. *Тогда для любого достаточно малого* $\varepsilon_0 > 0$ *существуют такие ограниченные операторы*

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{K}} : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to S^{l+2m}(G), \quad \hat{\mathbf{M}}_{\mathcal{K}}, \hat{\mathbf{S}}_{\mathcal{K}} : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G),$$

что

$$\mathbf{L}^1 \hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{K}} f = \psi f + \hat{\mathbf{M}}_{\mathcal{K}} f + \hat{\mathbf{S}}_{\mathcal{K}} f, \tag{10.2}$$

$\|\hat{\mathbf{M}}_{\mathcal{K}}\| \leqslant c_1\varepsilon_0$, $\|\hat{\mathbf{S}}_{\mathcal{K}}\| \leqslant c_2$ *и квадрат оператора* $\hat{\mathbf{S}}_{\mathcal{K}}$ *компактный*; *более того, оператор* $\hat{\mathbf{S}}_{\mathcal{K}}$ *представим в виде* $\hat{\mathbf{S}}_{\mathcal{K}} = \hat{\mathbf{U}}_{\mathcal{K}} + \hat{\mathbf{F}}_{\mathcal{K}}$, *где* $\|\hat{\mathbf{U}}_{\mathcal{K}}\| \leqslant c_3$, *а оператор* $\hat{\mathbf{F}}_{\mathcal{K}}$ *компактный*; *константы* $c_1, c_2, c_3 > 0$ *не зависят от* ε_0.

Доказательство. Идея доказательства аналогична идее доказательства леммы 8.1. Укажем лишь, как строится оператор $\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{K}}$. Сделаем в окрестности множества $\mathcal{K}$ замену переменных $y \to y'$ из п. 6.1 и обозначим y' снова через y.

Функции ψ, ξ и f, записанные в новых координатах, будем обозначать теми же символами.

Тогда оператор $\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{K}}$ задается формулой $\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{K}} f = \xi U$, где $U \in \mathcal{W}^{l+2m}(K^d)$ ($d > 0$ любое) — решение задачи (6.16), (6.17) с правой частью ψf (см. лемму 7.6). $\square$

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 8.2 (в доказательстве следует воспользоваться леммой 10.1 вместо леммы 8.1).

Лемма 10.1. *Пусть выполнено условие* 7.2. *Тогда существуют ограниченный оператор* $\hat{\mathbf{R}}_1 : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to S^{l+2m}(G)$ *и компактный оператор* $\hat{\mathbf{T}}_1 : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ *такие, что*

$$\hat{\mathbf{L}}^1 \hat{\mathbf{R}}_1 = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{T}}_1, \tag{10.3}$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ — *единичный оператор в пространстве* $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$.

10.2. Построение правого регуляризатора в случае $\mathbf{B}^2_{i\mu} \neq 0$

Пусть ξ и ψ — функции, определенные перед леммой 8.1, но теперь считаем, что $\delta > 0$ произвольно (в частности, не зависит от ε_0).

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 8.3.

Лемма 10.2. *Пусть выполнено условие* 7.2. *Тогда для любого* δ, $0 < \delta < 1$, *существуют такие ограниченные операторы*

$$\hat{\mathbf{R}}'_{\mathcal{K}} : \hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to S^{l+2m}(G), \quad \hat{\mathbf{M}}'_{\mathcal{K}}, \hat{\mathbf{T}}'_{\mathcal{K}} : \hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G),$$

что

$$\mathbf{L}^1 \hat{\mathbf{R}}'_{\mathcal{K}} f' = \psi\{0, f'\} + \hat{\mathbf{M}}'_{\mathcal{K}} f' + \hat{\mathbf{T}}'_{\mathcal{K}} f', \tag{10.4}$$

$\|\hat{\mathbf{M}}'_{\mathcal{K}}\| \leqslant c\delta$, *оператор* $\hat{\mathbf{T}}'_{\mathcal{K}}$ *компактный,* $c > 0$ *не зависит от* δ.

Для любой функции $f' \in \hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ положим

$$\hat{\mathbf{R}}'_1 f' = \hat{\mathbf{R}}'_{\mathcal{K}} f' + \sum_{j=1}^{J} \mathbf{R}'_{0j}(\psi'_j f'),$$

где функции ψ'_j и оператор $\mathbf{R}'_{0j}$ те же, что в п. 8.2.

Используя лемму 10.2, нетрудно проверить, что

$$\hat{\mathbf{L}}^1 \hat{\mathbf{R}}'_1 f' = \{0, f'\} + \hat{\mathbf{M}}'_1 f' + \hat{\mathbf{T}}'_1 f'. \tag{10.5}$$

Здесь $\hat{\mathbf{M}}_1', \hat{\mathbf{T}}_1' : \hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ — такие ограниченные операторы, что $\|\hat{\mathbf{M}}_1'\| \leqslant c\delta$, где $c > 0$ не зависит от δ, а оператор $\hat{\mathbf{T}}_1'$ компактный.

При помощи операторов $\hat{\mathbf{R}}_1$ и $\hat{\mathbf{R}}_1'$ построим правый регуляризатор для задачи (6.7), (6.8) в случае $\mathbf{B}^2_{i\mu} \neq 0$. Для этого нам потребуется следующее условие согласования.

Условие 10.1. *Для любой функции $u \in S^{l+2m}(G)$ имеем $\mathbf{B}^2 u \in \hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ и*

$$\|\mathbf{B}^2 u\|_{\hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)} \leqslant c\|u\|_{W^{l+2m}(G)}.$$

Замечание 10.1. Согласно (6.5) оператор $\mathbf{B}^2$ соответствует нелокальным слагаемым с носителем вне множества $\mathcal{K}$. Следовательно, если условие 10.1 выполнено для функций $u \in S^{l+2m}(G)$, то оно также выполнено и для функций $u \in W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$

Замечание 10.2. На примере из п. 6.2 (главы II) покажем, как можно добиться выполнения условия 10.1.

Рассмотрим задачу (6.9), (6.10) и предположим дополнительно, что преобразования Ω_{is} в этой задаче удовлетворяют условию (6.3) (которое представляет из себя ограничение на геометрическую структуру преобразований Ω_{is}). Тогда в силу непрерывности Ω_{is} имеем $\Omega_{is}\big(\mathcal{O}_\delta(g)\big) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0/2}(\mathcal{K})$ для любой точки $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$, если $\delta > 0$ достаточно мало. Следовательно, для любой функции $u \in W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$

$$\mathbf{B}^2_{i\mu} u(y) = 0 \quad \text{при } y \in \mathcal{O}_\delta(\mathcal{K}), \tag{10.6}$$

так как $1 - \zeta(\Omega_{is}(y)) = 0$ при $y \in \mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})$. Очевидно, условие 10.1 в этом случае выполнено.

Вместо условия (6.3) можно предположить следующее: если $\Omega_{is}(g) \notin \mathcal{K}$ (где $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$), то коэффициенты оператора $B_{i\mu s}(y, D)$ имеют ноль соответствующего порядка в точках $\Omega_{is}(g)$. Это также гарантирует, что $\mathbf{B}^2 u \in \hat{\mathcal{S}}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ для любой функции $u \in W^{l+2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$.

В силу леммы 7.2 и условия 10.1 имеем

$$\{\mathbf{P}u,\, \mathbf{B}u\} \in \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \quad \forall u \in S^{l+2m}(G).$$

Следовательно, оператор

$$\hat{\mathbf{L}}_S = \{\mathbf{P},\, \mathbf{B}\} : S^{l+2m}(G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$$

корректно определен и ограничен.

Лемма 10.3. *Пусть выполнены условия* 7.2 *и* 10.1. *Тогда существуют ограниченный оператор* $\hat{\mathbf{R}} : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to S^{l+2m}(G)$ *и компактный оператор* $\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ *такие, что*

$$\hat{\mathbf{L}}_S \hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{T}}. \tag{10.7}$$

Доказательство. Положим $\Phi = \mathbf{B}^2 \hat{\mathbf{R}}_1 f$, где $f = \{f_0, f'\} \in \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$, а $\hat{\mathbf{R}}_1$ — оператор из формулы (10.3). Тогда согласно условию 10.1 функции Φ и $\mathbf{B}^2 \hat{\mathbf{R}}_1' \Phi$ принадлежат области определения оператора $\hat{\mathbf{R}}_1'$. Следовательно, мы можем задать ограниченный оператор $\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{S}} : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to S^{l+2m}(G)$ формулой

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{S}} f = \hat{\mathbf{R}}_1 f - \hat{\mathbf{R}}_1' \Phi + \hat{\mathbf{R}}_1' \mathbf{B}^2 \hat{\mathbf{R}}_1' \Phi.$$

Аналогично доказательству леммы 8.4, используя неравенства (10.3) и (10.5), нетрудно проверить, что

$$\hat{\mathbf{L}}_S \hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{S}} = \hat{\mathbf{I}} + M + T,$$

где $M, T : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ — такие ограниченные операторы, что $\|M\| \leqslant c\delta$ ($c > 0$ не зависит от δ), оператор T компактный.

Оператор $\hat{\mathbf{I}} + M : \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ обратим, если $\delta \leqslant 1/(2c)$. Следовательно, обозначая $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{S}}(\hat{\mathbf{I}} + M)^{-1}$, $\mathbf{T} = T(\hat{\mathbf{I}} + M)^{-1}$, получаем (10.7). □

10.3. Фредгольмова разрешимость нелокальных задач

Так как подпространство $S^{l+2m}(G)$ имеет конечную коразмерность в $W^{l+2m}(G)$, то существует такое *конечномерное* подпространство $\mathcal{R}^l(G, \partial G)$ пространства $\mathcal{W}^l(G, \partial G)$, что

$$\{\mathbf{P}u,\, \mathbf{B}u\} \in \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l(G, \partial G) \quad \forall u \in W^{l+2m}(G).$$

Следовательно, мы можем определить ограниченный оператор

$$\hat{\mathbf{L}} = \{\mathbf{P},\, \mathbf{B}\} : W^{l+2m}(G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l(G, \partial G).$$

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия* 7.2 *и* 10.1. *Тогда оператор* $\hat{\mathbf{L}}$ *фредгольмов.*

Доказательство. Из лемм 8.5 и 10.3 настоящей работы и теоремы 15.2 в [38] вытекает, что оператор $\hat{\mathbf{L}}_S : S^{l+2m}(G) \to \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ фредгольмов. Так как область определения $W^{l+2m}(G)$ оператора $\hat{\mathbf{L}}$ есть расширение области определения $S^{l+2m}(G)$ оператора $\hat{\mathbf{L}}_S$ на конечномерное подпространство и $\hat{\mathbf{L}}$ совпадает с $\hat{\mathbf{L}}_S$ на $S^{l+2m}(G)$, то оператор $\hat{\mathbf{L}}$ также фредгольмов. □

11. Нелокальные задачи с однородными нелокальными условиями

В этом параграфе мы изучим оператор, соответствующий задаче (6.7), (6.8) с однородными краевыми условиями. Используя результаты § 10, мы покажем, что если прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ содержит только правильное собственное число, то этот оператор, в отличие от $\mathbf{L}$, является фредгольмовым, если выполнены определенные алгебраические соотношения между операторами $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}^0$ и $\mathbf{B}^1$ в точках множества $\mathcal{K}$.

11.1. Отсутствие на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ или наличие неправильного собственного значения

Введем пространство

$$W_B^{l+2m}(G) = \{u \in W^{l+2m}(G) : \mathbf{B}u = 0\}.$$

Очевидно, $W_B^{l+2m}(G)$ — замкнутое подпространство в $W^{l+2m}(G)$. Рассмотрим ограниченный оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2m}(G) \to W^l(G)$, заданный формулой

$$\mathbf{L}_B u = \mathbf{P}u, \quad u \in W_B^{l+2m}(G).$$

Для того чтобы исследовать задачу (6.7), (6.8) с однородными нелокальными условиями, нам понадобится следующее условие на операторы $B_{i\mu s}(y, D)$ (см. например, [39, гл. 2, § 1]).

Условие 11.1. *При всех $i = 1, \ldots, N$ система операторов $\{B_{i\mu 0}(y, D)\}_{\mu=1}^m$ является нормальной на $\overline{\Gamma_i}$ и порядки операторов $B_{i\mu s}(y, D)$ $(s = 0, \ldots, S_i)$ не превосходят $2m - 1$.*

В этом пункте будет доказан следующий результат.

Теорема 11.1. *Пусть выполнено условие* 7.1. *Тогда оператор $\mathbf{L}_B$ фредгольмов.*

Пусть на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ содержится неправильное собственное значение λ_0 оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и выполнено условие 11.1. *Тогда образ оператора $\mathbf{L}_B$ незамкнут (и, следовательно, оператор $\mathbf{L}_B$ не фредгольмов).*

Следующая лемма позволяет сводить нелокальные задачи с неоднородными краевыми условиями к задачам с однородными краевыми условиями.

Лемма 11.1. *Пусть выполнено условие* 11.1. *Тогда для любых функций* $f_{j\sigma\mu} \in H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ *таких, что* $\operatorname{supp} f_{j\sigma\mu} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$ ($\varepsilon' > 0$ *фиксировано*), *существует такая функция* $V \in \mathcal{H}_a^{l+2m}(K)$, *что* $\operatorname{supp} V \subset \mathcal{O}_{2\varepsilon'}(0)$ *и*

$$\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)V = f_{j\sigma\mu}, \tag{11.1}$$

$$\|V\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m}(K)} \leqslant c_{\varepsilon'} \|\{f_{j\sigma\mu}\}\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)}, \tag{11.2}$$

где $c_{\varepsilon'} > 0$ *не зависит от* $f_{j\sigma\mu}$.

Доказательство. 1. Аналогично доказательству леммы 3.1 в [40] строятся такие функции $V_{j\sigma} \in H_a^{l+2m}(K_j)$, что

$$B_{j\sigma\mu j0}(y, D)V_{j\sigma}|_{\gamma_{j\sigma}} = f_{j\sigma\mu}, \tag{11.3}$$

$$\|V_{j\sigma}\|_{H_a^{l+2m}(K_j)} \leqslant k_2 \|\{f_{j\sigma\mu}\}\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)}. \tag{11.4}$$

Так как $\operatorname{supp} f_{j\sigma\mu} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$, то можно считать, что $\operatorname{supp} V_{j\sigma} \subset \mathcal{O}_{2\varepsilon'}(0)$.

2. Обозначим $\delta = \min |(-1)^\sigma \omega_j + \omega_{j\sigma ks} \pm \omega_k|/2$ ($j, k = 1, \ldots, N,\ \sigma = 1, 2,\ s = 1, \ldots, S_{j\sigma k}$) и введем функции $\zeta_{j\sigma} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такие, что $\zeta_{j\sigma}(\omega) = 1$ при $|(-1)^\sigma \omega_j - \omega| < \delta/2$ и $\zeta_{j\sigma}(\omega) = 0$ при $|(-1)^\sigma \omega_j - \omega| > \delta$. Так как функции $\zeta_{j\sigma}$ являются мультипликаторами в пространстве $H_a^{l+2m}(K_j)$, то из (11.3) и (11.4) вытекает, что функция $V = (\zeta_{11}V_{11} + \zeta_{12}V_{12}, \ldots, \zeta_{N1}V_{N1} + \zeta_{N2}V_{N2})$ удовлетворяет условиям (11.1) и (11.2). □

Замечание 11.1. В пространствах Соболева аналогичные рассуждения не проходят, поскольку функции $\zeta_{j\sigma}$ не являются мультипликаторами в пространствах $W^{l+2m}(K_j)$. Более того, можно построить такие функции $f_{j\sigma\mu}$ из пространства $W^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ ($j = 1, \ldots, N,\ \sigma = 1, 2,\ \mu = 1, \ldots, m$), для которых не найдется функции $V \in \mathcal{W}^{l+2m}(K)$, удовлетворяющей условиям (11.1). Поэтому задача с однородными нелокальными условиями не эквивалентна задаче с неоднородными краевыми условиями (например, возможна ситуация, когда первая задача фредгольмова, а вторая - нет).

Положим (как и ранее) $d = d(\varrho) = 2d_2\varrho$, где d_2 определено в (6.15). Следующий результат будет использован при изучении образа оператора $\mathbf{L}_B$ (ср. лемму 8.6).

Лемма 11.2. *Пусть выполнено условие* 11.1 *и образ оператора* $\mathbf{L}_B$ *замкнут. Тогда для достаточно малых* $\varrho > 0$ *и всех* $U \in \mathcal{S}^{l+2m}(K^d)$ *таких, что*

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U|_{\gamma_{j\sigma}^{2\varrho}} = 0 \quad (j = 1, \ldots, N,\ \sigma = 1, 2,\ \mu = 1, \ldots, m), \tag{11.5}$$

выполнена оценка[2]

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} \leqslant c\big(\|\{\mathcal{P}_j(D)U_j\}\|_{\mathcal{W}^l(K_j^d)} + \|U\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)}\big). \tag{11.6}$$

Доказательство. 1. Так как образ оператора $\mathbf{L}_B$ замкнут, то в силу леммы 8.5, компактности оператора вложения $W^{l+2m}(G) \subset W^{l+2m-1}(G)$ и теоремы 7.1 в [38] имеем

$$\|u\|_{W^{l+2m}(G)} \leqslant c(\|\mathbf{P}(y,D)u\|_{W^l(G)} + \|u\|_{W^{l+2m-1}(G)}) \tag{11.7}$$

для всех $u \in W_B^{l+2m}(G)$. Подставим в (11.7) функцию $u \in W_B^{l+2m}(G)$ такую, что $\operatorname{supp} u \in \mathcal{O}_{2\varrho_1}(\mathcal{K})$, $2\varrho_1 < \min\{\varepsilon_0, \varkappa_1\}$. Согласно (6.5) для таких функций $\mathbf{B}^2 u = 0$. Следовательно, используя лемму 3.2 в [39, Ch. 2], видим, что при достаточно малых ϱ_1 оценка

$$\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)} \leqslant k_1\big(\|\{\mathcal{P}_j(D)U_j\}\|_{\mathcal{W}^l(K)} + \|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K)}\big) \tag{11.8}$$

имеет место для всех таких $U \in \mathcal{W}^{l+2m}(K)$, что $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{2\varrho_1}(0)$ и

$$\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U = 0 \quad (j = 1,\dots,N,\ \sigma = 1,2,\ \mu = 1,\dots,m). \tag{11.9}$$

2. Покажем, что если $\varrho_2 < \varrho_1 d_1$ достаточно мало, то оценка (11.8) справедлива для всех таких $U \in \mathcal{S}^{l+2m}(K)$, что $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{2\varrho_2}(0)$ и

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U = 0 \quad (j = 1,\ \dots,\ N,\ \sigma = 1,\ 2,\ \mu = 1,\ \dots,\ m). \tag{11.10}$$

Положим $\Phi_{j\sigma\mu} = \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,\ D)U|_{\gamma_{j\sigma}}$. Очевидно,

$$\operatorname{supp} \Phi_{j\sigma\mu} \subset \mathcal{O}_{\varrho_2/d_1}(0) \subset \mathcal{O}_{\varrho_1}(0). \tag{11.11}$$

Зафиксируем a, $0 < a < 1$, и докажем, что

$$\|\{\Phi_{j\sigma\mu}\}\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)} \leqslant k_2 \varrho_2^{1-a} \|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)}. \tag{11.12}$$

В силу (11.10) и ограниченности оператора взятия следа в весовых пространствах достаточно оценить слагаемые вида

$$\big(a_\alpha(y) - a_\alpha(0)\big)D^\alpha U_j \quad (|\alpha| = m_{j\sigma\mu}), \qquad a_\beta(y)D^\beta U_j \quad (|\beta| \leqslant m_{j\sigma\mu} - 1),$$

[2] В предположениях леммы $U \in \mathcal{H}_a^{l+2m}(K^d)$ для любого $a > 0$ согласно лемме 5.2. Следовательно, $U \in \mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)$, и правая часть неравенства (11.6) конечна.

где a_α и a_β — бесконечно дифференцируемые функции. Используя ограничение на носитель функций U_j и леммы 5.5 и 5.2, получаем

$$\begin{aligned}\|\big(a_\alpha(y)-a_\alpha(0)\big)D^\alpha U_j\|_{H_0^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j)} &\leqslant \\ &\leqslant k_3\varrho_2^{1-a}\|\big(a_\alpha(y)-a_\alpha(0)\big)D^\alpha U_j\|_{H_{a-1}^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j)} \leqslant \\ &\leqslant k_4\varrho_2^{1-a}\|D^\alpha U_j\|_{H_a^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j)} \leqslant k_5\varrho_2^{1-a}\|U_j\|_{W^{l+2m}(K_j)}.\end{aligned}$$

Аналогично, используя лемму 5.2, имеем

$$\|a_\beta(y)D^\beta U_j\|_{H_0^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j)} \leqslant k_6\varrho_2^{1-a}\|U_j\|_{H_{a-1}^{l+2m-1}(K_j)} \leqslant k_7\varrho_2^{1-a}\|U_j\|_{W^{l+2m}(K_j)}.$$

Таким образом, оценка (11.12) доказана.

Далее, в силу (11.11) и леммы 11.1 существует такая функция

$$V=(V_1,\dots,V_N)\in\mathcal{H}_0^{l+2m}(K),$$

что $\operatorname{supp}V\subset\mathcal{O}_{2\varrho_1}(0)$ и

$$\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,\ D)V|_{\gamma_{j\sigma}}=\Phi_{j\sigma\mu}, \tag{11.13}$$

$$\|V\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m}(K)}\leqslant c_{\varrho_1}\|\{\Phi_{j\sigma\mu}\}\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)}, \tag{11.14}$$

где c_{ϱ_1} не зависит от ϱ_2.

Оценивая $U-V$ при помощи (11.8) и используя неравенства (11.14) и (11.12), имеем

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)} &\leqslant \|U-V\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)}+\|V\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)} \\ &\leqslant k_8\big(\|\{\mathcal{P}_j(D)U_j\}\|_{\mathcal{W}^l(K)}+\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m-1}(K)}+\varrho_2^{1-a}\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)}\big).\end{aligned}$$

Теперь, выбирая достаточно малое ϱ_2, получаем оценку (11.8), справедливую для всех таких $U\in\mathcal{W}^{l+2m}(K)$, что $\operatorname{supp}U\subset\mathcal{O}_{2\varrho_2}(0)$ и выполнены соотношения (7.30) и (11.10).

3. Теперь снимем ограничение $\operatorname{supp}U\subset\mathcal{O}_{2\varrho_2}(0)$ и докажем оценку (11.6) для $\varrho<\varrho_2 d_1$ и любых $U\in\mathcal{W}^{l+2m}(K^d)$, удовлетворяющих соотношениям (7.30) и (11.5).

Введем функцию $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\psi(y)=1$ при $|y|\leqslant\varrho$, $\operatorname{supp}\psi\subset\mathcal{O}_{2\varrho}(0)$ и ψ не зависит от полярного угла ω.

Положим $\Psi_{j\sigma\mu}=\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)(\psi U)|_{\gamma_{j\sigma}}$. Очевидно,

$$\operatorname{supp}\Psi_{j\sigma\mu}\subset\mathcal{O}_{\varrho/d_1}(0)\subset\mathcal{O}_{\varrho_2}(0). \tag{11.15}$$

Покажем, что

$$\|\Psi_{j\sigma\mu}\|_{H_0^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \leqslant k_9 \sum_{k=1}^{N} \big(\|\mathcal{P}_k(D)U_k\|_{W^l(K_k^d)} + \|U_k\|_{H_0^{l+2m-1}(K_j^d)}\big). \quad (11.16)$$

Учитывая соотношения (11.5), представим функцию $\Psi_{j\sigma\mu}$ в виде

$$\Psi_{j\sigma\mu} = \sum_{k,s} \Psi_{j\sigma\mu ks} + \sum_{(k,s)\neq(j,0)} J_{j\sigma\mu ks}, \quad (11.17)$$

где

$$\Psi_{j\sigma\mu ks} = \big([B_{j\sigma\mu ks}(D), \psi]U_k\big)\big(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y\big)\big|_{\gamma_{j\sigma}},$$
$$J_{j\sigma\mu ks} = \big(\psi(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) - \psi(y)\big)\big(B_{j\sigma\mu ks}(D)U_k\big)\big(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y\big)\big|_{\gamma_{j\sigma}}$$

($[\cdot,\cdot]$ обозначает коммутатор).

Так как выражение для $\Psi_{j\sigma\mu ks}$ содержит производные функции U_k порядка не выше $m_{j\sigma\mu} - 1$, то

$$\|\Psi_{j\sigma\mu ks}\|_{H_0^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \leqslant k_{10}\|U\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)}. \quad (11.18)$$

Далее, повторяя рассуждения из части 1 доказательства леммы 8.7, получим

$$\begin{aligned}\|J_{j\sigma\mu ks}\|_{H_0^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma})} \leqslant k_{11}(&\|\mathcal{P}_k(D)U_k\|_{W^l(\{d_1\varrho/2<|y|<2d_2\varrho\})}+\\ &+\|U_k\|_{W^{l+2m-1}(\{d_1\varrho/2<|y|<2d_2\varrho\})}).\end{aligned} \quad (11.19)$$

Теперь (11.16) следует из (11.17), (11.18) и (11.19).

4. В силу (11.15) и леммы 11.1 (примененной к операторам $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)$) существует такая функция $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathcal{H}_0^{l+2m}(K)$, что $\operatorname{supp} V \subset \mathcal{O}_{2\varrho_2}(0)$ и

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V = \Psi_{j\sigma\mu}, \quad (11.20)$$

$$\|V\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m}(K)} \leqslant k_{12}\|\{\Psi_{j\sigma\mu}\}\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)}. \quad (11.21)$$

Оценивая $\psi U - V$ при помощи (11.8) и пользуясь формулой Лейбница и неравенствами (11.21), (11.16), получим

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} \leqslant \|\psi U\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)} &\leqslant \|\psi U - V\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)} + \|V\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K)}\\ &\leqslant k_{11}\big(\|\{\mathcal{P}_j(D)U_j\}\|_{\mathcal{W}^l(K^d)} + \|U\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)}\big).\end{aligned}$$

□

Лемма 11.2 позволяет доказать, что если прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ содержит неправильное собственное значение, то оператор $\mathbf{L}_B$, так же как и $\mathbf{L}$, не фредгольмов.

Лемма 11.3. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ *содержит неправильное собственное значение* λ_0 *оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*, и пусть выполнено условие* 11.1. *Тогда образ оператора* $\mathbf{L}_B$ *незамкнут.*

Доказательство. 1. Предположим, что образ оператора $\mathbf{L}_B$ замкнут. Обозначим через $\varphi^{(0)}(\omega), \dots, \varphi^{(\varkappa-1)}(\omega)$ собственный и присоединенные векторы, отвечающие собственному значению λ_0 (см. [12]). Векторы $\varphi^{(k)}(\omega)$ принадлежат $\mathcal{W}^{l+2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$ и удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{P}_j(D)V_j^k = 0, \quad \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V^k = 0. \tag{11.22}$$

где

$$V^k = r^{i\lambda_0} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!}(i \ln r)^k \varphi^{(k-s)}(\omega), \quad k = 0, \dots, \varkappa - 1.$$

Так как λ_0 — неправильное собственное значение, то функция $V^k(y)$ не является вектор-полиномом при некотором $k \geqslant 0$. Предположим для простоты, что $V^0 = r^{i\lambda_0}\varphi^{(0)}(\omega)$ не является вектор-полиномом (случай $k > 0$ рассматривается аналогично).

Пусть ϱ и $d = d(\varrho)$ — те же константы, что в лемме 11.2. Рассмотрим последовательность $U^\delta = r^\delta V^0 / \|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)}$. Знаменатель дроби конечен при любом $\delta > 0$, но $\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} \to \infty$ при $\delta \to 0$, так как V^0 не является вектор-полиномом. Однако $\|r^\delta V^0\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)} \leqslant c$, где $c > 0$ не зависит от $\delta \geqslant 0$; следовательно,

$$\|U^\delta\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0. \tag{11.23}$$

Используя (11.22), аналогично доказательству леммы 8.7 можно проверить, что

$$\|\{\mathcal{P}_j(D)U_j^\delta\}\|_{\mathcal{W}^l(K^d)} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0. \tag{11.24}$$

$$\|\{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^\delta\}\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^{3\varrho})} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0. \tag{11.25}$$

2. Введем функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\psi(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{2\varrho}(0)$ и $\operatorname{supp}\psi \subset \mathcal{O}_{3\varrho}(0)$.

Применяя лемму 11.1 к операторам $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)$ и функциям

$$f_{j\sigma\mu} = \psi \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^\delta|_{\gamma_{j\sigma}}$$

(заметим, что $\operatorname{supp} f_{j\sigma\mu} \subset \mathcal{O}_{3\varrho}(0)$), построим функцию $W^\delta \in \mathcal{H}_0^{l+2m}(K)$ ($\delta > 0$) такую, что $\operatorname{supp} W^\delta \subset \mathcal{O}_{6\varrho}(0)$ и

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)W^\delta|_{\gamma_{j\sigma}^{2\varrho}} = \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^\delta|_{\gamma_{j\sigma}^{2\varrho}}, \tag{11.26}$$

$$\|W^\delta\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m}(K^{6\varrho})} \leqslant k_1 \sum_{j,\sigma,\mu} \|\{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^\delta\}\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^{3\varrho})}. \tag{11.27}$$

Более того, функция $U^\delta - W^\delta$ удовлетворяет соотношениям (7.30); следовательно, мы можем применить лемму 11.2 функции $U^\delta - W^\delta$. Тогда из оценки (11.6), используя ограниченность оператора вложения $H_0^{l+2m}(K_j^{6\varrho}) \subset W^{l+2m}(K_j^{6\varrho})$ и неравенство (11.27), получим

$$\begin{aligned}\|U^\delta\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} &\leqslant \|U^\delta - W^\delta\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} + \|W^\delta\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} \leqslant \\ &\leqslant k_2\Big(\|\{\mathcal{P}_j(D)U_j^\delta\}\|_{\mathcal{W}^l(K^d)} + \|\{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^\delta\}\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^{3\varrho})} + \\ &+ \|U^\delta\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)}\Big).\end{aligned} \tag{11.28}$$

Однако утверждения (11.23)–(11.25) противоречат оценке (11.28), так как

$$\|U^\delta\|_{\mathcal{W}^{l+2m}(K^\varrho)} = 1.$$

□

Доказательство теоремы 11.1. Первая часть теоремы 11.1 вытекает из теоремы 8.1; вторая часть — из леммы 11.3. □

11.2. Правильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$

Осталось рассмотреть ситуацию, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1 - l - 2m$ содержит только правильное собственное значение. Пусть выполнено условие 7.2. Докажем, что в этом случае фредгольмовость оператора $\mathbf{L}_B$ при фиксированном $l \geqslant 1$ определяется выполнением следующего условия.

Условие 11.2. *При* $l \geqslant 1$ *система* (7.25) *содержит все операторы* $D^\xi \mathcal{P}_j(D)$ ($|\xi| = l - 1$, $j = 1, \ldots, N$).

Теорема 11.2. *Пусть выполнены условия* 7.2 *и* 10.1. *Тогда*

1. *оператор* $\mathbf{L}_B : W_B^{2m}(G) \to L_2(G)$ *фредгольмов*;

2. *если* $l \geqslant 1$ *и выполнено условие* 11.2, *то оператор* $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2m}(G) \to W^l(G)$ *фредгольмов*;

3. *если* $l \geqslant 1$ *и условие* 11.2 *нарушено, но выполнено условие* 11.1, *то образ оператора* $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2m}(G) \to W^l(G)$ *незамкнут* (*и, следовательно, оператор* $\mathbf{L}_B$ *не фредгольмов*).

Доказательство. 1. По лемме 8.5 ядро оператора $\mathbf{L}_B$ конечномерно. Изучим образ $\mathcal{R}(\mathbf{L}_B)$ оператора $\mathbf{L}_B$.

2. Вначале предположим, что $l \geqslant 1$ и выполнено условие 11.2. Покажем, что множество

$$\bigl\{ f_0 \in W^l(G) : \{f_0, 0\} \in \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \bigr\} \tag{11.29}$$

есть замкнутое подпространство конечной коразмерности в $W^l(G)$. Действительно, пусть $\hat{\psi}$ — функция из определения пространства $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ (см. п. 10.1). Тогда вектору правых частей $\{\hat{\psi} f_0, 0\}$ задачи (6.7), (6.8) соответствует вектор $\{f_j, 0\}$ правых частей задачи (6.12), (6.13). Очевидно, $\mathcal{T}_{j\sigma\mu}\{f_j, 0\} = 0$. Более того, в силу условия 11.2 соотношения (7.27) отсутствуют. Таким образом, в силу (10.1) норма функции $\{f_0, 0\} \in \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ в $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G)$ эквивалентна норме функции f_0 в $W^l(G)$, а множество (11.29) есть подпространство в $W^l(G)$, состоящее из функций, удовлетворяющих условиям (5.4). Иными словами, множество (11.29) совпадает с пространством $S^l(G)$.

Далее, так как $\hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \subset \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l(G, \partial G)$, то множество

$$\bigl\{ f_0 \in W^l(G) : \{f_0, 0\} \in \hat{\mathcal{S}}^l(G, \partial G) \dotplus \mathcal{R}^l(G, \partial G) \bigr\} \tag{11.30}$$

(содержащее множество (11.29)) также есть замкнутое подпространство конечной коразмерности в $W^l(G)$. С другой стороны, $f_0 \in \mathcal{R}(\mathbf{L}_B)$ тогда и только тогда, когда $\{f_0, 0\} \in \mathcal{R}(\hat{\mathbf{L}})$, где $\hat{\mathbf{L}}$ — оператор, определенный в п. 10.3. Отсюда и из фредгольмовости оператора $\hat{\mathbf{L}}$ вытекает, что образ оператора $\mathbf{L}_B$ замкнут и имеет конечную коразмерность.

3. Теперь предположим, что $l \geqslant 1$ и условие 11.2 нарушено. Докажем, используя результаты п. 7.3 (главы II), что образ $\mathcal{R}(\mathbf{L}_B)$ оператора $\mathbf{L}_B$ незамкнут. Предположим противное: пусть образ $\mathcal{R}(\mathbf{L}_B)$ замкнут.

Поскольку условие 11.2 нарушено, то множество условий (7.27) непусто; значит, для некоторых j, ξ норма (7.28) содержит соответствующее слагаемое $\|\mathcal{T}_{j\xi} f\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}$. Отсюда (аналогично доказательству леммы 7.3) вытекает существование такой последовательности $f^\delta = \{f_j^\delta, 0\} \in \hat{\mathcal{S}}^l(K, \gamma)$, $\delta > 0$, что $\operatorname{supp} f^\delta \subset \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ и f^δ сходится в $\mathcal{W}^l(K, \gamma)$ к $f^0 \notin \hat{\mathcal{S}}^l(K, \gamma)$ при $\delta \to 0$.

В силу леммы 7.6 для каждой функции f^δ найдется такая функция $U^\delta \in \mathcal{W}^{l+2m}(K^d)$, что

$$\mathcal{P}_j(D)U_j^\delta = f_j^\delta, \quad \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^\delta = 0, \tag{11.31}$$

$$\|U^\delta\|_{\mathcal{H}_0^{l+2m-1}(K^d)} \leqslant c\|f^\delta\|_{\mathcal{W}^l(K,\gamma)} \tag{11.32}$$

($c > 0$ не зависит от δ) и U^δ удовлетворяет соотношениям (7.30). В силу второго соотношения в (11.31) и соотношений (7.30) мы можем применить лемму 11.2 к функции U^δ. Используя оценку (11.6), сходимость последовательности f^δ к $f^0 \notin \hat{\mathcal{S}}^l(K,\gamma)$ и неравенство (11.32), приходим к противоречию (ср. доказательство леммы 8.7).

4. В случае $l = 0$ множество условий (7.27) пусто, поскольку эти условия возникают лишь при $l \geqslant 1$. Отсюда, аналогично части 2 доказательства, выводим заключение теоремы. □

12. Примеры

Приведем два примера, иллюстрирующие результаты глав II и III (подробные доказательства даны в [86]). В приведенных ниже примерах множество $\mathcal{K}$ состоит из нескольких орбит, поэтому, ссылаясь на теоремы из предыдущих параграфов, будем иметь в виду очевидные обобщения на этот случай.

12.1. Пример 1

Задача с однородными нелокальными условиями

Пусть $\partial G \setminus \mathcal{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{2} \Gamma_i$, где Γ_i — открытые в топологии границы кривые класса C^∞, $\mathcal{K} = \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \{g_1, g_2\}$, g_1, g_2 — концевые точки кривых $\overline{\Gamma_1}, \overline{\Gamma_2}$. Предположим, что в окрестности точек g_1, g_2 область G совпадает с плоским углом раствора π.

Рассмотрим нелокальную задачу

$$\Delta u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{12.1}$$

$$u|_{\Gamma_i} + b_i u\big(\Omega_i(y)\big)\big|_{\Gamma_i} = f_i(y) \quad (y \in \Gamma_i;\ i = 1, 2). \tag{12.2}$$

Здесь $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, Ω_i — бесконечно гладкое невырожденное преобразование, отображающее окрестность $\mathcal{O}_i$ кривой Γ_i на $\Omega(\mathcal{O}_i)$ так, что $\Omega(\Gamma_i) \subset G$, $\Omega_i(g_j) = g_j$, $j = 1, 2$, и вблизи точек g_1, g_2 преобразование Ω_i есть поворот на угол $\pi/2$ внутрь области G (см. рис. 12.1).

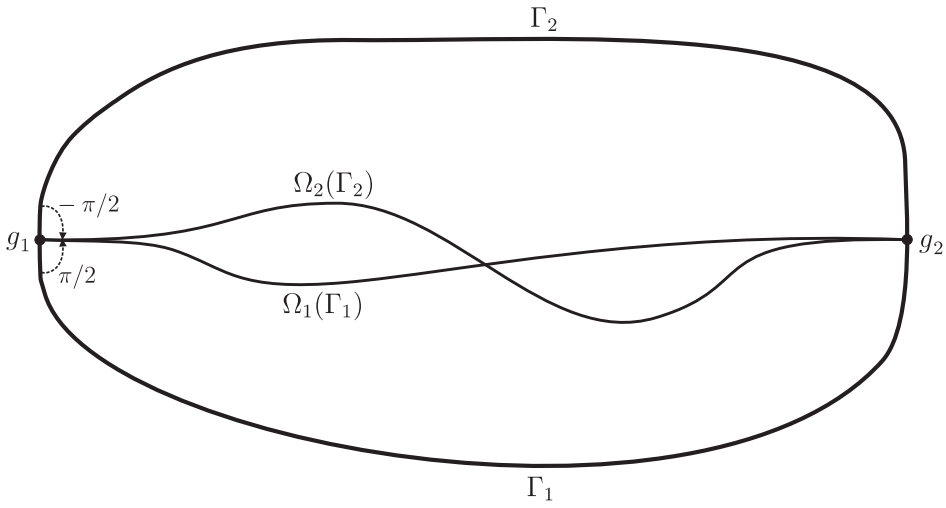

Рис. 12.1. Область G с границей $\partial G = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$.

Рассмотрим оператор $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{L}u = (\Delta u,\, u|_{\Gamma_1} + b_1 u,\, u|_{\Gamma_2} + b_2 u)$$

и соответствующий задаче (12.1), (12.2). Применение теоремы 8.1 дает следующий результат.

Пусть l четно; тогда оператор $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $b_1 + b_2 \neq 0$.

Пусть l нечетно; тогда оператор $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ не фредгольмов ни при каких $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Задача с однородными нелокальными условиями

Обозначим

$$W_B^{l+2}(G) = \Big\{ u \in W^{l+2}(G) : u|_{\Gamma_i} + b_i u\big(\Omega_i(y)\big)\big|_{\Gamma_i} = 0,\ i = 1, 2 \Big\}$$

и введем оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ по формуле

$$\mathbf{L}_B u = \Delta u, \quad u \in W_B^{l+2}(G).$$

При помощи теорем 8.1 и 11.2 получим следующий результат.

Пусть l четно; тогда оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ фредгольмов при любых $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Пусть l нечетно и $l = 4k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; тогда оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ фредгольмов в том и только том случае, если $b_1 = b_2 < 1$.

Пусть l нечетно и $l = 4k + 3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; тогда оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ фредгольмов в том и только том случае, если $b_1 = b_2 > -1$.

12.2. Пример 2

Задача с неоднородными нелокальными условиями

Пусть граница $\partial G \in C^\infty$ области G совпадает вне кругов $\mathcal{O}_{1/8}((i4/3, j4/3))$ $(i, j = 0, 1)$ с границей квадрата $(0, 4/3) \times (0, 4/3)$. Обозначим $\Gamma_1 = \{y \in \partial G : y_1 < 1/3,\ y_2 < 1/3\}$, $\Gamma_2 = \{y \in \partial G : y_1 > 1,\ y_2 > 1\}$. Пусть Γ_3 и Γ_4 — связные компоненты множества $\partial G \setminus (\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2})$. В данном случае имеем $\mathcal{K} = \{g_1, \ldots, g_4\}$, где $g_1 = (1/3, 0),\ g_2 = (0, 1/3),\ g_3 = (4/3, 1),\ g_4 = (1, 4/3)$ (см. рис. 12.2).

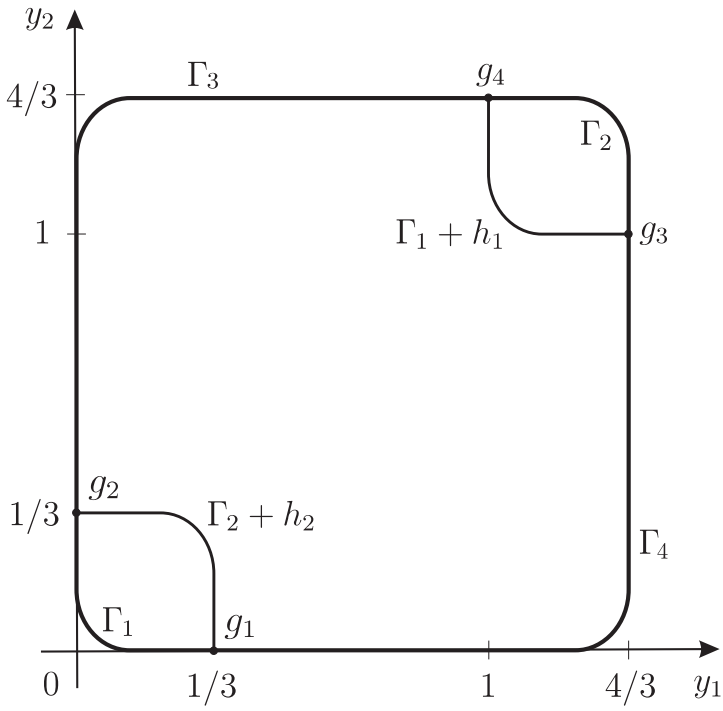

Рис. 12.2. Область G с гладкой границей $\partial G = \bigcup\limits_{i=1}^{4} \overline{\Gamma_i}$.

Рассмотрим нелокальную задачу

$$\Delta u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{12.3}$$

$$\begin{aligned} u(y)|_{\Gamma_i} + b_i u(y + h_i)|_{\Gamma_i} &= f_i(y) \quad (y \in \Gamma_i;\ i = 1, 2), \\ u(y)|_{\Gamma_j} &= f_j(y) \quad (y \in \Gamma_j;\ j = 3, 4), \end{aligned} \tag{12.4}$$

где $h_1 = (1, 1)$, $h_2 = (-1, -1)$ и $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Очевидно, множество $\mathcal{K}$ состоит из двух орбит: Orb_1 и Orb_2, где орбита Orb_1 содержит точки g_1 и $g_3 = g_1 + h_1$, а орбита Orb_2 — точки g_2 и $g_4 = g_2 + h_2$.

Рассмотрим оператор $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{L}u = (\Delta u,\ u(y)|_{\Gamma_1} + b_1 u(y + h_1)|_{\Gamma_1},\ u(y)|_{\Gamma_2} + b_i u(y + h_2)|_{\Gamma_2},\ u(y)|_{\Gamma_3},\ u(y)|_{\Gamma_4})$$

и соответствующий задаче (12.3), (12.4). Применение теоремы 8.1 дает следующий результат.

Пусть l четно; тогда оператор $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ *фредгольмов в том и только том случае, если* $b_1 b_2 > 0$.

Пусть l нечетно; тогда оператор $\mathbf{L} : W^{l+2}(G) \to \mathcal{W}^l(G, \partial G)$ *не фредгольмов ни при каких* $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Задача с однородными нелокальными условиями

Обозначим

$$W_B^{l+2}(G) = \left\{ u \in W^{l+2}(G) : u|_{\Gamma_i} + b_i u(y + h_i)|_{\Gamma_i} = 0,\ i = 1, 2;\ u|_{\Gamma_j} = 0,\ j = 3, 4 \right\}$$

и введем оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ по формуле

$$\mathbf{L}_B u = \Delta u, \quad u \in W_B^{l+2}(G).$$

При помощи теорем 8.1 и 11.2 получим следующий результат.

Пусть l четно; тогда оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ *фредгольмов в том и только том случае, если* $b_1 b_2 > 0$ *и* $b_1 = b_2 = 0$.

Пусть l нечетно; тогда оператор $\mathbf{L}_B : W_B^{l+2}(G) \to W^l(G)$ *фредгольмов в том и только том случае, если* $b_1 = b_2 = 0$.

Глава IV

Обобщенные решения нелокальных эллиптических задач

13. Обобщенные решения нелокальных задач

13.1. Обобщенные решения

Как и в предыдущих главах, считаем выполненными условия 6.1–6.4 (последнее с $l = 0$). Будем считать, что порядки $m_{i\mu}$ операторов $B_{i\mu s}(y, D)$ удовлетворяют неравенствам

$$m_{i\mu} \leqslant 2m - 1.$$

В этой и следующей главах будем изучать так называемые *обобщенные решения* (см. определения 13.2 и 13.3) нелокальной краевой задачи (6.7), (6.8):

$$\mathbf{P}(y, D)u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{13.1}$$

$$\mathbf{B}^0_{i\mu}u + \mathbf{B}^1_{i\mu}u + \mathbf{B}^2_{i\mu}u = f_{i\mu}(y) \quad (y \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, N,\ \mu = 1, \ldots, m). \tag{13.2}$$

Определим понятие обобщенного решения задачи (13.1), (13.2). Вначале, следуя [93], дадим соответствующее определение для «локальной» задачи, т. е. в том случае, когда $\mathbf{B}^1_{i\mu} = 0$ и $\mathbf{B}^2_{i\mu} = 0$.

Всюду далее считаем, что число ℓ фиксировано и таково, что

$$0 \leqslant \ell \leqslant 2m - 1.$$

Так как $C^\infty(\overline{\Gamma_i}) \subset H^{2m-k+1/2}_{2m}(\Gamma_i)$, то в силу леммы 5.8 $C^\infty(\overline{\Gamma_i}) \subset H^{\ell-k+1/2}_{\ell}$, $k = 1, \ldots, 2m$. Следовательно, норма

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^\ell(G)} = \left(\|\mathbf{u}\|^2_{W^\ell(G)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{2m} \left\| D^{k-1}_{\nu_i}\mathbf{u} \right\|^2_{H^{\ell-k+1/2}_{\ell}(\Gamma_i)} \right)^{1/2} \tag{13.3}$$

конечна для любой функции $\mathbf{u} \in C^\infty(\overline{G})$, где ν_i — внешняя нормаль к части Γ_i границы и $D^{k-1}_{\nu_i}\mathbf{u} = (-i)^{k-1}\dfrac{\partial^{k-1}\mathbf{u}}{\partial\nu_i^{k-1}}\Big|_{\Gamma_i}$. Обозначим через $\mathbf{W}^\ell(G)$ пополнение множества $C^\infty(\overline{G})$ по норме[1] (13.3).

Из (13.3) вытекает, что замыкание $\mathbf{S}$ оператора

$$\mathbf{u} \mapsto \{\mathbf{u}|_G, D^{k-1}_{\nu_i}\mathbf{u}\} \qquad (\mathbf{u} \in C^\infty(\overline{G}))$$

устанавливает изометрическое соответствие между $\mathbf{W}^\ell(G)$ и подпространством прямого произведения

$$W^\ell(G) \times \prod_{i=1}^{N}\prod_{k=1}^{2m} H_\ell^{\ell-k+1/2}(\Gamma_i).$$

Отождествим элемент $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^\ell(G)$ с элементом $\mathbf{Su} = \{u, u_{ik}\}$ и будем писать

$$\mathbf{u} = \{u, u_{ik}\} \in \mathbf{W}^\ell(G).$$

Заметим, что если $\ell \geqslant 1$, $\{\mathbf{u}^n\} \subset C^\infty(\overline{G})$ и $\mathbf{u}^n \to \mathbf{u}$ в $\mathbf{W}^\ell(G)$ при $n \to \infty$, то $\mathbf{u}^n \to u$ в $W^\ell(G)$. Следовательно, $D^{k-1}_{\nu_i}\mathbf{u}^n \to D^{k-1}_{\nu_i}u$ в $W^{\ell-k+1/2}(\Gamma_i) \subset H_\ell^{\ell-k+1/2}(\Gamma_i)$ при $k = 1, \dots, \ell$. Таким образом, компоненты u_{ik} при $k = 1, \dots, \ell$ однозначно определены компонентой u:

$$u_{ik} = D^{k-1}_{\nu_i}u, \qquad i = 1, \dots, N,\ k = 1, \dots, \ell.$$

Однако компоненты u_{ik}, $k = \ell+1, \dots, 2m$, вообще говоря, не определяются компонентой u (ср. § 2.2 в [93]). Поэтому $\mathbf{W}^\ell(G)$ и $W^\ell(G)$ — существенно различные пространства.

Заметим также, что если ℓ_1, ℓ_2 целые, $0 \leqslant \ell_1, \ell_2 \leqslant 2m-1$ и $\ell_1 < \ell_2$, то пространство $\mathbf{W}^{\ell_2}(G)$ есть замкнутое подмножество пространства $\mathbf{W}^{\ell_1}(G)$ и

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{\ell_1}(G)} \leqslant c\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^{\ell_2}(G)} \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{\ell_2}(G),$$

где $c > 0$ не зависит от u. Это следует из леммы 5.8.

Рассмотрим семейство функций $\{\varphi_\delta\}_{\delta>0} \subset C^\infty(\overline{G})$ таких, что $\varphi_\delta(y) = 1$ при $y \in G \setminus \mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})$, $\varphi_\delta(y) = 0$ при $y \in \mathcal{O}_{\delta/2}(\mathcal{K})$ и $|D^\alpha\varphi_\delta| \leqslant c_\alpha\delta^{-|\alpha|}$, где $c_\alpha > 0$ не зависит от δ. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} &\|\varphi_\delta u - u\|_{H^l_a(G)} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0 \quad (u \in H^l_a(G),\ l \geqslant 0,\ a \in \mathbb{R}),\\ &\|\varphi_\delta \psi - \psi\|_{H^{l-1/2}_a(\Gamma_i)} \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0 \quad (\psi \in H^{l-1/2}_a(\Gamma_i),\ l \geqslant 1,\ a \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{13.4}$$

[1]Если $\ell = 2m$, то нормы в пространствах $\mathbf{W}^\ell(G)$ и $W^\ell(G)$ эквивалентны и эти пространства могут быть отождествлены друг с другом, однако мы рассматриваем случай $\ell \leqslant 2m-1$.

Далее, предположим, что при достаточно малых $\delta > 0$ (в частности, для $\delta > 0$, при которых множество $G \cap \mathcal{O}_\delta(g)$, $g \in \mathcal{K}$, совпадает с углом), функция $\varphi_\delta(y)$ при $y \in \mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})$ зависит только от $\operatorname{dist}(y, \mathcal{K})$. Из этого свойства вытекает, что

$$D^l_{\nu_i} \varphi_\delta|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \ l \geqslant 1. \tag{13.5}$$

Лемма 13.1. *Пусть* $\mathbf{u} = \{u, u_{ik}\} \in \mathbf{W}^\ell(G)$. *Тогда* $\varphi_\delta \mathbf{u} = \{\varphi_\delta u, \varphi_\delta u_{ik}\}$, *т. е. оператор* $\mathbf{S}$ *коммутирует с оператором умножения на* φ_δ.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{u}^n\} \subset C^\infty(\overline{G})$ и $\mathbf{u}^n \to \mathbf{u}$ в $\mathbf{W}^\ell(G)$. С одной стороны, это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_\delta \mathbf{u}^n = \varphi_\delta \mathbf{u} \quad \text{в } \mathbf{W}^\ell(G). \tag{13.6}$$

С другой стороны, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_\delta \mathbf{u}^n = \varphi_\delta u \quad \text{в } W^\ell(G) \tag{13.7}$$

и в силу (13.5)

$$\lim_{n\to\infty} D^{k-1}_{\nu_i}(\varphi_\delta \mathbf{u}^n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_\delta D^{k-1}_{\nu_i} \mathbf{u}^n = \varphi_\delta u_{ik} \quad \text{в } H^{\ell-k+1/2}_\ell(\Gamma_i). \tag{13.8}$$

Из (13.7) и (13.8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_\delta \mathbf{u}^n = \{\varphi_\delta u, \varphi_\delta u_{ik}\} \quad \text{в } \mathbf{W}^\ell(G). \tag{13.9}$$

Комбинируя (13.6) и (13.9), мы завершаем доказательство. □

Из леммы 2.3.1 в [93] вытекает, что[2]

$$\|\varphi_\delta \mathbf{P}(y, D)\mathbf{u}\|_{W^{\ell-2m}(G)} \leqslant c_{1\delta} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^\ell(G)} \qquad \forall \mathbf{u} \in C^\infty(\overline{G}),$$

$$\|\varphi_\delta \mathbf{B}^0_{i\mu} \mathbf{u}\|_{W^{\ell-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_{2\delta} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^\ell(G)} \qquad \forall \mathbf{u} \in C^\infty(\overline{G}),$$

где $c_{1\delta}, c_{2\delta} > 0$ не зависят от $\mathbf{u}$. Следовательно, при всех $\delta > 0$ замыкание $\mathbf{L}^0_\delta = \{\varphi_\delta \mathbf{P}(y, D), \varphi_\delta \mathbf{B}^0_{i\mu}\}$ оператора

$$\mathbf{u} \mapsto \{\varphi_\delta \mathbf{P}(y, D)\mathbf{u}, \varphi_\delta \mathbf{B}^0_{i\mu} \mathbf{u}\} \qquad \big(\mathbf{u} \in C^\infty(\overline{G})\big)$$

есть ограниченный оператор, отображающий все пространство $\mathbf{W}^\ell(G)$ в пространство $W^{\ell-2m}(G) \times \mathcal{W}^{\ell-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$, где

$$\mathcal{W}^{\ell-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) = \prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^m W^{\ell-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i).$$

[2]Так как функция φ_δ равна нулю вблизи множества $\mathcal{K}$, то пространство $W^{\ell-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ во втором неравенстве можно заменить на $H^{\ell-m_{i\mu}-1/2}_a(\Gamma_i)$ при любом $a \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$W^{\ell}(G,\mathcal{K}) = \{g_0 : \varphi_\delta g_0 \in W^{\ell}(G)\ \forall\delta > 0\},$$
$$\mathcal{W}^{\ell-\mathbf{m}-1/2}(\partial G,\mathcal{K}) = \{\{g_{i\mu}\} : \varphi_\delta g_{i\mu} \in W^{\ell-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)\ \forall\delta > 0\}.$$

Определение 13.1. Пусть число ℓ фиксировано ($0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$). Функция $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{\ell}(G)$ называется *сильным обобщенным решением* локальной задачи

$$\mathbf{P}(y,D)\mathbf{u} = g_0(y) \quad (y \in G), \tag{13.10}$$
$$\mathbf{B}^0_{i\mu}\mathbf{u} = g_{i\mu}(y) \quad (y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots,N,\ \mu = 1,\dots,m) \tag{13.11}$$

с правой частью $\{g_0, g_{i\mu}\} \in W^{\ell-2m}(G,\mathcal{K}) \times \mathcal{W}^{\ell-\mathbf{m}-1/2}(\partial G,\mathcal{K})$, если

$$\mathbf{L}^0_\delta\mathbf{u} = \varphi_\delta\{g_0, g_{i\mu}\} \qquad \forall\delta > 0.$$

Теперь предположим, что $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^0(G,\partial G)$ и определим сильное обобщенное решение $\mathbf{u} = \{u, u_{ik}\} \in \mathbf{W}^{\ell}(G)$ задачи (13.1), (13.2). Прежде всего, предположим, что функция $\mathbf{u}$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi_\delta\mathbf{P}(y,D)\mathbf{u} = \varphi_\delta f_0 \quad \text{в } W^{\ell-2m}(G) \quad \forall\delta > 0. \tag{13.12}$$

Из (13.12) и теоремы 7.2.2 в [93] (о локальном повышении гладкости) вытекает, что $u \in W^{2m}_{\mathrm{loc}}(G)$ и

$$\mathbf{P}(y,D)u = f_0(y) \qquad (\text{п. в. } y \in G).$$

Кроме того,

$$\mathbf{B}^1_{i\mu}\mathbf{u} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{B}^1_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})}) \quad \forall\delta > 0 \tag{13.13}$$

и в силу (6.6) (при $l = 0$)

$$\mathbf{B}^2_{i\mu}\mathbf{u} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{B}^2_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}). \tag{13.14}$$

Из (13.13) и (13.14) следует, что

$$f_{i\mu} - \mathbf{B}^1_{i\mu}\mathbf{u} - \mathbf{B}^2_{i\mu}\mathbf{u} \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}). \tag{13.15}$$

Предположим, что

$$\mathbf{L}^0_{\varkappa_2}\mathbf{u} = \varphi_{\varkappa_2}\{f_0, f_{i\mu} - \mathbf{B}^1_{i\mu}\mathbf{u} - \mathbf{B}^2_{i\mu}\mathbf{u}\}.$$

Из этого равенства, соотношения (13.15) и теоремы 7.2.1 в [93] (о локальном повышении гладкости) вытекает, что $u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$. Следовательно, используя (6.5) (при $l = 0$), имеем

$$\mathbf{B}^2_{i\mu}\mathbf{u} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{B}^2_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i). \tag{13.16}$$

Соотношения (13.13) и (13.16) влекут

$$f_{i\mu} - \mathbf{B}^1_{i\mu}\mathbf{u} - \mathbf{B}^2_{i\mu}\mathbf{u} \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})}) \quad \forall\delta > 0. \tag{13.17}$$

Теперь мы можем дать следующее определение.

Определение 13.2. Пусть число ℓ фиксировано ($0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$). Функция $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^\ell(G)$ называется *сильным обобщенным решением* нелокальной задачи (13.1), (13.2) с правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^0(G, \partial G)$, если эта функция является сильным обобщенным решением локальной задачи (13.10), (13.11) с правой частью $\{f_0, f_{i\mu} - \mathbf{B}^1_{i\mu}\mathbf{u} - \mathbf{B}^2_{i\mu}\mathbf{u}\}$.

Из определения 13.2, соотношения (13.17) и теоремы 7.2.1 в [93] (о локальном повышении гладкости) следует, что если $\mathbf{u} = \{u, u_{ik}\}$ — сильное обобщенное решение задачи (13.1), (13.2) с правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^0(G, \partial G)$, то $u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})$ при всех $\delta > 0$,

$$(\varphi_\delta \mathbf{u})_{ik} = D^{k-1}_{\nu_i}(\varphi_\delta u) \quad \forall\delta > 0 \quad (\text{в } H^{\ell-k+1/2}_\ell(\Gamma_i),\ k = 1, \dots, 2m) \tag{13.18}$$

и

$$\mathbf{P}(y, D)u = f_0(y) \quad (\text{п. в. } y \in G), \tag{13.19}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^0_{i\mu}u + \mathbf{B}^1_{i\mu}u + \mathbf{B}^2_{i\mu}u = f_{i\mu}(y) \quad &(\text{в } W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})\ \forall\delta > 0, \\ &i = 1, \dots, N,\ \mu = 1, \dots, m). \end{aligned} \tag{13.20}$$

Таким образом, видим, что компонента u сильного обобщенного решения $\mathbf{u}$ является обобщенным решение в следующем смысле.

Определение 13.3. Пусть число ℓ фиксировано ($0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$). Функция u называется *обобщенным решением* задачи (13.1), (13.2) с правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^0(G, \partial G)$, если

$$u \in W^\ell(G) \cap W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})}) \quad \forall\delta > 0 \tag{13.21}$$

и u удовлетворяет соотношениям (13.19), (13.20).

Более того, для всякого $\delta > 0$ и целого $l \geqslant 0$ можно доказать существование такого числа δ_1, $0 < \delta_1 < \delta$, что для любого обобщенного решения u (в смысле определения 13.3) задачи (13.1), (13.2) выполнена оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{l+2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})} \leqslant c_\delta\Big(&\|f_0\|_{W^l(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{K})})} + \|\{f_{i\mu}\}\|_{\mathcal{W}^{l+2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{K})})} + \\ &+ \|u\|_{L_2(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{K})})}\Big), \end{aligned} \tag{13.22}$$

где $c_\delta > 0$ не зависит от функций u, f_0 и $f_{i\mu}$.

Замечание 13.1. Мы показали, что если $\mathbf{u} = \{u, u_{i\mu}\} \in \mathbf{W}^\ell(G)$ — сильное обобщенное решение задачи (13.1), (13.2), то его компонента u есть обобщенное решение той же задачи. Покажем, что справедливо и обратное. Пусть u — обобщенное решение задачи (13.1), (13.2) с правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^0(G, \partial G)$. Из леммы 14.2 (см. ниже) следует, что $u \in W^\ell(G) \cap H^{2m}_{2m}(G)$. Следовательно, используя лемму 5.8, получим $D^{k-1}_{\nu_i} u \in H^{2m-k+1/2}_{2m}(\Gamma_i) \subset H^{\ell-k+1/2}_\ell(\Gamma_i)$, т. е.

$$\mathbf{u} = \{u, D^{k-1}_{\nu_i} u\} \in \mathbf{W}^\ell(G).$$

При этом нетрудно проверить, что $\mathbf{u}$ есть сильное обобщенное решение задачи (13.1), (13.2).

Покажем, что если функция

$$\mathbf{v} = \{u, v_{ik}\} \in \mathbf{W}^\ell(G)$$

(с той же самой первой компонентой u) есть сильное обобщенное решение задачи (13.1), (13.2), то

$$v_{ik} = D^{k-1}_{\nu_i} u \quad \text{в } H^{\ell-k+1/2}_\ell(\Gamma_i),\ k = 1, \dots, 2m, \tag{13.23}$$

т. е. обобщенное решение определяет сильное обобщенное решение единственным образом. Действительно, так как $\mathbf{v}$ — сильное обобщенное решение, то в силу (13.18) имеем

$$(\varphi_\delta \mathbf{v})_{ik} = D^{k-1}_{\nu_i}(\varphi_\delta u) \quad \forall \delta > 0 \quad (\text{в } H^{\ell-k+1/2}_\ell(\Gamma_i),\ k = 1, \dots, 2m). \tag{13.24}$$

Из соотношений (13.24), (13.5) и леммы 13.1 получаем

$$\varphi_\delta v_{ik} = (\varphi_\delta \mathbf{v})_{ik} = D^{k-1}_{\nu_i}(\varphi_\delta u) = \varphi_\delta D^{k-1}_{\nu_i} u \quad \text{в } H^{\ell-k+1/2}_\ell(\Gamma_i),\ k = 1, \dots, \ell.$$

Так как δ произвольно, то из (13.4) следует, что $v_{ik} = D^{k-1}_{\nu_i} u$ в $H^{\ell-k+1/2}_\ell(\Gamma_i)$, $k = 1, \dots, \ell$.

Пусть теперь $k = \ell + 1, \dots, 2m$. Рассмотрим произвольную функцию $\psi \in C^\infty_0(\Gamma_i)$ и выберем φ_δ так, чтобы $\varphi_\delta(y) = 1$ при $y \in \operatorname{supp} \psi$. Используя лемму 13.1 и соотношения (13.24) и (13.5), имеем

$$\langle v_{ik} - D^{k-1}_{\nu_i} u, \psi \rangle = \langle \varphi_\delta v_{ik} - \varphi_\delta D^{k-1}_{\nu_i} u, \psi \rangle = \langle (\varphi_\delta \mathbf{v})_{ik} - D^{k-1}_{\nu_i}(\varphi_\delta u), \psi \rangle = 0.$$

Так как множество $C^\infty_0(\Gamma_i)$ плотно в $H^{-(\ell-k+1/2)}_{-\ell}(\Gamma_i)$, то $v_{ik} = D^{k-1}_{\nu_i} u$ в пространстве $H^{\ell-k+1/2}_\ell(\Gamma_i)$, $k = \ell + 1, \dots, 2m$. Таким образом, соотношения (13.23) доказаны, и $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Замечание 13.1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между обобщенными решениями и сильными обобщенными решениями одной и той же нелокальной задачи. Далее нам будет удобно рассматривать обобщенные решения, поэтому будем пользоваться определением 13.3.

В этой главе мы изучим задачу (13.1), (13.2) с *однородными* краевыми условиями:

$$\mathbf{P}(y,D)u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{13.25}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}u \equiv \mathbf{B}^0_{i\mu}u + \mathbf{B}^1_{i\mu}u + \mathbf{B}^2_{i\mu}u = 0 \quad (y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots,N,\ \mu = 1,\dots,m), \tag{13.26}$$

где $f_0 \in L_2(G)$.

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{P}u = \mathbf{P}(y,D)u,$$

$$u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}) = \{u \in L_2(G) : u \text{ удовлетворяют (13.21)},$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}u = 0,\ \mathbf{P}(y,D)u \in L_2(G)\}.$$

Согласно определению 13.3 оператор $\mathbf{P}$ соответствует задаче (13.25), (13.26) на обобщенные решения.

Сформулируем основной результат, доказательству которого будет посвящен § 14.

Теорема 13.1. *Оператор* $\mathbf{P}$ *фредгольмов.*

Отметим, что, в отличие от случая ограниченного оператора $\mathbf{L}_B$ (см. § 11), соответствующего задаче (13.25), (13.26), фредгольмовость неограниченного оператора $\mathbf{P}$ не зависит ни от спектральных свойств оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, ни от выполнения алгебраических соотношений между операторами $\mathbf{P}(y,D)$, $\mathbf{B}^0_{i\mu}$ и $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ в точках множества $\mathcal{K}$.

13.2. Нелокальные задачи вблизи множества $\mathcal{K}$

Как и ранее, особое внимание следует уделять поведению решений в окрестности множества $\mathcal{K}$ точек сопряжения нелокальных условий. Выпишем соответствующие модельные задачи.

Обозначим $u(y)$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ через $u_j(y)$. Если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$, $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$, $\Omega_{is}(y) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$, то обозначим $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$. Тогда нелокальная

задача (13.25), (13.26) в ε-окрестности множества (орбиты) $\mathcal{K}$ примет вид

$$\mathbf{P}(y,D)u_j = f_0(y) \quad (y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap G),$$

$$B_{i\mu 0}(y,D)u_j(y)|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y,D)(\zeta u_k)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} = f_{i\mu}(y)$$

$$\big(y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap \Gamma_i,\ i \in \{1 \leqslant i \leqslant N : g_j \in \overline{\Gamma_i}\},\ j = 1,\dots,N,\ \mu = 1,\dots,m\big),$$

где $f_{i\mu} = -\mathbf{B}^2_{i\mu} u$.

Пусть $y \mapsto y'(g_j)$ — описанные в п. 6.1 преобразования координат. Введем функции

$$U_j(y') = u_j(y(y')),\ f_j(y') = f_0(y(y')),\ y' \in K_j^\varepsilon; \qquad f_{j\sigma\mu}(y') = f_{i\mu}(y(y')),\ y' \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma},$$

где $\sigma = 1$ ($\sigma = 2$), если преобразование $y \mapsto y'(g_j)$ переводит $\mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap \Gamma_i$ в сторону γ_{j1} (γ_{j2}) угла K_j, и переобозначим y' через y. Тогда в силу условия 6.3 задача (13.25), (13.26) примет вид (ср. (6.12), (6.13))

$$\mathbf{P}_j(y,D)U_j = f_j(y) \quad (y \in K_j^\varepsilon), \tag{13.27}$$

$$\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D_y)U \equiv \sum_{k,s}(B_{j\sigma\mu ks}(y,D)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}} = f_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma}). \tag{13.28}$$

Отметим, что правая часть задачи (13.27), (13.28) совпадает с правой частью задачи (6.12), (6.13), если $\mathbf{B}^2_{i\mu} = 0$.

14. Фредгольмова разрешимость нелокальных задач

14.1. Конечномерность ядра

В этом пункте мы установим конечномерность ядра оператора $\mathbf{P}$. Для этого предварительно исследуем гладкость обобщенных решений задачи (13.25), (13.26) вблизи множества $\mathcal{K}$.

Пусть u — обобщенное решение задачи (13.25), (13.26), а $U_j(y') = u_j(y(y'))$, $j = 1,\dots,N$, — функции, соответствующие множеству (орбите) $\mathcal{K}$ и удовлетворяющие задаче (13.27), (13.28) с правой частью $\{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$.

В силу (13.21)

$$U_j \in W^{2m}(K_j^{d_2\varepsilon} \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(0)}) \quad \forall\delta > 0, \tag{14.1}$$

где d_2 определено в (6.15). Далее, из включения $U_j \in W^\ell(K_j^{d_2\varepsilon})$ и леммы 5.2 следует, что

$$U_j \in H^0_{a-2m}(K_j^{d_2\varepsilon}), \tag{14.2}$$

где $a > 2m-1$. Наконец, $f_j \in L_2(K_j^\varepsilon)$ и в силу соотношения (13.21) и оценки (6.5) (с $l=0$) $f_{j\sigma\mu} \in W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)$. Следовательно, согласно лемме 5.2

$$f_j \in H_a^0(K_j^\varepsilon), \quad f_{j\sigma\mu} \in H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon), \tag{14.3}$$

где $a > 2m-1$.

При помощи следующих двух лемм мы покажем, что из соотношений (14.1)–(14.3) вытекает включение $U_j \in H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})$.

Обозначим $K_{jq} = K_j \cap \{\varepsilon d_2^{-3} d_1^{4-q}/2 < |y| < \varepsilon d_2^{-3} d_2^{4-q}\}$, где $q = 0, \dots, 4$.

Лемма 14.1. *Для всех $U \in \prod\limits_j W^{2m}(K_{j0})$ справедлива оценка*

$$\sum_j \|U_j\|_{W^{2m}(K_{j4})} \leqslant c \sum_j \big\{ \|\mathbf{P}_j(y,D)U_j\|_{L_2(K_{j1})} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \|\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U|_{\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j1}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j1}})} + \|U_j\|_{L_2(K_{j1})} \big\}, \tag{14.4}$$

где $c > 0$ не зависит от U.

Доказательство. Из общей теории эллиптических уравнений следует, что

$$\|U_j\|_{W^{2m}(K_{j4})} \leqslant k_1 \big(\|\mathbf{P}_j(y,D)U_j\|_{L_2(K_{j3})} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \|B_{j\sigma\mu j0}(y,D)U_j|_{\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j3}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j3}})} + \|U_j\|_{L_2(K_{j3})} \big). \tag{14.5}$$

Пусть $(k,s) \neq (j,0)$. Так как при этом $\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma}) \cap \overline{K_{k2}}$ лежит внутри области K_{k1}, то, используя непрерывность оператора следа в пространствах Соболева, аналогично (14.5) получаем

$$\|B_{j\sigma\mu ks}(y,D)U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j3}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j3}})} \leqslant \\ \leqslant k_2 \|B_{j\sigma\mu ks}(y,D)U_k|_{\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma})\cap\overline{K_{k2}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma})\cap\overline{K_{k2}})} \leqslant \\ \leqslant k_3 (\|\mathbf{P}_j(y,D)U_k\|_{L_2(K_{k1})} + \|U_k\|_{L_2(K_{k1})}). \tag{14.6}$$

Из оценок (14.5) и (14.6) вытекает (14.4). □

Замечание 14.1. Предположим, что нормы в $C^0(\overline{K_{j1}})$ коэффициентов $p_{j\alpha}$ операторов $\mathbf{P}_j(y,D)$ и нормы в $C^{2m-m_{j\sigma\mu}}(\overline{K_{j0}})$ коэффициентов $b_{j\sigma\mu ks\alpha}$ операторов $B_{j\sigma\mu ks}(y,D)$ ограничены константой C. Пусть той же константой C ограничены нормы в $C^1(\overline{K_{j1}})$ коэффициентов $p_{j\alpha}$, $|\alpha| = 2m$, при старших производных в операторах $\mathbf{P}_j(y,D)$. Тогда константа c в неравенстве (14.4) зависит только от C, от константы A в (6.1) и от константы D в (6.2).

Лемма 14.2. *Зафиксируем произвольное* $a > 0$. *Предположим, что функция* U *удовлетворяет соотношениям* (14.1) *и* (14.2) *и является решением задачи* (13.27), (13.28) *с правой частью* $\{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$, *удовлетворяющей соотношениям* (14.3). *Тогда* $U \in \prod\limits_j H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})$ *и*

$$\sum_j \|U_j\|_{H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})} \leqslant c \sum_j \Big\{ \|f_j\|_{H_a^0(K_j^\varepsilon)} + \sum_{\sigma,\mu} \|f_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)} + \\ + \|U_j\|_{H_{a-2m}^0(K_j^\varepsilon)} \Big\}, \tag{14.7}$$

где $c > 0$ *не зависит от* U.

Доказательство. Обозначим $K_{jq}^s = K_j \cap \{\varepsilon d_2^{-3} d_1^{4-q} 2^{-s-1} < |y| < \varepsilon d_2^{-3} d_2^{4-q} 2^{-s}\}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно,

$$\bigcup_{s=0}^{\infty} K_{j1}^s = K_j^\varepsilon, \quad \bigcup_{s=0}^{\infty} K_{j4}^s = K_j^{\varepsilon/d_2^3}. \tag{14.8}$$

Положим $U_j^s(y') = U_j(2^{-s}y')$ и сделаем замену переменных $y = 2^{-s}y'$ в уравнении

$$\mathbf{P}_j(y, D)U_j \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} p_{j\alpha}(y) D_y^\alpha U_j(y) = f_j(y) \quad (y \in K_{j1}^s)$$

и в нелокальных условиях

$$\sum_{k,s} \sum_{|\alpha| \leqslant m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu ks\alpha}(x) D_x^\alpha U_j(x)|_{x = \mathcal{G}_{j\sigma ks} y} = f_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}^s});$$

умножая обе части первого из получившихся равенств на $2^{-s\cdot 2m}$, а второго — на $2^{-s\cdot m_{j\sigma\mu}}$, имеем

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 2m} p_{j\alpha}^s(y') 2^{s(|\alpha|-2m)} D_{y'}^\alpha U_j^s(y') = 2^{-s\cdot 2m} f_j^s(y') \quad (y' \in K_{j1}^0), \tag{14.9}$$

$$\sum_{k,s} \sum_{|\alpha| \leqslant m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu ks\alpha}^s(x') 2^{s(|\alpha|-m_{j\sigma\mu})} D_{x'}^\alpha U_j^s(x')|_{x' = \mathcal{G}_{j\sigma ks} y'} = \\ = 2^{-s\cdot m_{j\sigma\mu}} f_{j\sigma\mu}^s(y') \quad (y' \in \gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}^0}), \tag{14.10}$$

где $p_{j\alpha}^s(y') = p_{j\alpha}(2^{-s}y')$, $b_{j\sigma\mu ks\alpha}^s(x') = b_{j\sigma\mu ks\alpha}(2^{-s}x')$, $f_j^s(y') = f_j(2^{-s}y')$ и $f_{j\sigma\mu}^s(y') = f_{j\sigma\mu}(2^{-s}y')$.

Применяя к задаче (14.9), (14.10) лемму 14.1, получим

$$\sum_j \|U_j^s\|_{W^{2m}(K_{j4}^0)} \leqslant k_1 \sum_j \big\{ \|2^{-s\cdot 2m} f_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \|2^{-s\cdot m_{j\sigma\mu}} f_{j\sigma\mu}^s\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j1}^0})} + \|U_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} \big\}, \quad (14.11)$$

где константа k_1, в силу замечания 14.1, не зависит от s.

Обозначим через $\Phi_{j\sigma\mu} \in H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям: $\Phi_{j\sigma\mu}|_{\gamma_{j\sigma}^\varepsilon} = f_{j\sigma\mu}$ и

$$\|\Phi_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j^\varepsilon)} \leqslant 2\|f_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)}. \quad (14.12)$$

Тогда $\Phi_{j\sigma\mu}^s|_{\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j1}^0}} = f_{j\sigma\mu}^s$, где $\Phi_{j\sigma\mu}^s(y') = \Phi_{j\sigma\mu}(2^{-s}y')$. Следовательно, из (14.11) получаем

$$\sum_j \|U_j^s\|_{W^{2m}(K_{j4}^0)} \leqslant k_1 \sum_j \big\{ \|2^{-s\cdot 2m} f_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \|2^{-s\cdot m_{j\sigma\mu}} \Phi_{j\sigma\mu}^s\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_{j1}^0)} + \|U_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} \big\}. \quad (14.13)$$

Делая в неравенстве (14.13) обратную замену переменных $y' = 2^s y$, получим

$$\sum_j \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} \|2^{-s|\alpha|} D_y^\alpha U_j\|_{L_2(K_{j4}^s)} \leqslant k_1 \sum_j \big\{ \|2^{-s\cdot 2m} f_j\|_{L_2(K_{j1}^s)} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \sum_{|\alpha|\leqslant 2m-m_{j\sigma\mu}} \|2^{-s(|\alpha|+m_{j\sigma\mu})} \Phi_{j\sigma\mu}\|_{L_2(K_{j1}^s)} + \|U_j\|_{L_2(K_{j1}^s)} \big\}. \quad (14.14)$$

Умножая неравенство (14.14) на $2^{-s(a-2m)}$, суммируя по s и учитывая (14.12) и (14.8), выводим (14.7). □

Лемма 14.2 совместно с соотношениями (13.21) дает $u \in H_a^{2m}(G)$, $a > 2m - 1$, где u — произвольное обобщенное решение задачи (13.25), (13.26) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$.

Из леммы 6.1 настоящей работы и теоремы 3.2 в [63] следует, что при почти всех $a > 2m-1$ множество решений из $H_a^{2m}(G)$ задачи (13.25), (13.26) с правой частью $f_0 = 0$ образует конечномерное пространство. Таким образом, доказан следующий результат.

Лемма 14.3. *Ядро оператора* **P** *конечномерно.*

14.2. Замкнутость оператора и его образа. Конечномерность коядра

Для доказательства фредгольмовости оператора $\mathbf{P}$ нам потребуется рассмотреть задачу (13.25), (13.26) в пространствах с таким весом a, что $0 < a \leqslant 1$. Трудность здесь заключается в том, что из принадлежности $u \in H_a^{2m}(G)$ теперь, вообще говоря, не следует, что $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u$ принадлежит $H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$; поэтому и сумма $\mathbf{B}_{i\mu}u = \mathbf{B}_{i\mu}^0 u + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u$ может не принадлежать $H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Можно лишь гарантировать, что $\mathbf{B}_{i\mu}u \in H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, $a' > 2m-1$ (это следует из принадлежности $\mathbf{B}_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ и леммы 5.2. Однако в § 9 доказано, что

$$\{\mathbf{P}(y,D)u,\ \mathbf{B}_{i\mu}u\} \in \mathcal{H}_a^0(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^0(G,\partial G) \quad \forall u \in H_a^{2m}(G),\ a > 0,$$

где $\mathcal{R}_a^0(G,\partial G)$ — некоторое *конечномерное* пространство, вложенное в $\{0\} \times \prod\limits_{i,\mu} H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ при любом $a' > 2m-1$, т. е. пространство $\mathcal{R}_a^0(G,\partial G)$ содержит лишь функции вида $\{0, f_{i\mu}\}$, $f_{i\mu} \in H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, $f_{i\mu} \notin H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Зафиксируем некоторое число $a' > 2m-1$. Тогда любая функция $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_a^0(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^0(G,\partial G)$ представима единственным образом в виде $\{f_0, f_{i\mu}\} = \{f_0, f_{i\mu}^1\} + \{0, f_{i\mu}^2\}$, где $\{f_0, f_{i\mu}^1\} \in \mathcal{H}_a^0(G,\partial G)$, $\{0, f_{i\mu}^2\} \in \mathcal{R}_a^0(G,\partial G)$, и ее норма равна

$$\|\{f_0, f_{i\mu}\}\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)\dotplus\mathcal{R}_a^0(G,\partial G)} = \Big(\|\{f_0, f_{i\mu}^1\}\|^2_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)} + \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}^2\|^2_{H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\Big)^{1/2}.$$

Более того, по теореме 9.1 оператор

$$\mathbf{L}_a = \{\mathbf{P}(y,D),\ \mathbf{B}_{i\mu}\} : H_a^{2m}(G) \to \mathcal{H}_a^0(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^0(G,\partial G), \quad a > 0, \tag{14.15}$$

фредгольмов при почти всех $a > 0$. Используя оператор $\mathbf{L}_a$, докажем следующий результат.

Лемма 14.4. *Оператор* $\mathbf{P}$ *замкнут, образ* $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ *замкнут, и* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{P}) < \infty$.

Доказательство. 1. Рассмотрим при $0 < a \leqslant 1$ вспомогательный неограниченный оператор $\mathbf{P}_a : \mathrm{D}(\mathbf{P}_a) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{P}_a u = \mathbf{P}(y,D)u, \quad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_a) = \{u \in H_a^{2m}(G) : \mathbf{B}_{i\mu}u = 0,\ \mathbf{P}(y,D)u \in L_2(G)\}.$$

Зафиксируем такое a, $0 < a \leqslant 1$, чтобы оператор $\mathbf{L}_a$ был фредгольмов. Покажем, что тогда и оператор $\mathbf{P}_a$ будет фредгольмов.

Из фредгольмовости $\mathbf{L}_a$, компактности вложения $H_a^{2m}(G) \subset H_a^0(G)$ (см. лемму 3.5 в [36]) и теоремы 7.1 из [38] следует, что для всех $u \in H_a^{2m}(G)$

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_1(\|\mathbf{L}_a u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)\dot{+}\mathcal{R}_a^0(G,\partial G)} + \|u\|_{H_a^0(G)}). \tag{14.16}$$

Теперь пусть $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_a)$. Тогда $\mathbf{L}_a u = \{\mathbf{P}(y,D)u, 0\}$, $\mathbf{P}(y,D)u \in L_2(G) \subset H_a^0(G)$, и, следовательно,

$$\|\mathbf{L}_a u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)\dot{+}\mathcal{R}_a^0(G,\partial G)} = \|\mathbf{P}(y,D)u\|_{H_a^0(G)}.$$

Отсюда и из (14.16), учитывая непрерывность вложения $L_2(G) \subset H_a^0(G)$ при $a > 0$, получим

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_2(\|\mathbf{P}(y,D)u\|_{H_a^0(G)} + \|u\|_{H_a^0(G)}) \leqslant k_3(\|\mathbf{P}(y,D)u\|_{L_2(G)} + \|u\|_{L_2(G)}), \tag{14.17}$$

где $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_a)$. Из неравенства (14.17) вытекает, что оператор $\mathbf{P}_a$ замкнут. Следовательно, снова используя (14.17) и теорему 7.1 из [38], получим что $\dim\ker\mathbf{P}_a < \infty$ (ясно, что $\ker\mathbf{P}_a = \ker\mathbf{L}_a$) и $\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$ замкнут.

Рассмотрим произвольную функцию $f_0 \in L_2(G)$. Очевидно, $f_0 \in H_a^0(G)$. В силу следствия 9.1 существуют функционалы $F_1, \ldots, F_{q_0}$ из сопряженного пространства $\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)^*$, такие, что если $\langle\{f_0, 0\},\ F_q\rangle = 0$, $q = 1, \ldots, q_0$, то задача (13.25), (13.26) имеет решение $u \in H_a^{2m}(G)$. Так как

$$|\langle\{f_0, 0\},\ F_q\rangle| \leqslant k_4\|f_0\|_{H_a^0(G)} \leqslant k_5\|f_0\|_{L_2(G)},$$

то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существуют функции $f_1, \ldots, f_{q_0} \in L_2(G)$ такие, что $\langle\{f_0, 0\},\ F_q\rangle = (f_0,\ f_q)_{L_2(G)}$, $q = 1, \ldots, q_0$. Следовательно, $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{P}_a) \leqslant q_0$. Итак, оператор $\mathbf{P}_a$ фредгольмов.

2. Поскольку $H_a^{2m}(G) \subset H_{a-1}^{2m-1}(G) \subset W^\ell(G)$ при $a \leqslant 1$ и $0 \leqslant \ell \leqslant 2m-1$, то имеет место соотношение

$$\mathbf{P}_a \subset \mathbf{P}. \tag{14.18}$$

Из (14.18), в частности, следует, что образ $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ замкнут и

$$\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{P}) \leqslant \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{P}_a) \leqslant q_0.$$

Осталось доказать, что $\mathbf{P}$ замкнут[3]. Обозначим через $h_1, \ldots, h_k$ базис в про-

[3]Отметим, что из замкнутости образа некоторого оператора $\mathbf{P}$ в гильбертовом пространстве и конечномерности его ядра и коядра, вообще говоря, не следует замкнутость самого оператора $\mathbf{P}$; это можно показать, используя рассуждения, близкие к приведенным, например, в [2, гл. 2, п. 18]. Однако если дополнительно предположить, что оператор $\mathbf{P}$ является расширением фредгольмова оператора, то, как мы увидим, $\mathbf{P}$ будет замкнут.

странстве

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{P}) \ominus \mathcal{R}(\mathbf{P}_a).$$

Тогда существуют функции $v_1, \ldots, v_k \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$ такие, что $\mathbf{P}v_j = h_j$, $j = 1, \ldots, k$. Так как $h_j \notin \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$, то $v_j \notin \mathrm{D}(\mathbf{P}_a)$. Ясно также, что функции $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы, так как линейно независимы функции $h_1, \ldots, h_k$.

Рассмотрим конечномерное пространство

$$\mathcal{N} = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k, \ker \mathbf{P}) \ominus \ker \mathbf{P}_a.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{N} \cap \mathrm{D}(\mathbf{P}_a) = \{0\}$. Действительно, если $u \in \mathcal{N} \cap \mathrm{D}(\mathbf{P}_a)$, то

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + v,$$

где α_i — некоторые константы, $v \in \ker \mathbf{P}$. Тогда, учитывая (14.18), имеем

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i h_i = \mathbf{P}u = \mathbf{P}_a u \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a).$$

Следовательно, $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, и, значит, $u = v$. Снова используя (14.18), видим, что $u = v \in \ker \mathbf{P}_a$. Отсюда, по определению пространства $\mathcal{N}$, получаем $u = 0$.

Обозначим через $\mathrm{Gr}\,\mathbf{P}$ ($\mathrm{Gr}\,\mathbf{P}_a$) график оператора $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}_a$). Как известно, оператор $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}_a$) замкнут тогда и только тогда, когда замкнут его график $\mathrm{Gr}\,\mathbf{P}$ ($\mathrm{Gr}\,\mathbf{P}_a$) в $L_2(G) \times L_2(G)$.

Так как $\mathrm{Gr}\,\mathbf{P}_a$ замкнут (как график замкнутого оператора) и $\mathrm{Gr}\,\mathbf{P}_a \subset \mathrm{Gr}\,\mathbf{P}$, а пространства $\mathcal{N}$ и $\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$ конечномерны, то для доказательства замкнутости оператора $\mathbf{P}$ достаточно показать, что

$$\mathrm{Gr}\,\mathbf{P} \subset \mathrm{Gr}\,\mathbf{P}_a \dotplus (\mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp). \tag{14.19}$$

Очевидно, сумма в (14.19) действительно является прямой суммой: если

$$(u, f) \in \mathrm{Gr}\,\mathbf{P}_a \cap (\mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp),$$

то $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_a) \cap \mathcal{N} = \{0\}$, и следовательно, $(u, f) = (u, \mathbf{P}_a u) = (0, 0)$.

Далее, пусть $(u, f) \in \mathrm{Gr}\,\mathbf{P}$, т. е. $u \in \mathrm{D}\mathbf{P}$ и $f = \mathbf{P}u$. Представим функцию f в виде суммы

$$f = f_1 + f_2,$$

где $f_1 \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$, $f_2 \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$. Выберем элемент $u_1 \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_a)$ такой, что $\mathbf{P}_a u_1 = f_1$. Тогда $u_2 = u - u_1 \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$ и $\mathbf{P}u_2 = f_2$. Без ограничения общности можем считать, что

$$u_2 \perp \ker \mathbf{P}_a; \tag{14.20}$$

если это соотношение не выполнено, то следует рассмотреть проекцию u_{2a} функции u_2 на $\ker \mathbf{P}_a$ и заменить u_1 на $u_1 + u_{2a}$, а u_2 — на $u_2 - u_{2a}$. Очевидно, $(u_1, f_1) \in \mathrm{Gr}\,\mathbf{P}_a$ и, учитывая (14.20), $(u_2, f_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$. Таким образом, соотношение (14.19) и вся лемма доказаны. □

Из лемм 14.3 и 14.4 вытекает теорема 13.1.

15. Устойчивость индекса при возмущении дифференциального оператора младшими членами

15.1. Переход к весовым пространствам

Введем оператор

$$P'(y, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-1} p'_\alpha(y) D^\alpha, \tag{15.1}$$

где $p'_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, соответствующий младшим членам. Рассмотрим возмущенный оператор $\mathbf{P}' : \mathrm{D}(\mathbf{P}') \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующий по формуле

$$\begin{gathered} \mathbf{P}'u = \mathbf{P}(y, D)u + P'(y, D)u, \\ u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}') = \{u \in L_2(G) : u \text{ удовлетворяют (13.21)}, \\ \mathbf{B}_{i\mu}u = 0,\ \mathbf{P}(y, D)u + P'(y, D)u \in L_2(G)\}. \end{gathered}$$

По теореме 13.1 неограниченный оператор $\mathbf{P}'$ фредгольмов (так же как и $\mathbf{P}$). Сформулируем основной результат этого параграфа (его доказательство содержится в п. 15.2).

Теорема 15.1. $\operatorname{ind} \mathbf{P}' = \operatorname{ind} \mathbf{P}$.

Таким образом, младшие члены в уравнении (13.25) не влияют на индекс неограниченного оператора $\mathbf{P}$. Трудность заключается в том, что младшие члены, вообще говоря, не являются ни компактными, ни даже $\mathbf{P}$-компактными в смысле определения 1.2 возмущениями. Если $\ell = 2m-1$, то включение $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$ влечет только $u \in W^{2m-1}(G)$, что гарантирует $\mathbf{P}$-ограниченность возмущения,

но не его $\mathbf{P}$-компактность. Однако если $\ell < 2m-1$, то включение $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$ уже не влечет $u \in W^{2m-1}(G)$, и возмущение не является даже $\mathbf{P}$-ограниченным. Более того, в этом случае $\mathrm{D}(\mathbf{P}') \neq \mathrm{D}(\mathbf{P})$.

Чтобы преодолеть эту трудность, введем оператор $\mathbf{Q} : \mathrm{D}(\mathbf{Q}) \subset L_2(G) \to H_a^0(G)$, действующий по формуле

$$\begin{gathered} \mathbf{Q}u = \mathbf{P}(y,D)u, \\ u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}) = \{u \in L_2(G) : u \text{ удовлетворяют (13.21)}, \\ \mathbf{B}_{i\mu}u = 0,\ \mathbf{P}(y,D)u \in H_a^0(G)\}, \end{gathered} \tag{15.2}$$

где $0 \leqslant 2m-\ell-1 < a < 2m-\ell$. Мы докажем, что $\operatorname{ind}\mathbf{Q} = \operatorname{ind}\mathbf{P}$. С другой стороны, мы покажем, что оператор $P'(y,D)$ является $\mathbf{Q}$-компактным возмущением, и, следовательно, он не влияет на индекс оператора $\mathbf{Q}$, а вместе с ним и $\mathbf{P}$.

Лемма 15.1. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-2m$ $(2m-\ell-1 < a < 2m-\ell)$ *не содержит собственных чисел оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда оператор* $\mathbf{Q}$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}\mathbf{Q} = \operatorname{ind}\mathbf{P}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим при $2m-\ell-1 < a < 2m-\ell$ оператор $\mathbf{L}_a$, заданный формулой (14.15). По теореме 9.1 этот оператор фредгольмов. Следовательно, в силу компактности вложения $H_a^{2m}(G) \subset L_2(G)$ (см. лемму 3.5 в [36]), учитывая теорему 7.1 в [38], имеем

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_1 \left(\|\mathbf{L}_a u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)\dot{+}\mathcal{R}_a^0(G,\partial G)} + \|u\|_{L_2(G)}\right). \tag{15.3}$$

2. Введем неограниченный оператор $\dot{\mathbf{Q}} : \mathrm{D}(\dot{\mathbf{Q}}) \subset L_2(G) \to H_a^0(G)$, действующий по формуле

$$\dot{\mathbf{Q}}u = \mathbf{P}(y,D)u, \qquad u \in \mathrm{D}(\dot{\mathbf{Q}}) = \{u \in H_a^{2m}(G) : \mathbf{B}_{i\mu}u = 0\}. \tag{15.4}$$

Так как $H_a^{2m}(G) \subset W^{\ell}(G)$ при $a < 2m-\ell$, то $\dot{\mathbf{Q}}$ — сужение оператора $\mathbf{Q}$, т. е. $\dot{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{Q}$.

Вначале докажем, что $\dot{\mathbf{Q}}$ фредгольмов. Пусть $u \in \mathrm{D}(\dot{\mathbf{Q}})$; тогда $u \in \mathrm{D}(\mathbf{L}_a) = H_a^{2m}(G)$ и $\mathbf{P}(y,D)u \in H_a^0(G)$, $\mathbf{B}_{i\mu}u = 0$. Следовательно, оценка (15.3) принимает вид

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_1 \left(\|\dot{\mathbf{Q}}u\|_{H_a^0(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\right) \quad \forall u \in \mathrm{D}(\dot{\mathbf{Q}}). \tag{15.5}$$

Из (15.5) вытекает, что оператор $\dot{\mathbf{Q}}$ замкнут, $\dim\ker\dot{\mathbf{Q}} < \infty$ и $\mathcal{R}(\dot{\mathbf{Q}}) = \overline{\mathcal{R}(\dot{\mathbf{Q}})}$ (чтобы получить последние два свойства, нужно применить теорему 7.1 в [38]).

Докажем, что $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\dot{\mathbf{Q}}) < \infty$. Так как оператор $\mathbf{L}$ фредгольмов, существуют линейно независимые функции $F_1, \dots, F_d \in H^0_a(G)$ такие, что функция $f \in H^0_a(G)$ принадлежит образу оператора $\dot{\mathbf{Q}}$ тогда и только тогда, когда $(f, F_j)_{H^0_a(G)} = 0$, $j = 1, \dots, d$. Таким образом, $\dot{\mathbf{Q}}$ фредгольмов.

3. Теперь докажем, что $\mathbf{Q}$ фредгольмов. Поскольку $\ker \mathbf{Q} = \ker \mathbf{P}$ и $\mathbf{P}$ фредгольмов, имеем

$$\dim\ker \mathbf{Q} = \dim\ker \mathbf{P} < \infty. \tag{15.6}$$

С другой стороны, $\mathbf{Q}$ — расширение фредгольмова оператора $\dot{\mathbf{Q}}$; следовательно,

$$\mathcal{R}(\mathbf{Q}) = \overline{\mathcal{R}(\mathbf{Q})}, \qquad \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{Q}) < \infty. \tag{15.7}$$

Таким образом, $\mathbf{Q}$ — расширение фредгольмова оператора $\dot{\mathbf{Q}}$ и имеют место соотношения (15.6) и (15.7). Рассуждая так же, как в п. 2 доказательства леммы 14.4, видим, что $\mathbf{Q}$ фредгольмов.

4. В силу (15.6) осталось доказать, что $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{Q}) = \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{P})$.

Пусть $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{Q}) = d_1$, где $d_1 \leqslant d$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_2(G)$. Тогда $f \in \mathcal{R}(\mathbf{P})$ в том и только том случае, когда $f \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$, поскольку $L_2(G) \subset H^0_a(G)$. Однако включение $f \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$ эквивалентно соотношениям $(f, F_j)_{H^0_a(G)} = 0$, $j = 1, \dots, d_1$, где $F_1, \dots, F_{d_1} \in H^0_a(G)$ — линейно независимые функции. Используя неравенство Шварца, ограниченность вложения $L_2(G) \subset H^0_a(G)$ и теорему Рисса, видим, что эти соотношения эквивалентны следующим: $(f, f_j)_{L_2(G)} = 0$, $j = 1, \dots, d_1$, где $f_j \in L_2(G)$. Более того, функции $f_1, \dots, f_{d_1}$ линейно независимы. (В противном случае некоторая линейная комбинация функций $F_1, \dots, F_{d_1}$ была бы ортогональна в $H^0_a(G)$ любой функции из $L_2(G)$. Это невозможно, поскольку $F_1, \dots, F_{d_1}$ линейно независимы, а $L_2(G)$ плотно в $H^0_a(G)$.) Итак, доказано, что $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{P}) = d_1$. $\square$

Введем возмущенный оператор $\mathbf{Q}' : \mathrm{D}(\mathbf{Q}') \subset L_2(G) \to H^0_a(G)$, действующий по формуле

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}'u = \mathbf{P}(y, D)u + P'(y, D)u,\\ u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}') = \{u \in L_2(G) : u \text{ удовлетворяют (13.21)},\\ \mathbf{B}_{i\mu}u = 0,\ \mathbf{P}(y, D)u + P'(y, D)u \in H^0_a(G)\}.\end{gathered}$$

В следующем пункте мы докажем, что $\operatorname{ind}\mathbf{Q}' = \operatorname{ind}\mathbf{Q}$, если прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ не содержит собственных чисел оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Далее, используя дискретность спектра оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и лемму 15.1, докажем теорему 15.1.

15.2. Компактность младших членов в весовых пространствах

Лемма 15.2. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ $(2m - \ell - 1 \leqslant a \leqslant 2m - \ell)$ *не содержит собственных чисел оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда*

$$\|u\|_{W^\ell(G)} \leqslant c\left(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\right) \quad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}).$$

Доказательство. Очевидно, в доказательстве нуждается лишь случай $\ell \geqslant 1$. Рассмотрим неограниченный оператор $\hat{\mathbf{Q}} : \mathrm{D}(\hat{\mathbf{Q}}) \subset W^\ell(G) \to H^0_a(G)$, действующий по формуле $\hat{\mathbf{Q}}u = \mathbf{P}(y, D)u$, $u \in \mathrm{D}(\hat{\mathbf{Q}}) = \mathrm{D}(\mathbf{Q})$. Так как оператор $\mathbf{Q}$ фредгольмов, то и оператор $\hat{\mathbf{Q}}$ также фредгольмов. Следовательно, нужная оценка вытекает из компактности вложения $W^\ell(G) \subset L_2(G)$ $(\ell \geqslant 1)$ и теоремы 7.1 в [38]. □

Введем функцию $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, равную единице в малой окрестности точки $g_j \in \mathcal{K}$ и нулю вне большей окрестности точки g_j. Следующая лемма описывает поведение функций $u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q})$ вблизи множества $\mathcal{K}$.

Лемма 15.3. *Пусть* $2m - \ell - 1 < a < 2m - \ell$ *и число* a *достаточно близко к* $2m - \ell$. *Тогда для любой функции* $u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q})$ *имеем*

$$u(y) = \sum_{j=1}^{N} P_j(y) + v(y), \tag{15.8}$$

где

$$P_j(y) = \psi_j(y) \sum_{|\alpha| \leqslant \ell - 1} p_{j\alpha}(y - g_j)^\alpha, \qquad p_{j\alpha} \in \mathbb{C}, \tag{15.9}$$

и $v \in H^{2m}_{2m-\ell}(G)$ (*если* $\ell = 0$, *полагаем* $P_j(y) \equiv 0$); *более того,*

$$\sum_{j,\alpha} |p_{j\alpha}| + \|v\|_{H^{2m}_{2m-\ell}(G)} \leqslant c\left(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\right). \tag{15.10}$$

Доказательство. 1. Из неравенства (13.22) следует, что

$$\|u\|_{W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})} \leqslant k_{1\delta}\left(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\right) \quad \forall \delta > 0, \tag{15.11}$$

где $k_{1\delta}$ не зависит от u. Следовательно, достаточно изучить поведение u вблизи множества $\mathcal{K}$.

2. Пусть $U_j(y') = u_j(y(y'))$, $j = 1, \ldots, N$, — функции, соответствующие множеству (орбите) $\mathcal{K}$ и удовлетворяющие соотношениям (13.27), (13.28) с правой частью $\{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$.

В силу (15.11) и (6.5) (с $l = 0$) имеем $\{f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$. Так как, кроме того, $\{f_j\} \in \mathcal{H}^0_a(K^\varepsilon)$, то

$$\begin{gathered}\{f_j\} \in \mathcal{H}^0_{2m}(K^\varepsilon), \quad \{f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m}(\gamma^\varepsilon), \\ \|\{f_j\}\|_{\mathcal{H}^0_{2m}(K^\varepsilon)} + \|\{f_{j\sigma\mu}\}\|_{\mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m}(\gamma^\varepsilon)} \leqslant k_2 \left(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\right).\end{gathered} \tag{15.12}$$

Далее, $U \in \mathcal{W}^\ell(K^{\varepsilon_1})$, и, следовательно,

$$U \in \mathcal{H}^0_0(K^{\varepsilon_1}). \tag{15.13}$$

Из соотношений (15.11)–(15.13) и леммы 14.2 вытекает, что

$$\begin{gathered}U \in \mathcal{H}^{2m}_{2m}(K^{\varepsilon_1}), \\ \|U\|_{\mathcal{H}^{2m}_{2m}(K^{\varepsilon_1})} \leqslant k_3 \left(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\right).\end{gathered} \tag{15.14}$$

Будем считать, что $\ell \geqslant 1$ (случай $\ell = 0$) очевиден. Мы докажем, что

$$U = Q + \hat{U},$$

где $\hat{U} \in \mathcal{H}^{2m}_{2m-\ell}(K^\varepsilon)$ и $Q = (Q_1, \ldots, Q_N)$ — вектор-полином степени $\ell - 1$ (если $\ell = 0$, то вектор-полином Q отсутствует). Неравенство (15.10) будет следовать из неравенств в (15.12) и (15.14) и непрерывной зависимости коэффициентов в асимптотических разложениях ниже и нормы $\|\hat{U}\|_{\mathcal{H}^{2m}_{2m-\ell}(K^{\varepsilon_1})}$ от норм $\|U\|_{\mathcal{H}^{2m}_{2m}(K^{\varepsilon_1})}$, $\|\{f_j\}\|_{\mathcal{H}^0_{2m}(K^\varepsilon)}$ и $\|\{f_{j\sigma\mu}\}\|_{\mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m}(\gamma^\varepsilon)}$.

3. Пусть $\delta = 2m - \ell - a$. Очевидно, $0 < \delta < 1$. По лемме 5.3 для каждой функции $f_{j\sigma\mu} \in \mathcal{W}^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma^\varepsilon_{j\sigma})$ существует такой полином $P_{j\sigma\mu}(r)$ степени $2m - m_{j\sigma\mu} - 2$ (если $m_{j\sigma\mu} = 2m - 1$, то $P_{j\sigma\mu}(r) \equiv 0$), что

$$\{f_{j\sigma\mu} - P_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m-\ell-\delta}(\gamma^\varepsilon)$$

(в этом соотношении число $2m - \ell - \delta$ можно заменить любым положительным числом). Используя лемму 4.3 в [13], построим функцию

$$W^1 = \sum_{s=0}^{\ell-1} \sum_{l=0}^{l_1} r^s (i \ln r)^l \varphi^1_{sl}(\omega) \in \mathcal{H}^{2m}_{2m}(K^\varepsilon), \tag{15.15}$$

где $\varphi^1_{sl} \in \mathcal{W}^{2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$, такую, что

$$\{\mathbf{P}_j(y, D) W^1_j\} \in \mathcal{H}^0_{2m-\ell-\delta}(K^\varepsilon), \quad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D) W^1 - P_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m-\ell-\delta}(\gamma^\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\{\mathbf{P}_j(y, D)(U_j - W^1_j)\} \in \mathcal{H}^0_{2m-\ell-\delta}(K^\varepsilon), \quad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)(U_j - W^1)\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m-\ell-\delta}(\gamma^\varepsilon).$$

Из (15.14) и (15.15) следует, что $U - W^1 \in \mathcal{H}^{2m}_{2m}(K^\varepsilon)$. В силу леммы 6.1 мы можем выбрать число δ, $0 < \delta < 1$, так, что в полосе $1 - \ell - \delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 1 - \ell$ не будет собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Тогда, применяя теорему 2.2 в [13] и лемму 4.3 в [13], получим

$$U - W^1 = W^2 + \hat{U},$$

где

$$W^2 = \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{l=0}^{l_2} r^{i\mu_n} (i \ln r)^l \varphi^2_{nl}(\omega),$$

$\{\mu_1, \dots, \mu_{n_0}\}$ — множество всех собственных значений, лежащих в полосе $1 - \ell \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 1$ (на самом деле следует брать собственные значения из полосы $1-\ell-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 1$, но в силу выбора δ полоса $1-\ell-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 1-\ell$ собственных значений не содержит), $\varphi^2_{nl} \in \mathcal{W}^{2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$ и $\hat{U} \in \mathcal{H}^{2m}_{2m-\ell-\delta}(K^\varepsilon) \subset \mathcal{H}^{2m}_{2m-\ell}(K^\varepsilon)$.

Так как $s \leqslant \ell - 1$ (в формуле для W^1), $\operatorname{Re} i\mu_n \leqslant \ell - 1$ (в формуле для W^2) и $W^1 + W^2 = U - \hat{U} \in \mathcal{W}^\ell(K^\varepsilon)$, то в силу леммы 4.20 в [36] функция $W^1 + W^2$ есть вектор-полином степени $\ell - 1$. □

Следующий результат вытекает из леммы 15.3.

Следствие 15.1. *Пусть число a удовлетворяет условиям леммы* 15.3*, и пусть $P'(y, D)$ — дифференциальный оператор порядка $2m - 1$ вида* (15.1)*. Тогда*

$$\|P'(y, D)u\|_{H^1_{2m-\ell}(G)} \leqslant c \left(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)} + \|u\|_{L_2(G)} \right) \quad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}). \tag{15.16}$$

Теперь мы можем доказать, что младшие члены в уравнении (13.25) не влияют на индекс оператора $\mathbf{Q}$.

Лемма 15.4. *Пусть число a удовлетворяет условиям лемм* 15.1 *и* 15.3*. Тогда операторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$ фредгольмовы и* $\operatorname{ind}\mathbf{Q}' = \operatorname{ind}\mathbf{Q}$.

Доказательство. По лемме 15.1 $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$ фредгольмовы.

Введем оператор $P' : \mathrm{D}(P') \subset L_2(G) \to H^0_a(G)$, действующий по формуле $P'u = P'(y, D)u$, $u \in \mathrm{D}(P') = \mathrm{D}(\mathbf{Q})$. Из следствия 15.1 и из компактности вложения $H^1_{2m-\ell}(G) \subset H^0_a(G)$ (см. лемму 3.5 в [36]) вытекает, что $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + P'$ и P' — $\mathbf{Q}$-компактный оператор. Следовательно, $\operatorname{ind}\mathbf{Q}' = \operatorname{ind}\mathbf{Q}$ по теореме 5.26 в [32, гл. 4]. □

Доказательство теоремы 15.1. Из леммы 6.1 следует, что спектр оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ дискретный. Следовательно, найдется число a, удовлетворяющее условиям леммы 15.3. Тогда в силу лемм 15.1 и 15.4 $\operatorname{ind}\mathbf{P}' = \operatorname{ind}\mathbf{Q}' = \operatorname{ind}\mathbf{Q} = \operatorname{ind}\mathbf{P}$. □

16. Устойчивость индекса при возмущении нелокальных условий

16.1. Формулировка основного результата

В этом параграфе исследуется устойчивость индекса нелокальных операторов при возмущении нелокальных условий операторами того же вида, что $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ и $\mathbf{B}^2_{i\mu}$. Эта ситуация более сложная, чем рассмотренная в § 15, поскольку нелокальные возмущения явным образом меняют область определения соответствующих неограниченных операторов. Следовательно, эти возмущения не могут рассматриваться как относительно компактные. Мы предложим иной подход, основанный на понятии *раствора между замкнутыми операторами*.

Рассмотрим дифференциальные операторы $C_{i\mu s}(y,D)$, $i=1,\dots,N$, $\mu=1,\dots,m$, $s=1,\dots,S'_i$, имеющие тот же порядок $m_{i\mu}$, что и операторы $B_{i\mu s}$, и действующие по формуле

$$C_{i\mu s}(y,D)u=\sum_{|\alpha|\leqslant m_{i\mu}} c_{i\mu s\alpha}(y)D^\alpha u,$$

где $c_{i\mu s\alpha}\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Введем оператор $\mathbf{C}^1_{i\mu}$ по формуле

$$\mathbf{C}^1_{i\mu}u=\sum_{s=1}^{S'_i}\big(C_{i\mu s}(y,D)(\zeta u)\big)\big(\Omega'_{is}(y)\big),\ y\in\Gamma_i\cap\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}),\quad \mathbf{C}^1_{i\mu}u=0,\ y\in\Gamma_i\setminus\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}),$$

где ζ и ε — те же, что в определении операторов $\mathbf{B}^1_{i\mu}$, а Ω'_{is} — C^∞-диффеоморфизмы, обладающие теми же свойствами, что и Ω_{is} (в частности, они удовлетворяют условию 6.3, где S_i и Ω_{is} следует заменить на S'_i и Ω'_{is}).

Рассмотрим операторы $\mathbf{C}^2_{i\mu}$, удовлетворяющие условию 6.4 (с $l=0$), в котором $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ следует заменить на $\mathbf{C}^2_{i\mu}$. Положим

$$\mathbf{C}_{i\mu}=\mathbf{C}^1_{i\mu}+\mathbf{C}^2_{i\mu}.$$

Всюду в этом параграфе будем считать, что число a удовлетворяет условиям леммы 15.3. В частности,

$$2m-\ell-1<a<2m-\ell.$$

Теорема об устойчивости индекса будет доказана при следующих дополнительных условиях (см. например, [39, гл. 2, § 1]), которые предполагаются выполненными всюду в этом параграфе, включая условия лемм.

Условие 16.1. *Система* $\{\mathbf{B}^0_{i\mu}\}_{\mu=1}^m$ *является нормальной на* $\overline{\Gamma_i}$, $i = 1, \dots, N$.

Пусть g_{i1}, g_{i2}, τ_{i1}, τ_{i2}, $D^\beta_{\tau_{i1}}$ и $D^\beta_{\tau_{i2}}$ имеют тот же смысл, что в п. 5.2.

Условие 16.2. *Если* $\ell \geqslant m_{i\mu} - |\alpha| + 1$ ($|\alpha| \leqslant m_{i\mu}$) *то*

$$D^\sigma c_{i\mu s\alpha}(g_{i1}) = D^\sigma c_{i\mu s\alpha}(g_{i2}) = 0, \quad |\sigma| = 0, \dots, (\ell - 1) - (m_{i\mu} - |\alpha|).$$

Условие 16.3. *Если* $\ell \geqslant m_{i\mu} + 1$, *то для любой функции* $u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$ *выполнены соотношения*

$$D^\beta_{\tau_{i1}}(\mathbf{C}^2_{i\mu}u)|_{y=g_{i1}} = 0, \quad D^\beta_{\tau_{i2}}(\mathbf{C}^2_{i\mu}u)|_{y=g_{i2}} = 0, \quad \beta = 0, \dots, \ell - 1 - m_{i\mu}.$$

Замечание 16.1. Условия 16.2 и 16.3 становятся более жесткими при увеличении показателя ℓ. Если же, например, рассматривается нелокальное возмущение задачи Дирихле для уравнения второго порядка (т. е. $m = 1$, $m_{i\mu} = 0$, $\mu = 1$) и ищутся обобщенные решения из $L_2(G)$ (т. е. $\ell = 0$), то условия 16.2 и 16.3 выполнены автоматически для любых операторов $\mathbf{C}^1_{i\mu}$ и $\mathbf{C}^2_{i\mu}$.

Лемма 16.1. *Пусть выполнены условия* 16.2 *и* 16.3. *Тогда*

$$\|\mathbf{C}^1_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_1\|u\|_{H^{2m}_{a+\ell}(G)}, \tag{16.1}$$

$$\|\mathbf{C}^2_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_2\|u\|_{W^{2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})}. \tag{16.2}$$

Доказательство. 1. Для любой функции $u \in H^{2m}_{a+\ell}(G)$ имеем $(D^\alpha u)\big(\Omega'_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i} \in H^{2m-|\alpha|-1/2}_{a+\ell}(\Gamma_i) \subset H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{a+\ell-(m_{i\mu}-|\alpha|)}(\Gamma_i)$. Следовательно, в силу условия 16.2 и леммы 5.6 имеем $(c_{i\mu s\alpha}D^\alpha u)\big(\Omega'_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i} \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Оценка (16.1) вытекает из ограниченности указанных вложений и неравенства (5.14).

2. Из условия 6.4 (касательно $\mathbf{C}^2_{i\mu}$) следует, что $\mathbf{C}^2_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, если $u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$. Теперь из условия 16.3 и леммы 5.4 вытекает, что $\mathbf{C}^2_{i\mu}u \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Оценка (16.2) следует из неравенства (6.5) (примененного при $l = 0$ к $\mathbf{C}^2_{i\mu}$) и из (5.11). □

Рассмотрим операторы $\mathbf{P}_t : \mathrm{D}(\mathbf{P}_t) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, $t \in \mathbb{C}$, действующие по формуле

$$\mathbf{P}_t u = \mathbf{P}(y, D)u,$$

$$u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_t) = \{u \in L_2(G) : u \text{ удовлетворяют (13.21)},$$
$$(\mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + t\mathbf{C}_{i\mu})u = 0,\ \mathbf{P}(y, D)u \in L_2(G)\}.$$

Сформулируем основной результат этого параграфа (его доказательство приведено в п. 16.2).

Теорема 16.1. *Пусть выполнены условия* 16.1–16.3. *Тогда* $\operatorname{ind}\mathbf{P}_t = \mathrm{const}$ *при всех* $t \in \mathbb{C}$.

16.2. Раствор между нелокальными операторами в весовых пространствах

Так же как и в § 15, изучим предварительно операторы $\mathbf{Q}_t : \mathrm{D}(\mathbf{Q}_t) \subset L_2(G) \to H_a^0(G)$, действующие по формуле

$$\mathbf{Q}_t u = \mathbf{P}(y, D)u,$$
$$u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_t) = \{u \in L_2(G) : u \text{ удовлетворяют (13.21)},$$
$$(\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + t\mathbf{C}_{i\mu})u = 0,\ \mathbf{P}(y, D)u \in H_a^0(G)\}.$$

где $t \in \mathbb{C}$. Операторы $\mathbf{P}_t$ и $\mathbf{Q}_t$ соответствуют задаче

$$\mathbf{P}(y, D)u = f(y) \quad (y \in G), \tag{16.3}$$

$$(\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + t\mathbf{C}_{i\mu})u = 0 \quad (y \in \Gamma_i,\ i = 1, \dots, N,\ \mu = 1, \dots, m). \tag{16.4}$$

Замечание 16.2. В определении оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ (см. п. 6.3) фигурируют главные однородные части операторов $\mathbf{P}(y, D)$ и $B_{i\mu s}(y, D)$ в точках множества $\mathcal{K}$. В силу условия 16.2 главные однородные части операторов $C_{i\mu s}(y, D)$ равны нулю в этих точках. Следовательно, при любом t задаче (16.3), (16.4) соответствует один и тот же оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Из замечания 16.2 и леммы 15.1 следует, что оператор $\mathbf{Q}_t$ фредгольмов при выбранном a. Следовательно, его график $\mathrm{Gr}\,\mathbf{Q}_t$ — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $L_2(G) \times H_a^0(G)$; в этом пространстве зададим норму

$$\|(u, f)\| = \Big(\|u\|_{L_2(G)}^2 + \|f\|_{H_a^0(G)}^2\Big)^{1/2} \quad \forall (u, f) \in L_2(G) \times H_a^0(G).$$

Положим

$$\delta(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}) = \sup_{u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_t) : \|(u, \mathbf{Q}_t u)\| = 1} \mathrm{dist}\big((u, \mathbf{Q}_t u), \mathrm{Gr}\,\mathbf{Q}_{t+s}\big). \tag{16.5}$$

По определению 1.3 число

$$\hat{\delta}(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}) = \max\{\delta(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}), \delta(\mathbf{Q}_{t+s}, \mathbf{Q}_t)\}$$

есть *раствор между операторами* $\mathbf{Q}_t$ *и* $\mathbf{Q}_{t+s}$.

Доказательство теоремы об устойчивости индекса основано на теореме 5.17 в [32, гл. 4] и следующем результате (который будет доказан ниже).

Теорема 16.2. *Пусть выполнены условия* 16.1–16.3*, и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a+1+\ell-2m$ *не содержат собственных чисел оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*. Тогда*

$$\hat{\delta}(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}) \leqslant c_t s, \quad |s| \leqslant s_t, \tag{16.6}$$

где $s_t > 0$ *достаточно мало, а* $c_t > 0$ *не зависит от* s*.*

Вначале установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 16.2. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1+\ell-2m$ *не содержит собственных чисел оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*. Тогда*

$$\|u\|_{H^{2m}_{a+\ell}(G)} \leqslant c_t \|(u, \mathbf{P}(y,D)u)\| \quad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s}), \tag{16.7}$$

где $c_t > 0$ *не зависит от* s *и* u*, при условии, что* $|s|$ *достаточно мал.*

Доказательство. 1. Рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathbf{M}_t = \{\mathbf{P}(y,D), \mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + t\mathbf{C}_{i\mu}\} : H^{2m}_{a+\ell}(G) \to \mathcal{H}^0_{a+\ell}(G, \partial G). \tag{16.8}$$

Если $v \in H^{2m}_{a+\ell}(G)$, то

$$(\mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + t\mathbf{C}^1_{i\mu})v \in H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{a+\ell}(\Gamma_i),$$
$$\mathbf{C}^2_{i\mu} v \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i) \subset H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{a+\ell}(\Gamma_i)$$

(это следует из условия 6.4 и части 1 леммы 5.3); таким образом, оператор $\mathbf{M}_t$ корректно определен.

В силу теоремы 9.1 и замечания 16.2 оператор $\mathbf{M}_t$ фредгольмов для любого $t \in \mathbb{C}$. Следовательно, применяя теорему 7.1 в [38] и учитывая компактность вложения $H^{2m}_{a+\ell} \subset L_2(G)$ при $a < 2m - \ell$ (см. лемму 3.5 в [36]), получим

$$\|u\|_{H^{2m}_{a+\ell}(G)} \leqslant k_1 \left(\|\mathbf{M}_t u\|_{\mathcal{H}^0_{a+\ell}(G,\partial G)} + \|u\|_{L_2(G)} \right) \quad \forall u \in H^{2m}_{a+\ell}(G), \tag{16.9}$$

где $k_1 > 0$ может зависеть от t, но не зависит от s и u.

2. Теперь рассмотрим функции $u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s})$. По лемме 15.3 $u \in H^{2m}_{a+\ell}(G)$. В силу неравенства (16.9), оценки (6.5) (при $l = 0$ для $\mathbf{C}^2_{i\mu}$) и ограниченности вложения $W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i) \subset H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{a+\ell}(\Gamma_i)$ (см. часть 1 леммы 5.3)

$$\|u\|_{H^{2m}_{a+\ell}(G)} \leqslant k_1 \left(\|\mathbf{P}(y,D)u\|_{H^0_{a+\ell}(G)} + \|u\|_{L_2(G)} \right) + k_2 |s| \cdot \|u\|_{H^{2m}_{a+\ell}(G)} \quad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s}),$$

где $k_2 > 0$ может зависеть от t, но не зависит от s и u. Выбирая $|s| \leqslant 1/(2k_2)$ и используя ограниченность вложения $H^0_a(G) \subset H^0_{a+\ell}(G)$, получаем (16.7). $\square$

Из лемм 16.1 и 16.2 вытекает следующий результат.

Следствие 16.1. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1+\ell-2m$ *не содержит собственных чисел оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда*

$$\|\mathbf{C}_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_t\|(u,\mathbf{P}(y,D)u)\| \quad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s}), \tag{16.10}$$

где $c_t > 0$ *не зависит от* s *и* u, *при условии, что* $|s|$ *достаточно мал.*

Следующая лемма позволяет сводить задачи с неоднородными нелокальными условиями к задачам с однородными нелокальными условиями. Именно в этом месте используется условие 16.1.

Лемма 16.3. *Пусть* $f_{i\mu} \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. *Тогда для любого* $t \in \mathbb{C}$ *и* $|s| \leqslant 1$ *существует функция* $u \in H_a^{2m}(G)$ *такая, что*

$$(\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu})u = f_{i\mu}, \tag{16.11}$$

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant c_t \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}, \tag{16.12}$$

где $c_t > 0$ *не зависит от* $f_{i\mu}$ *и* s.

Доказательство. Используя лемму 11.1 и метод разбиения единицы, построим функцию $v \in H_a^{2m}(G)$ такую, что

$$\operatorname{supp} v \subset \overline{G} \setminus \overline{G_\rho}, \tag{16.13}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}^0 v = f_{i\mu}, \qquad \mathbf{B}_{i\mu}^1 v = 0, \qquad \mathbf{C}_{i\mu}^1 v = 0, \tag{16.14}$$

$$\|v\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_1 \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}, \tag{16.15}$$

где $k_1 > 0$ не зависит от $f_{i\mu}$, t и s.

В силу (16.13) и (6.6) (с оператором $\mathbf{C}_{i\mu}^2$ вместо $\mathbf{B}_{i\mu}^2$ и $l = 0$) $\operatorname{supp}\mathbf{C}_{i\mu}^2 v \subset \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$. Более того, по лемме 16.1 $\mathbf{C}_{i\mu}^2 v \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Следовательно, снова применяя лемму 11.1 и метод разбиения единицы, можем построить функцию $w \in H_a^{2m}(G)$ такую, что

$$\operatorname{supp} w \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}), \tag{16.16}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}^0 w = -(t+s)\mathbf{C}_{i\mu}^2 v, \qquad \mathbf{B}_{i\mu}^1 w = 0, \qquad \mathbf{C}_{i\mu}^1 w = 0, \tag{16.17}$$

$$\|w\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_1 \sum_{i,\mu} \|(t+s)\mathbf{C}_{i\mu}^2 v\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}.$$

Так как $|s| \leqslant 1$, то используя неравенства (16.2) и (16.15), из последнего неравенства выводим

$$\begin{aligned} \|w\|_{H_a^{2m}(G)} &\leqslant k_1 \sum_{i,\mu} (|t|+1) \|\mathbf{C}_{i\mu}^2 v\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant \\ &\leqslant k_2 \|v\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_2 k_1 \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}, \end{aligned} \tag{16.18}$$

где $k_2 > 0$ может зависеть от t, но не зависит от $f_{i\mu}$ и s.

В силу (16.16) и (16.2) $\mathbf{C}_{i\mu}^2 w = 0$. Отсюда, из (16.14) и (16.17) следует, что $u = v + w$ удовлетворяет соотношениям (16.11). Неравенство (16.12) вытекает из неравенств (16.15) и (16.18). □

Замечание 16.3. Нетрудно видеть, что если $(\mathbf{C}_{i\mu}^2 v)(y) = 0$ при $y \in \mathcal{O}_\varkappa(\mathcal{K})$ для некоторого $\varkappa > 0$ и любой $v \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$, то лемма 16.3 справедлива при всех $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 16.2. 1. Нам надо доказать неравенства, аналогичные неравенству (16.6), в котором величину $\hat{\delta}(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s})$ следует заменить на $\delta(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s})$ и $\delta(\mathbf{Q}_{t+s}, \mathbf{Q}_t)$. Докажем неравенство

$$\delta(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}) \leqslant c_t |s|, \quad |s| \leqslant s_t. \tag{16.19}$$

Доказательство соответствующего неравенства для $\delta(\mathbf{Q}_{t+s}, \mathbf{Q}_t)$ проводится аналогично.

Зафиксируем произвольное число t и рассмотрим функцию $u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_t)$. Согласно определению (16.5), достаточно найти функцию $v_s \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s})$ (зависящую от u) такую, что

$$\|u - v_s\|_{L_2(G)} + \|\mathbf{P}(y,D)u - \mathbf{P}(y,D)v_s\|_{H_a^0(G)} \leqslant k_1 |s| \cdot \|(u, \mathbf{P}(y,D)u)\|, \tag{16.20}$$

где $|s|$ достаточно мал, а $k_1, k_2, \ldots > 0$ могут зависеть от t, но не зависят от u и s.

Будем искать $v_s \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s})$ в виде

$$v_s = u + w_s, \tag{16.21}$$

где $w_s \in H_a^{2m}(G)$ — решение задачи

$$\mathbf{P}(y,D) w_s = \sum_{j=1}^{J_s} \beta_j^s f_j^s, \qquad (\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu}) w_s = -s\mathbf{C}_{i\mu} u; \tag{16.22}$$

числа J_s и β_j^s и функции $f_j^s \in H_a^0(G)$ определим ниже так, чтобы существовало решение $w_s \in H_a^{2m}(G)$.

2. Для того, чтобы решить задачу (16.22), вначале заметим, что $\mathbf{C}_{i\mu}u \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ в силу следствия 16.1. Следовательно, применяя лемму 16.3, можем построить функцию $W_s \in H_a^{2m}(G)$ такую, что

$$(\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu})W_s = -s\mathbf{C}_{i\mu}u, \tag{16.23}$$

$$\|W_s\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_2|s| \sum_{i,\mu} \|\mathbf{C}_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}. \tag{16.24}$$

Из (16.24) и (16.10) получаем

$$\|W_s\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_3|s| \cdot \|(u, \mathbf{P}(y,D)u)\|. \tag{16.25}$$

Очевидно, задача (16.22) эквивалентна следующей:

$$\mathbf{P}(y,D)Y_s = -\mathbf{P}(y,D)W_s + \sum_{j=1}^{J_s} \beta_j^s f_j^s, \qquad (\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu})Y_s = 0, \tag{16.26}$$

где

$$Y_s = w_s - W_s \in H_a^{2m}(G). \tag{16.27}$$

3. Чтобы решить задачу (16.26), рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathbf{L}_t = \{\mathbf{P}(y,D), \mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + t\mathbf{C}_{i\mu}\} : H_a^{2m}(G) \to \mathcal{H}_a^0(G, \partial G). \tag{16.28}$$

Заметим, что $\mathbf{C}_{i\mu}^2 v \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ для любой $v \in H_a^{2m}(G)$ по лемме 16.1; поэтому в определении оператора $\mathbf{L}_t$ мы можем вместо $\mathcal{H}_a^0(G,\partial G) \dotplus \mathcal{R}_a^0(G,\partial G)$ писать $\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)$. Из теоремы 9.1 и замечания 16.2 следует, что оператор $\mathbf{L}_t$ фредгольмов для любого $t \in \mathbb{C}$.

Разложим пространство $H_a^{2m}(G)$ в ортогональную сумму $H_a^{2m}(G) = \ker \mathbf{L}_t \oplus E_t$, где E_t — замкнутое подпространство в $H_a^{2m}(G)$. Очевидно, оператор

$$\mathbf{L}_t' = \{\mathbf{P}(y,D), \mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + t\mathbf{C}_{i\mu}\} : E_t \to \mathcal{H}_a^0(G, \partial G) \tag{16.29}$$

фредгольмов и его ядро тривиально. Отсюда, в частности, имеем

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_4 \|\mathbf{L}_t' u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)} \quad \forall u \in E_t. \tag{16.30}$$

Пусть $J = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_t')$. Из леммы 16.1 и результатов в [38, § 16] следует, что оператор

$$\mathbf{L}_{ts}' = \{\mathbf{P}(y,D), \mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu}\} : E_t \to \mathcal{H}_a^0(G, \partial G)$$

также фредгольмов, его ядро тривиально и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{L}'_{ts}) = J$ при условии, что $|s| \leqslant s_t$, где $s_t > 0$ достаточно мало. Более того, используя оценки (16.30), (16.1) и (16.2), имеем при всех $u \in E_t$

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_4 \left(\|\mathbf{L}'_{ts}u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)} + s_t \sum_{i,\mu} \|\mathbf{C}_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \right) \leqslant$$
$$\leqslant k_5 \left(\|\mathbf{L}'_{ts}u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)} + s_t\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \right).$$

Выбирая $s_t \leqslant 1/(2k_6)$, получим

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_6\|\mathbf{L}'_{ts}u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\partial G)} \quad \forall u \in E_t. \tag{16.31}$$

Так как $\mathbf{L}'_{ts}$ фредгольмов, множество $\{f \in H_a^0(G) : (f,0) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}'_{ts})\}$ замкнуто и имеет конечную коразмерность J_s в $H_a^0(G)$. Нетрудно видеть, что $J_s \leqslant J$.

Пусть $f_1^s, \ldots, f_{J_s}^s$ — ортонормированный базис в пространстве

$$H_a^0(G) \ominus \{f \in H_a^0(G) : (f,0) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}'_{ts})\}.$$

Положим $\beta_j^s = (\mathbf{P}(y,D)W_s, f_j^s)_{H_a^0(G)}$. Тогда задача (16.26) имеет, и при том единственное, решение $Y_s \in E_t$; в силу (16.31) и (16.25) имеем

$$\begin{aligned} \|Y_s\|_{H_a^{2m}(G)} &\leqslant k_6 \left(\|\mathbf{P}(y,D)W_s\|_{H_a^0(G)} + \sum_{j=1}^{J_s} |\beta_j^s| \right) \leqslant \\ &\leqslant k_7|s| \cdot \|(u, \mathbf{P}(y,D)u)\| + k_6 J \max\{\beta_1^s, \ldots, \beta_{J_s}^s\}. \end{aligned} \tag{16.32}$$

Оценивая $\beta_j^s = (\mathbf{P}(y,D)W_s, f_j^s)_{H_a^0(G)}$ при помощи неравенства Шварца и используя (16.25), получим

$$|\beta_j^s| \leqslant \|\mathbf{P}(y,D)W_s\|_{H_a^0(G)} \leqslant k_8|s| \cdot \|(u, \mathbf{P}(y,D)u)\|.$$

Отсюда и из (16.32) вытекает

$$\|Y_s\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_9|s| \cdot \|(u, \mathbf{P}(y,D)u)\|. \tag{16.33}$$

4. Учитывая равенство (16.27), из оценок (16.25) и (16.33) выводим

$$\|w_s\|_{L_2(G)} \leqslant k_{10}\|w_s\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_{11}|s| \cdot \|(u, \mathbf{P}(y,D)u)\|, \tag{16.34}$$

$$\|\mathbf{P}(y,D)w_s\|_{H_a^0(G)} \leqslant k_{12}\|w_s\|_{H_a^{2m}(G)} \leqslant k_{12}k_{11}|s| \cdot \|(u, \mathbf{P}(y,D)u)\|, \tag{16.35}$$

где $w_s = Y_s + W_s$ — решение задачи (16.22).

Из ограниченности вложения $H_a^{2m}(G) \subset W^m(G)$ следует, что функция v_s, определенная в (16.21), принадлежит $W^m(G)$; более того, $v_s \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s})$ в силу второго соотношения в (16.22). Нужное нам неравенство (16.20) вытекает из (16.21), (16.34) и (16.35). $\square$

Доказательство теоремы 16.1. Зафиксируем два произвольных числа $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. В силу леммы 15.1 и замечания 16.2 операторы $\mathbf{Q}_t$ фредгольмовы для всех t из отрезка $I_{t_1 t_2} \subset \mathbb{C}$ с концами в точках t_1, t_2. Покрывая каждую точку отрезка $I_{t_1 t_2}$ кругом достаточно малого радиуса, выбирая конечное подпокрытие и применяя теорему 16.2 настоящей работы и теорему 5.17 в [32, гл. 4], видим что $\operatorname{ind} \mathbf{Q}_{t_1} = \operatorname{ind} \mathbf{Q}_{t_2}$. Отсюда и из леммы 15.1 следует, что $\operatorname{ind} \mathbf{P}_{t_1} = \operatorname{ind} \mathbf{P}_{t_2}$. □

17. Неустойчивость индекса

17.1. Пересечение носителя нелокальных членов с точками сопряжения краевых условий

Постановка задачи

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, и пусть $\partial G \setminus \{g_1, g_2\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_i — открытые (в топологии ∂G) гладкие кривые, $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \{g_1, g_2\}$, g_1 и g_2 — концы кривых $\overline{\Gamma_1}$ и $\overline{\Gamma_2}$. Предположим, что в некоторой окрестности точек g_j область G совпадает с плоским углом ненулевого раствора. Предположим, что в окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$ область G совпадает с плоским углом раствора $2\omega_0$, где $0 < \omega_0 < \pi$. Рассмотрим следующую нелокальную задачу в области G:

$$\Delta u = f(y), \quad y \in G, \tag{17.1}$$

$$u|_{\Gamma_1} - (1+t)u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1} = 0, \qquad u|_{\Gamma_2} - (1-t)u(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2} = 0. \tag{17.2}$$

Здесь $t \in \mathbb{C}$ — параметр, а Ω_i — C^∞-диффеоморфизм, определенный в окрестности кривой Γ_i. Предположим, что $\Omega_i(\Gamma_i) \subset G$, $\Omega_i(g_1) = g_1$, $\Omega_i(g_2) = g_2$ и преобразование Ω_i в окрестностях $\mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$ и $\mathcal{O}_\varepsilon(g_2)$ точек g_1 и g_2 есть поворот на угол ω_0 внутрь области G (см. рис. 17.1).

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_t : \mathrm{D}(\mathbf{P}_t) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{P}_t u = \Delta u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_t),$$

$$\mathrm{D}(\mathbf{P}_t) = \{u \in W^1(G) \cap W^2(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})\ \forall \delta > 0 : \\ \Delta u \in L_2(G) \text{ и } u \text{ удовлетворяет (17.2)}\}.$$

По теореме 13.1 (точнее, в силу ее обобщения на случай, когда множество $\mathcal{K}$ состоит из нескольких орбит) оператор $\mathbf{P}_t$ фредгольмов при любом $t \in \mathbb{C}$.

Докажем следующий результат.

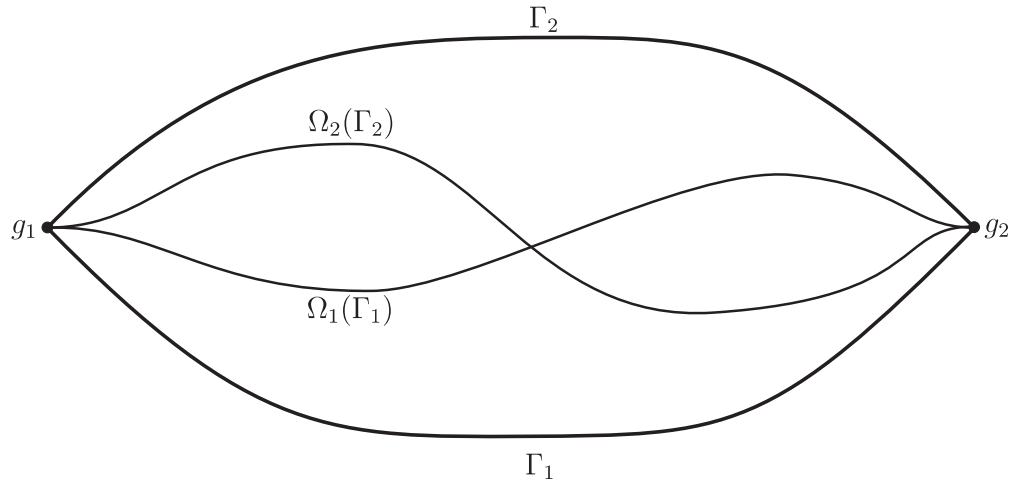

Рис. 17.1. Задача (17.1), (17.2)

Теорема 17.1. *Существует число* $t_0 > 0$ *такое, что* $\operatorname{ind}\mathbf{P}_0 > \operatorname{ind}\mathbf{P}_t = \mathrm{const}$ *для* $0 < |t| \leqslant t_0$.

Доказательство теоремы 17.1

Запишем модельную задачу вблизи точки g_1. Для этого совместим начало координат с точкой g_1, а ось Ox_1 направим по бисектрисе угла, образованного границей области вблизи g_1. Модельная нелокальная задача с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем вид (ср. (6.18))

$$\varphi'' - \lambda^2\varphi = 0, \quad |\varphi| < \omega_0, \tag{17.3}$$

$$\varphi(-\omega_0) - (1+t)\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\omega_0) - (1-t)\varphi(0) = 0, \tag{17.4}$$

где $\varphi(\omega) = \tilde{u}(\omega, \lambda)$ при фиксированном λ. Очевидно, та же модельная задача будет соответствовать точке g_2.

Непосредственно убеждаемся в том, что собственные значения задачи (17.3), (17.4) не зависят от t и имеют вид

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{\omega_0} i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{17.5}$$

Далее нас будет интересовать расположение собственных значений относительно полосы $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$. Так как $0 < \omega_0 < \pi$, то в указанной полосе имеется единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует единственный (с точностью до умножения на константу) собственный вектор

$$\varphi_0(\omega) = -\frac{t}{\omega_0}\omega + 1 \tag{17.6}$$

и единственный (с точностью до собственного вектора) присоединенный вектор[4] $\varphi_1(\omega) = 0$.

Лемма 17.1. *Существует число* $t_0 > 0$ *такое, что*

$$\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}_0) \leqslant \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}_t) = \mathrm{const}$$

для $0 < |t| \leqslant t_0$.

Доказательство. 1. Рассмотрим оператор $\mathbf{N}_t : H_0^2(G) \to \mathcal{H}_0^0(G, \partial G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{N}_t = (\Delta u,\ u|_{\Gamma_1} - (1+t)u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1},\ u|_{\Gamma_2} - (1-t)u(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2}).$$

Так как прямая $\operatorname{Im} \lambda = -1$ не содержит собственных значений задачи (17.3), (17.4), то по теореме 3.4 в [59] оператор $\mathbf{N}_t$ фредгольмов при всех t. Поскольку, с одной стороны, оператор $u \mapsto u(\Omega_j(y))|_{\Gamma_j}$ ограничен из $H_0^2(G)$ в $H_0^{3/2}(\Gamma_j)$, а, с другой стороны, малые возмущения фредгольмовых операторов не меняют их индекс (см. [38, § 16]), то $\operatorname{ind} \mathbf{N}_t = \mathrm{const}$ для всех t из достаточно малой окрестности любой фиксированной точки $t' \in \mathbb{C}$; следовательно,

$$\operatorname{ind} \mathbf{N}_t = \mathrm{const}, \quad t \in \mathbb{C}. \tag{17.7}$$

2. Докажем, что

$$\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{N}_t) = \mathrm{const}, \quad |t| \leqslant t_0, \tag{17.8}$$

где $t_0 > 0$ достаточно мало. В силу (17.7) достаточно показать, что

$$\dim \ker \mathbf{N}_t = 0, \quad |t| \leqslant t_0. \tag{17.9}$$

Пусть $t = 0$, и пусть $u \in \ker \mathbf{N}_0$. Из (13.22) следует, что функция u бесконечно дифференцируема вне сколь угодно малой окрестности множества $\{g_1, g_2\}$. С другой стороны, $u \in H_0^2(G) \subset W_2^2(G)$; следовательно, по теореме вложения Соболева $u \in C^\infty(G) \cap C(\overline{G})$ и

$$u(g_1) = u(g_2) = 0. \tag{17.10}$$

[4]Если $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ — собственное значение задачи (17.3), (17.4), а $\varphi_0(\omega)$ — соответствующий собственный вектор, то присоединенный вектор $\varphi_1(\omega)$ ищется как (быть может, нулевое) решение уравнения $\varphi_1'' - \lambda_0^2 \varphi_1 + \dfrac{d}{d\lambda}(\varphi_0'' - \lambda^2 \varphi_0)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0$ с нелокальными условиями (17.4). Таким образом, при $\lambda_0 = 0$ присоединенный вектор $\varphi_1(\omega)$ — это решение уравнения $\varphi_1'' = 0$ с нелокальными условиями (17.4).

Так как коэффициенты задачи вещественны при $t = 0$, без ограничения общности считаем, что функция $u(y)$ вещественнозначна. Если функция $|u(y)|$ достигает максимума внутри области G, то по принципу максимума $u = \mathrm{const}$ в $\overline{G}$; следовательно, $u = 0$ в силу (17.10). Если $|u(y)|$ достигает максимума на части границы Γ_i, то в силу нелокальных условий (17.2), которые при $t = 0$ имеют вид

$$u|_{\Gamma_1} = u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1}, \qquad u|_{\Gamma_2} = u(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2},$$

функция $|u(y)|$ также достигает максимума внутри области G; тогда $u = 0$ по доказанному. Наконец, если $|u(y)|$ достигает максимума в точке g_1 или g_2, то $u = 0$ в силу (17.10).

Таким образом, доказано, что $\dim\ker \mathbf{N}_0 = 0$. Из результатов [38, § 16] следует, что $\dim\ker \mathbf{N}_t \leqslant \dim\ker \mathbf{N}_0 = 0$ для достаточно малых $|t|$; отсюда вытекает (17.9) и, следовательно, (17.8).

3. Теперь докажем, что

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_t) = \{f \in L_2(G) : (f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)\}, \qquad 0 \neq t \in \mathbb{C}. \tag{17.11}$$

Так как любое решение $u \in H_0^2(G)$ задачи (17.1), (17.2) с правой частью $f \in L_2(G)$ принадлежит $W^1(G)$, имеем

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_t) \supset \{f \in L_2(G) : (f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)\}, \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{17.12}$$

Для того чтобы доказать обратное вложение при $t \neq 0$, рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_t)$. Пусть $u \in W^1(G)$ — решение задачи (17.1), (17.2) с правой частью f. При помощи леммы 14.2 отсюда получим $u \in H_{a+1}^2(G)$ для любого $a > 0$. В силу (17.5) найдется достаточно малое $a > 0$ такое, что полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda < a$ содержит единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$ задачи (17.1), (17.2). Из теоремы 3.3 в [59] об асимптотике решений нелокальных задач следует, что

$$u(y) = c_j\varphi_0(\omega) + d_j\varphi_0(\omega)\ln r + v_j(y), \quad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j), \tag{17.13}$$

где (ω, r) — полярные координаты с полюсом в точке g_j, $\varphi_0(\omega)$ задана формулой (17.6) и $v_j \in H_0^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j))$. Заметим, что

$$u \in W_2^1(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)), \qquad v_j \in W_2^1(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)),$$

но

$$\varphi_0(\omega) \notin W_2^1(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)), \qquad \varphi_0(\omega)\ln r \notin W_2^1(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j))$$

при $t \neq 0$. Следовательно, $c_j = d_j = 0$ в (17.13), и, таким образом, $u \in H_0^2(G)$. Тем самым доказано, что $(f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)$, т. е.

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_t) \subset \{f \in L_2(G) : (f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)\}, \qquad 0 \neq t \in \mathbb{C}. \tag{17.14}$$

Из соотношений (17.12) и (17.14) получаем (17.11).

4. Докажем, что

$$\operatorname{codim}\{f \in L_2(G) : (f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)\} = \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{N}_t), \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{17.15}$$

В формуле (17.15) коразмерность подпространства

$$\{f \in L_2(G) : (f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)\}$$

вычисляется в пространстве $H_0^0(G)$, а коразмерность подпространства $\mathcal{R}(\mathbf{N}_t)$ — в пространстве $H_0^0(G) \times H_0^{3/2}(\Gamma_1) \times H_0^{3/2}(\Gamma_2)$.

Зафиксируем $t \in \mathbb{C}$ и положим

$$J_1 = \operatorname{codim}\{f \in L_2(G) : (f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)\}, \qquad J_2 = \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{N}_t).$$

Пусть $f \in L_2(G)$ и $(f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)$. Это эквивалентно соотношениям

$$\big((f, 0, 0), F_j\big)_{\mathcal{H}_0^0(G, \partial G)} = 0, \quad j = 1, \ldots, J_2,$$

где F_j — функции, образующие базис в ортогональном дополнении к подпространству $\mathcal{R}(\mathbf{N}_t)$ пространства $\mathcal{H}_0^0(G, \partial G)$. В силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, эти соотношения эквивалентны следующим:

$$(f, \hat{f}_j)_{L_2(G)} = 0, \quad j = 1, \ldots, J_2,$$

где $\hat{f}_j$ — некоторые функции из пространства $L_2(G)$. Таким образом,

$$J_1 \leqslant J_2 \tag{17.16}$$

(равенство имеет место тогда и только тогда, когда функции $\hat{f}_j$ линейно независимы).

Докажем обратное неравенство. Пусть $F = (f, f_1, f_2)$ — произвольная функция из $\mathcal{R}(\mathbf{N}_t)$. Тогда существует такая функция $u \in H_0^2(G)$, что

$$\Delta u = f(y), \quad y \in G,$$

$$u|_{\Gamma_1} - (1+t)u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1} = f_1, \qquad u|_{\Gamma_2} - (1-t)u(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2} = f_2.$$

Используя лемму 3.1 в [40], построим такую функцию $v \in H_0^2(G)$, что

$$v|_{\Gamma_1} - (1+t)v(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1} = f_1, \qquad v|_{\Gamma_2} - (1-t)v(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2} = f_2,$$

$$\|v\|_{H_0^2(G)} \leqslant k_1\big(\|f_1\|_{H_0^{3/2}(\Gamma_1)} + \|f_2\|_{H_0^{3/2}(\Gamma_2)}\big), \tag{17.17}$$

где $k_1 > 0$ не зависит от f_1 и f_2.

Очевидно, функция $w = u - v \in H_0^2(G)$ — решение задачи

$$\Delta w = f(y) - \Delta v, \quad y \in G,$$

$$w|_{\Gamma_1} - (1+t)w(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1} = 0, \qquad w|_{\Gamma_2} - (1-t)w(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2} = 0.$$

Следовательно,

$$f - \Delta v \in L_2(G), \qquad (f - \Delta v, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t).$$

Это эквивалентно соотношениям

$$(f - \Delta v, f_j')_{L_2(G)} = 0, \quad j = 1, \ldots, J_1,$$

где $f_j' \in L_2(G)$ — функции, образующие базис в ортогональном дополнении к подпространству $\{f \in L_2(G) : (f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)\}$ пространства $L_2(G)$. В силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве и оценки (17.17), эти соотношения эквивалентны следующим:

$$(F, F_j')_{\mathcal{H}_0^0(G,\partial G)} = 0, \quad j = 1, \ldots, J_1,$$

где F_j' — некоторые функции из пространства $\mathcal{H}_0^0(G, \partial G)$. Таким образом,

$$J_2 \leqslant J_1 \tag{17.18}$$

(равенство имеет место тогда и только тогда, когда функции F_j' линейно независимы).

Неравенства (17.16) и (17.18) дают (17.15).

Из соотношений (17.15) и (17.8) получим

$$\operatorname{codim}\{f \in L_2(G) : (f, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{N}_t)\} = \text{const}, \qquad |t| \leqslant t_0. \tag{17.19}$$

Объединяя (17.11), (17.12) при $t = 0$ и (17.19), завершаем доказательство. □

Лемма 17.2. *Пусть число* $t_0 > 0$ — *то же, что и в лемме* 17.1. *Тогда*

$$\dim\ker \mathbf{P}_0 > \dim\ker \mathbf{P}_t = 0$$

для $0 < |t| \leqslant t_0$.

Доказательство. 1. Пусть $0 < |t| \leqslant t_0$, и пусть $u \in \ker \mathbf{P}_t$. Аналогично п. 3 доказательства леммы 17.1 можно показать, что $u \in H_0^2(G)$; следовательно, $u \in \ker \mathbf{N}_t$. В силу (17.9) $u = 0$; таким образом, $\dim\ker \mathbf{P}_t = 0$.

2. Пусть $t = 0$. Тогда $u = \mathrm{const}$ принадлежит $\ker \mathbf{P}_0$. □

Доказательство теоремы 17.1. Применяя леммы 17.2 и 17.1, получим

$$\operatorname{ind} \mathbf{P}_0 = \dim\ker \mathbf{P}_0 - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}_0) > \\ > -\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}_0) \geqslant -\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}_t) = \operatorname{ind} \mathbf{P}_t, \quad 0 < |t| \leqslant t_0.$$

□

Нелокальные члены с носителем в малой окрестности точек сопряжения

Теперь покажем, что индекс оператора может меняться, даже если носитель нелокальных членов сосредоточен в сколь угодно малой окрестности точек сопряжения краевых условий.

Пусть G, Γ_i и g_j — те же, что и выше. Рассмотрим следующую нелокальную задачу в области G:

$$\Delta u = f(y), \quad y \in G, \tag{17.20}$$

$$u|_{\Gamma_1} - (1+t)\xi(y)u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1} = 0, \qquad u|_{\Gamma_2} - (1-t)\xi(y)u(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2} = 0, \tag{17.21}$$

где $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, носитель функции ξ сосредоточен в произвольной сколь угодно малой окрестности точек g_1 и g_2 и $\xi(y) = 1$ вблизи этих точек (см. рис. 17.2).

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}'_t : \mathrm{D}(\mathbf{P}'_t) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{P}'_t u = \Delta u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}'_t),$$

$$\mathrm{D}(\mathbf{P}'_t) = \{u \in W^1(G) \cap W^2(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})\ \forall \delta > 0 : \\ \Delta u \in L_2(G) \text{ и } u \text{ удовлетворяет (17.21)}\}.$$

По теореме 13.1 (точнее, в силу ее обобщения на случай, когда множество $\mathcal{K}$ состоит из нескольких орбит) оператор $\mathbf{P}_t$ фредгольмов при любом $t \in \mathbb{C}$.

Сформулируем основной результат этого пункта.

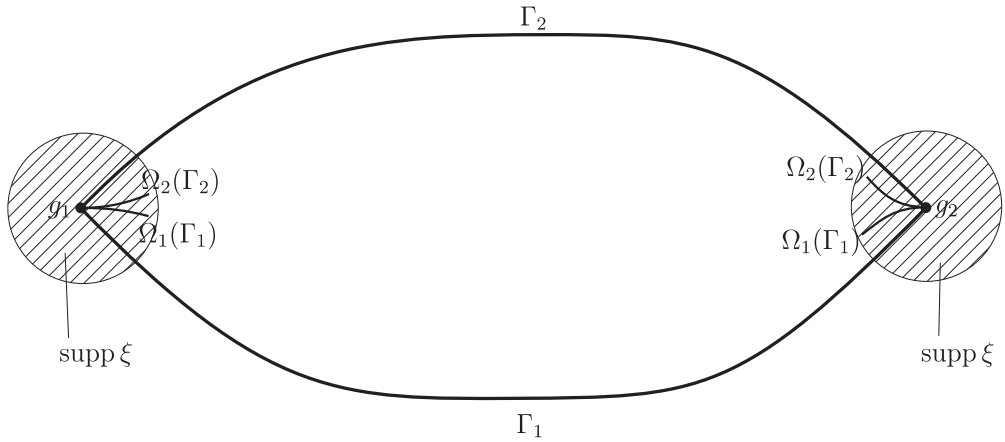

Рис. 17.2. Задача (17.20), (17.21)

Теорема 17.2. *Существует число* $t_0 > 0$ *такое, что* $\operatorname{ind}\mathbf{P}'_0 > \operatorname{ind}\mathbf{P}'_t = \mathrm{const}$ *для* $0 < |t| \leqslant t_0$.

Доказательство. Нелокальные условия (17.2) отличаются от нелокальных условий (17.21) операторами

$$u \mapsto (1+t)(1-\xi(y))u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1}, \qquad u \mapsto (1-t)(1-\xi(y))u(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2}.$$

Так как коэффициенты $(1 \pm t)(1-\xi(y))$ при нелокальных членах обращаются в ноль вблизи точек g_1 и g_2, то $\operatorname{ind}\mathbf{P}'_t = \operatorname{ind}\mathbf{P}_t$ для всех $t \in \mathbb{C}$ в силу теоремы 16.1, и утверждение теоремы вытекает из теоремы 17.1. □

17.2. Случай, когда носитель нелокальных членов не содержит точек сопряжения краевых условий

В этом пункте мы покажем, что индекс оператора может меняться и тогда, когда носитель нелокальных членов не пересекается с множеством точек сопряжения краевых условий (и даже лежит внутри области).

Постановка задачи

Пусть G, Γ_i и g_j — те же, что и выше. Дополнительно предположим, что

$$0 < \omega_0 < \pi/2,$$

и рассмотрим следующую задачу в области G:

$$\Delta u = f(y), \quad y \in G, \tag{17.22}$$

$$u|_{\Gamma_1} + tu(\Omega(y))|_{\Gamma_1} = 0, \qquad u|_{\Gamma_2} = 0, \tag{17.23}$$

где $t \in \mathbb{R}$ и Ω — C^∞-диффеоморфизм, определенный в некоторой окрестности кривой Γ_1. Предположим, что $\overline{\Omega(\Gamma_1)} \subset G$ (см. рис. 17.3).

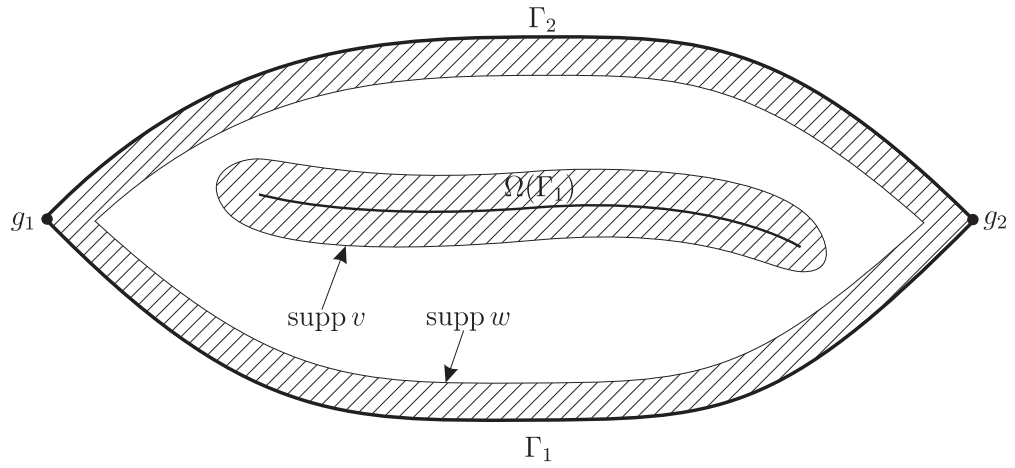

Рис. 17.3. Задача (17.22), (17.23)

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_t : \mathrm{D}(\mathbf{P}_t) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{P}_t u = \Delta u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_t),$$

$$\mathrm{D}(\mathbf{P}_t) = \{u \in W^1(G) \cap W^2(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})\ \forall \delta > 0 : \\ \Delta u \in L_2(G) \text{ и } u \text{ удовлетворяет (17.23)}\}.$$

По теореме 13.1 (точнее, в силу ее обобщения на случай, когда множество $\mathcal{K}$ состоит из нескольких орбит) оператор $\mathbf{P}_t$ фредгольмов при любом $t \in \mathbb{C}$.

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 17.3. *Существует число $t_0 > 0$ такое, что $0 = \operatorname{ind} \mathbf{P}_0 > \operatorname{ind} \mathbf{P}_t$ для $0 < |t| \leqslant t_0$.*

Доказательство теоремы 17.3

Как известно, локальный оператор $\mathbf{P}_0$ — изоморфизм, и, следовательно,

$$\operatorname{ind} \mathbf{P}_0 = 0. \tag{17.24}$$

Изучим операторы $\mathbf{P}_t$. Каждой из точек g_1, g_2 соответствует одна и та же (локальная, так как носитель нелокальных членов лежит вне множества $\{g_1, g_2\}$) модельная задача с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi'' - \lambda^2 \varphi = 0, \quad |\varphi| < \omega_0, \tag{17.25}$$

$$\varphi(-\omega_0) = \varphi(\omega_0) = 0. \tag{17.26}$$

Непосредственно проверяется, что собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{2\omega_0} i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{17.27}$$

Лемма 17.3. $\dim \ker \mathbf{P}_t = 0$ *для* $0 < |t| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $u \in \ker \mathbf{P}_t$. Так как $0 < \omega_0 < \pi/2$, из (17.27) следует, что в полосе $-1 \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 0$ нет собственных значений задачи (17.25), (17.26). В § 18 (см. теорему 18.1) будет показано, что в этом случае $u \in W_2^2(G)$. Из (13.22) следует, что функция u бесконечно дифференцируема вне сколь угодно малой окрестности множества $\{g_1, g_2\}$; по теореме вложения Соболева $u \in C^\infty(G) \cap C(\overline{G})$.

Так как $t \in \mathbb{R}$, то все коэффициенты задачи (17.22), (17.23) вещественные; поэтому, не ограничивая общности, считаем, что функция $u(y)$ вещественнозначная. Если функция $|u(y)|$ достигает максимума внутри области G, то по принципу максимума $u = \mathrm{const}$ в $\overline{G}$; тогда $u = 0$ в силу второго условия в (17.23). Если $|u(y)|$ достигает максимума на Γ_1, то из первого условия в (17.23) и из соотношения $|t| \leqslant 1$ следует, что $|u(y)|$ достигает максимума внутри области G; в этом случае $u = 0$ по доказанному. Наконец, если $|u(y)|$ достигает максимума на $\overline{\Gamma_2}$, то $u = 0$ в силу непрерывности и второго условия в (17.23). $\square$

Лемма 17.4. *Существует число* $t_0 > 0$ *такое, что* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}_t) > 0$ *для* $0 < |t| \leqslant t_0$.

Доказательство. 1. Рассмотрим оператор $\mathbf{M}_t : H^2_{a+1}(G) \to \mathcal{H}^0_{a+1}(G\partial G)$, $a > 0$, действующий по формуле

$$\mathbf{M}_t = (\Delta u,\ u|_{\Gamma_1} + tu(\Omega(y))|_{\Gamma_1},\ u|_{\Gamma_2}).$$

Поскольку оператор вложения $W_2^{3/2}(\Gamma_1) \subset H^{3/2}_{a+1}(\Gamma_1)$ ограничен по лемме 5.3 и $\overline{\Omega(\Gamma_1)} \subset G$, то

$$\|u(\Omega(y))\|_{H^{3/2}_{a+1}(\Gamma_1)} \leqslant k_1 \|u(y')\|_{W_2^{3/2}(\Omega(\Gamma_1))} \leqslant k_2 \|u\|_{H^2_{a+1}(G)}. \tag{17.28}$$

Следовательно, $\mathbf{M}_t u \in \mathcal{H}^0_{a+1}(G, \partial G)$, если $u \in H^2_{a+1}(G)$ и $a > 0$. Таким образом, оператор $\mathbf{M}_t$ определен корректно.

По теореме 10.5 в [40] локальный оператор $\mathbf{M}_0$ — изоморфизм при

$$0 < a < \pi/(2\omega_0). \tag{17.29}$$

Зафиксируем число a, удовлетворяющее (17.29). Так как $\mathbf{M}_0$ — изоморфизм и имеет место оценка (17.28), то оператор $\mathbf{M}_t$ также изоморфизм для $0 \leqslant |t| \leqslant t_0$, где $t_0 = t_0(a)$ достаточно мало.

2. Построим функцию $u \in H^2_{a+1}(G)$, удовлетворяющую нелокальным условиям (17.23), такую, что

$$u(\Omega(g_1)) = 1.$$

Для этого рассмотрим функцию $v \in C^\infty(G)$ такую, что $v(y) = 1$ для $y \in \overline{\Omega(\Gamma_1)}$ и $\operatorname{supp} v \subset G$. В этом случае $v(\Omega(y)) = 1$ для $y \in \Gamma_1$; следовательно, $v(\Omega(y))|_{\Gamma_1} \in H^{3/2}_{a+1}(\Gamma_1)$.

Далее, рассмотрим функцию $w \in H^2_{a+1}(G)$ такую, что

$$w|_{\Gamma_1} = -tv(\Omega(y))|_{\Gamma_1}, \quad w|_{\Gamma_2} = 0, \qquad \operatorname{supp} w \cap \overline{\Omega(\Gamma_1)} = \varnothing$$

(существование такой функции w вытекает из леммы 3.1 в [40]). Легко видеть, что $u = v + w$ — искомая функция (см. рис. 17.3).

3. Приблизим функцию $f = \Delta u \in H^0_{a+1}(G)$ функциями $f_n \in L_2(G)$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $H^0_{a+1}(G)$:

$$\|f_n - f\|_{H^0_{a+1}(G)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{17.30}$$

Если $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}_t) = 0$ при $0 < |t| \leqslant t_0$, то для каждой функции $f_n \in L_2(G)$ существует (единственное в силу леммы 17.3) обобщенное решение $u_n \in W^1(G)$ задачи (17.22), (17.23) с правой частью f_n. Более того, $u_n \in H^2_{a+1}(G)$ в силу леммы 14.2.

Из того факта, что $\mathbf{M}_t$ — изоморфизм, и из (17.30) вытекает, что

$$\|u_n - u\|_{H^2_{a+1}(G)} \leqslant k_3 \|f_n - f\|_{H^0_{a+1}(G)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, по теореме вложения Соболева имеем

$$u_n(\Omega(g_1)) \to u(\Omega(g_1)) = 1, \quad n \to \infty. \tag{17.31}$$

Однако, с другой стороны, полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 0$ не содержит собственных значений задачи (17.25), (17.26). В § 18 (см. теорему 18.1) будет показано, что в этом случае $u_n \in W^2_2(G)$. По теореме вложения Соболева $u_n \in C(\overline{G})$, и в силу второго соотношения в (17.23) $u_n(g_1) = 0$. Тогда из первого соотношения в (17.23) получаем $u_n(\Omega(g_1)) = 0$ (при $t \neq 0$), что противоречит (17.31). Таким образом, доказано, что $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}_t) > 0$. □

Теорема 17.3 следует из (17.24) и из лемм 17.3 и 17.4.

Замечание 17.1. Пусть $\mathbf{I}$ — единичный оператор в $L_2(G)$, и пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. В силу леммы 15.1 младшие члены в эллиптическом уравнении не влияют на индекс неограниченного нелокального оператора $\mathbf{P}_t$. Следовательно,

$$\operatorname{ind}(\mathbf{P}_t - \lambda\mathbf{I}) = \operatorname{ind}\mathbf{P}_t < 0$$

для $0 < |t| \leqslant t_0$, где $t_0 > 0$ достаточно мало. Таким образом, спектр оператора $\mathbf{P}_t$ при $0 < |t| \leqslant t_0$ совпадает со всей комплексной плоскостью.

Глава V

Гладкость обобщенных решений нелокальных эллиптических задач

18. Сохранение гладкости обобщенных решений

18.1. Постановка задачи

Как и в предыдущих главах, считаем выполненными условия 6.1–6.4 (последнее с $l = 0$). Как и в главе IV, предполагаем, что порядки $m_{i\mu}$ дифференциальных операторов $B_{i\mu s}(y, D)$ удовлетворяют неравенствам

$$m_{i\mu} \leqslant 2m - 1.$$

Будем изучать гладкость *обобщенных решений* (см. определение 13.3) нелокальной краевой задачи (6.7), (6.8):

$$\mathbf{P}(y, D)u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{18.1}$$

$$\mathbf{B}^0_{i\mu}u + \mathbf{B}^1_{i\mu}u + \mathbf{B}^2_{i\mu}u = f_{i\mu}(y) \quad (y \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, N,\ \mu = 1, \ldots, m). \tag{18.2}$$

Будем говорить, что *гладкость* обобщенных решений *сохраняется*, если любое обобщенное решение задачи (18.1), (18.2) (с любой правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\}$ из некоторого подмножества пространства $\mathcal{W}^0(G, \partial G)$, которое ниже определяется в разных случаях по-разному) принадлежит $W^{2m}(G)$. Если существует обобщенное решение задачи (18.1), (18.2), не принадлежащее $W^{2m}(G)$, то будем говорить, что *гладкость* обобщенных решений *может нарушаться*.

Запишем модельную задачу, соответствующую множеству (орбите) $\mathcal{K}$.

Обозначим через $u_j(y)$ функцию $u(y)$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$. Если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$, $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$ и $\Omega_{is}(y) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$, то обозначим функцию $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$. В

этих обозначениях нелокальная задача (18.1), (18.2) в ε-окрестности множества (орбиты) $\mathcal{K}$ примет вид

$$\mathbf{P}(y,D)u_j = f_0(y) \quad (y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap G),$$

$$B_{i\mu 0}(y,D)u_j(y)|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y,D)(\zeta u_k)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} = \psi_{i\mu}(y)$$

$$\big(y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap \Gamma_i,\ i \in \{1 \leqslant i \leqslant N : g_j \in \overline{\Gamma_i}\},\ j = 1,\dots,N,\ \mu = 1,\dots,m\big),$$

где

$$\psi_{i\mu} = f_{i\mu} - \mathbf{B}^2_{i\mu} u.$$

Пусть $y \mapsto y'(g_j)$ — описанная в п. 6.1 (главы II) замена переменных. Введем функции

$$\begin{gathered} U_j(y') = u(y(y')), \quad f_j(y') = f_0(y(y')), \quad y' \in K_j^\varepsilon; \\ f_{j\sigma\mu}(y') = f_{i\mu}(y(y')), \quad B^u_{j\sigma\mu}(y') = (\mathbf{B}^2_{i\mu}u)(y(y')), \\ \psi_{j\sigma\mu}(y') = f_{j\sigma\mu}(y') - B^u_{j\sigma\mu}(y'), \quad y' \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma}, \end{gathered} \tag{18.3}$$

где $\sigma = 1$ ($\sigma = 2$), если преобразование $y \mapsto y'(g_j)$ отображает $\mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap \Gamma_i$ в сторону γ_{j1} (γ_{j2}) угла K_j. Обозначим y' снова через y. Тогда в силу условия 6.3 задача (18.1), (18.2) примет вид (ср. (6.12), (6.13) и (13.27), (13.28))

$$\mathbf{P}_j(y,D)U_j = f_j(y) \quad (y \in K_j^\varepsilon), \tag{18.4}$$

$$\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U \equiv \sum_{k,s} (B_{j\sigma\mu ks}(y,D)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) = \psi_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma}). \tag{18.5}$$

Отметим, что правая часть задачи (18.4), (18.5) совпадает с правой частью задачи (13.27), (13.28), если $f_{i\mu} = 0$. Если, кроме того, $\mathbf{B}^2_{i\mu} = 0$, то правая часть задачи (18.4), (18.5) совпадает с правой частью задачи (6.12), (6.13).

18.2. Формулировка основного результата

В этом параграфе изучим ситуацию, когда выполнено следующее условие.

Условие 18.1. *Прямая* $\operatorname{Im}\lambda = 1 - 2m$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Напомним, что показатель ℓ в определении обобщенного решения фиксирован и таков, что

$$0 \leqslant \ell \leqslant 2m - 1.$$

Обозначим через Λ множество всех собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащих в полосе $1 - 2m < \operatorname{Im}\lambda < 1 - \ell$ (это множество может быть и пусто). Обозначим также $i\Lambda = \{i\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

Условие 18.2. *Все собственные значения из множества Λ правильные.*

Напомним, что понятие правильного собственного значения введено в определении 7.1.

Условие 18.2, в частности, означает, что $\Lambda = \varnothing$, если $\ell = 2m - 1$ (например, если $\ell = m = 1$), и $i\Lambda \subset \{\ell, \dots, 2m-2\}$, если $\ell \leqslant 2m - 2$.

В случае $\ell \leqslant 2m - 2$ нам понадобятся дополнительные условия.

Пусть $W^{-2m}(-\omega_j, \omega_j)$ — пространство, сопряженное с $W^{2m}(-\omega_j, \omega_j)$. Введем пространство

$$\mathcal{W}^{-2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega}) = \prod_{j=1}^{N} W^{-2m}(-\omega_j, \omega_j).$$

Рассмотрим оператор $(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda))^* : \mathcal{W}^0[-\overline{\omega}, \overline{\omega}] \to \mathcal{W}^{-2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$, сопряженный к оператору $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) : \mathcal{W}^{2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega}) \to \mathcal{W}^0[-\overline{\omega}, \overline{\omega}]$. Оператор $(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda))^*$ отображает элемент $\{\zeta_j, \chi_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^0[-\overline{\omega}, \overline{\omega}]$ в $(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda))^*\{\zeta_j, \chi_{j\sigma\mu}\}$ по следующему правилу:

$$\langle \varphi, (\tilde{\mathcal{L}}(\lambda))^*\{\zeta_j, \chi_{j\sigma\mu}\}\rangle = \sum_j (\tilde{\mathcal{P}}_j(\omega, D_\omega, \lambda)\varphi_j, \zeta_j)_{L_2(-\omega_j, \omega_j)} + \sum_{j,\sigma,\mu} \tilde{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(\omega, D_\omega, \lambda)\varphi\overline{\chi_{j\sigma\mu}}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{W}^{2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$. Здесь $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ обозначает полуторалинейную форму на соответствующей паре сопряженных пространств.

Далее, для любого числа $s \in \{\ell, \dots, 2m-2\}$ обозначим через J_s множество всех индексов (j', σ', μ'), для которых

$$s \leqslant m_{j'\sigma'\mu'} - 1, \tag{18.6}$$

т. е. индексов, отвечающих дифференциальным операторам достаточно высокого порядка (а именно, порядка $\geqslant s + 1$) в краевых условиях. Обозначим также через C_s пространство, состоящее из числовых векторов $\{c_{j\sigma\mu}\}$ ($c_{j\sigma\mu} \in \mathbb{C}$), удовлетворяющих соотношениям

$$c_{j'\sigma'\mu'} = 0, \quad (j', \sigma', \mu') \in J_s.$$

Условие 18.3. *Если $\ell \leqslant 2m-2$, то для любого $s \in i\Lambda$ справедливы следующие утверждения.*

1. $J_s \neq \varnothing$.

2. $\langle\{0, c_{j\sigma\mu}\}, \psi\rangle = 0$ *для всех* $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$ *и* $\psi \in \ker(\tilde{\mathcal{L}}(-is))^*$.

3. *Пусть* $\varphi_c \in \mathcal{W}^{2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$ *— решение уравнения* $\tilde{\mathcal{L}}(-is)\varphi_c = \{0, c_{j\sigma\mu}\}$, *где* $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$ (*это решение существует в силу части* 2 *и определено с точностью до элемента* $\varphi_0 \in \ker \tilde{\mathcal{L}}(-is)$). *Тогда для любого вектора* $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$ *функция* $r^s\varphi_c(\omega)$ *есть однородный полином* (*степени* s).

Замечание 18.1. 1. Часть 1 в условии 18.3 необходима для выполнения части 2. Действительно, рассмотрим некоторое собственное значение $\lambda_s = -is \in \Lambda$ и предположим, что $J_s = \varnothing$. Тогда $C_s = \prod\limits_{j,\sigma,\mu} \mathbb{C}$. Таким образом, если выполнена часть 2, то уравнение $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s)\varphi_c = \{0, c_{j\sigma\mu}\}$ разрешимо для любых $c_{j\sigma\mu} \in \mathbb{C}$. Но в это случае, как легко видеть, уравнение $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s)\varphi = \{\tilde{f}_j, c_{j\sigma\mu}\}$ также разрешимо для любых $\{\tilde{f}_j, c_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^0[-\overline{\omega}, \overline{\omega}]$. Следовательно, по лемме 6.1 оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s)$ — изоморфизм, что невозможно, так как λ_s — собственное значение.

2. Часть 2 есть необходимое и достаточное условие существования решений φ_c для всех $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$ в части 3.

Замечание 18.2. Предположим, что выполнено условие 18.2. Если часть 3 условия 18.3 выполнена для некоторого решения φ_c, то она выполнена для любого решения $\varphi_c + \varphi_0$, где $\varphi_0 \in \ker \tilde{\mathcal{L}}(-is)$, так как $-is$ — правильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Условие 18.4. *Если* $\ell \leqslant 2m-2$, *то для любого* $s \in \{\ell, \ldots, 2m-2\} \setminus i\Lambda$ *выполнено следующее утверждение. Пусть* $\varphi_c \in \mathcal{W}^{2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$ *— решение*[1] *уравнения* $\tilde{\mathcal{L}}(-is)\varphi_c = \{0, c_{j\sigma\mu}\}$, *где* $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$. *Тогда для любого вектора* $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$ *функция* $r^s\varphi_c(\omega)$ *есть однородный полином* (*степени* s).

Замечание 18.3. Предположим, что выполнено условие 18.2.

1. Если выполнены условия 18.3 и 18.4, то для любого вектора $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$, $s = \ell, \ldots, 2m-2$, задача

$$\mathcal{P}_j(D)V = 0, \qquad \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V = c_{j\sigma\mu} r^{s-m_{j\sigma\mu}} \tag{18.7}$$

имеет решение $V(y)$, являющееся однородным полиномом степени s. Действительно, подставив функцию $V = r^s\varphi_c(\omega)$ в (18.7), получим уравнение $\tilde{\mathcal{L}}(-is)\varphi_s = \{0, c_{j\sigma\mu}\}$. В силу условий 18.3 и 18.4 это уравнение имеет такое решение φ_c, что функция $V = r^s\varphi_c(\omega)$ — однородный полином порядка s.

[1]Это решение существует и единственно, так как $-is$ не является собственным значением оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

2. Если нарушено условие 18.3 или 18.4, то найдется такой вектор $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$, для которого задача (18.7) имеет решение вида

$$V = r^s \varphi_c(\omega) + r^s (i \ln r) \sum_{n=1}^{J} c_n \varphi^{(n)}(\omega), \tag{18.8}$$

где $s \in \{\ell, \dots, 2m-2\}$, $c_n \in \mathbb{C}$, $\varphi_c, \varphi^{(n)} \in \mathcal{W}^{2m}(-\overline{\omega}, \overline{\omega})$ и $J = J(s)$, причем функция V не является полиномом по переменным y_1, y_2.

Действительно, если нарушено условие 18.4, то утверждение очевидно (с $c_1 = \dots = c_J = 0$). Предположим, что нарушено условие 18.3. Если выполнены части 1 и 2 условия 18.4 и не выполнена часть 3, то утверждение снова очевидно (с $c_1 = \dots = c_J = 0$). Предположим, что не выполнена часть 1 или 2. В обоих случаях не будет выполнена часть 2 (см. замечание 18.1). Иными словами, существуют правильное собственное значение $\lambda_s = -is \in \Lambda$ и числовой вектор $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$ такие, что элемент $\{0, c_{j\sigma\mu}\}$ не ортогонален ядру $\ker(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s))^*$.

Обозначим через $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(J)}$ ($J \geqslant 1$) базис в $\ker \tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s)$. Так как λ_s — правильное собственное значение, ни один из собственных векторов $\varphi^{(n)}$ не имеет присоединенного. Подставим функцию V вида (18.8) в уравнения (18.7). В результате получим

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s)\varphi_c = \{0, c_{j\sigma\mu}\} - \sum_{n=1}^{J} c_n \left.\frac{d\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_s} \varphi^{(n)}. \tag{18.9}$$

Заметим, что $\dim \ker(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s))^* = \dim \ker \tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s) = J$ в силу леммы 6.1. Пусть $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(J)}$ — базис в пространстве $\ker(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s))^*$. По лемме 3.2 в [13] матрица

$$\left\| \left\langle \left.\frac{d\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_s} \varphi^{(n)},\ \psi^{(k)} \right\rangle \right\|_{n,k=1,\dots,J}$$

невырождена. Следовательно, мы можем выбрать константы c_n так, что правая часть в (18.9) будет ортогональна ядру $\ker(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s))^*$, и, значит, будет существовать решение φ_c уравнений Eq. (18.9). Кроме того, поскольку элемент $\{0, c_{j\sigma\mu}\}$ не ортогонален ядру $\ker(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_s))^*$, вектор $(c_1, \dots, c_J)$ ненулевой. Таким образом, функция V вида (18.8) не будет полиномом по переменным y_1, y_2.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 18.1. *Пусть выполнены условия* 18.1–18.4*, и пусть* u *— обобщенное решение задачи* (18.1), (18.2) *с правой частью* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^0(G, \partial G)$. *Тогда* $u \in W^{2m}(G)$.

Замечание 18.4. По теореме 18.1 любое обобщенное решение задачи (18.1), (18.2) принадлежит $W^{2m}(G)$. Правые части $f_{i\mu}$ в нелокальных условиях принадлежат пространствам $W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ (что естественно). Однако никаких дополнительных ограничений (типа условий согласования в точках множества $\mathcal{K}$) на поведение функций $f_{i\mu}$ и коэффициентов нелокальных операторов не налагается. В действительности, функции $f_{i\mu} \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ не совсем произвольны. Например, если $m = 1$, $m_{i1} = 0$ и $\mathbf{B}^1_{i1} = 0$, $\mathbf{B}^2_{i1} = 0$ (т. е. рассматривается «локальная» задача Дирихле) и решение u принадлежит $W^2(G)$, то в силу теоремы вложения Соболева

$$f_{i1}(g) = f_{j1}(g), \qquad g \in \overline{\Gamma_i} \cap \overline{\Gamma_j} \neq \varnothing. \tag{18.10}$$

Теорема 18.1 показывает, что при выполнении условий 18.1–18.4 существование *обобщенного* решения автоматически гарантирует выполнение соотношений вида (18.10). В § 19 мы докажем, что если условие 18.1 нарушено, то, для того чтобы любое обобщенное решение было гладким, на правые части $f_{i\mu}$ необходимо налагать определенные условия согласования.

18.3. Доказательство основного результата

Пусть $U_j(y') = u_j(y(y'))$, $j = 1, \ldots, N$, функции, соответствующие множеству (орбите) $\mathcal{K}$ и удовлетворяющие соотношениям (18.4), (18.5) с правой частью $\{f_j, \psi_{j\sigma\mu}\}$.

Из доказательства леммы 15.3 следует, что

$$U = Q + \hat{U}, \tag{18.11}$$

где $\hat{U} \in \mathcal{H}^{2m}_{2m-\ell}(K^\varepsilon)$, а $Q = (Q_1, \ldots, Q_N)$ — вектор-полином степени $\ell - 1$ (если $\ell = 0$, то полином Q отсутствует). Используя этот факт, докажем следующую лемму.

Лемма 18.1. *Пусть выполнены условия* 18.2–18.4. *Тогда*

$$U = W + U' \tag{18.12}$$

где $W = (W_1, \dots, W_N)$ *— вектор-полином степени* $2m-2$, $U' \in \mathcal{H}_\delta^{2m}(K^\varepsilon)$ (δ *таково, что* $0 < \delta < 1$ *и полоса* $1 - 2m < \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1 - 2m + \delta$ *не содержит собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$) *и*

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_j(y,D)U'_j\} &\in \mathcal{H}_0^0(K^\varepsilon), \\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U'\} &\in \mathcal{H}_\delta^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon) \cap \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon). \end{aligned} \tag{18.13}$$

Доказательство. 1. Функция $\hat{U}$ из (18.11) принадлежит $\mathcal{H}_{2m-\ell}^{2m}(K^\varepsilon)$ и в силу соотношений (18.4), (18.5) и (18.11) является решением задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j(y,D)\hat{U}_j &= f_j - \mathbf{P}_j(y,D)Q_j \qquad (y \in K_j^\varepsilon), \\ \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)\hat{U} &= \psi_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)Q \quad (y \in \gamma_{j\sigma}^\varepsilon). \end{aligned} \tag{18.14}$$

Так как $\{f_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon)$ и Q — вектор-полином, то

$$\{f_j - \mathbf{P}_j(y,D)Q_j\} \in \mathcal{H}_0^0(K^\varepsilon). \tag{18.15}$$

Далее, $\psi_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)Q \in W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_j^\varepsilon)$. Следовательно, в силу леммы 5.3 существует такой полином $P_{j\sigma\mu}(r)$ степени $2m - m_{j\sigma\mu} - 2$ (если $m_{j\sigma\mu} = 2m-1$, то $P_{j\sigma\mu}(r) \equiv 0$), что

$$\{\psi_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)Q - P_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}_\delta^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon) \cap \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon) \tag{18.16}$$

для любого $0 < \delta < 1$. Более того, поскольку

$$\{\psi_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)Q\} = \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)\hat{U}\} \in \mathcal{H}_{2m-\ell}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon),$$

каждый из полиномов $P_{j\sigma\mu}(r)$ состоит из мономов порядка $\max(0, \ell - m_{j\sigma\mu}), \dots,$ $2m - m_{j\sigma\mu} - 2$ (в частности, полином $P_{j\sigma\mu}(r)$ отсутствует, если $\ell = 2m-1$).

2. Запишем полином $P_{j\sigma\mu}(r)$ в виде

$$P_{j\sigma\mu}(r) = c_{j\sigma\mu} r^{\ell - m_{j\sigma\mu}} + c'_{j\sigma\mu} r^{\ell - m_{j\sigma\mu}+1} + \dots; \tag{18.17}$$

здесь, в частности, $c_{j\sigma\mu} = 0$ для всех j, σ, μ таких, что $\ell \leqslant m_{j\sigma\mu} - 1$ (ср. (18.6) при $s = \ell$). Следовательно, $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_\ell$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathcal{P}_j(D)W^\ell = 0, \qquad \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)W^\ell = c_{j\sigma\mu} r^{\ell - m_{j\sigma\mu}}. \tag{18.18}$$

В силу условий 18.3 и 18.4 (см. замечание 18.3) задача задача (18.18) имеет решение $W^\ell(y)$, являющееся однородным вектор-полиномом степени ℓ.

Используя (18.17) и (18.18) и разлагая коэффициенты операторов $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)$ по формуле Тейлора, получим

$$\begin{gathered}\{\mathbf{P}_j(y,D)W_j^\ell\}\in\mathcal{H}_0^0(K^\varepsilon),\\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)W^\ell-P_{j\sigma\mu}+P'_{j\sigma\mu}\}\in\mathcal{H}_\delta^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)\cap\mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon),\end{gathered}\tag{18.19}$$

где $P'_{j\sigma\mu}(r)$ — полином, состоящий из мономов степени $\max(0,\ell-m_{j\sigma\mu}+1),\dots,$ $2m-m_{j\sigma\mu}-2$.

Из (18.15), (18.16) и (18.19) следует, что

$$\begin{gathered}\{f_j-\mathbf{P}_j(y,D)(Q_j+W_j^\ell)\}\in\mathcal{H}_0^0(K^\varepsilon),\\ \{\psi_{j\sigma\mu}-\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)(Q+W^\ell)-P'_{j\sigma\mu}\}\in\mathcal{H}_\delta^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)\cap\mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon).\end{gathered}\tag{18.20}$$

3. Повторяя процедуру, описанную в п. 2 доказательства, конечное число раз (и пользуясь каждый раз условиями 18.3 и 18.4), получим

$$\begin{gathered}\{f_j-\mathbf{P}_j(y,D)(Q_j+W_j^\ell+\dots+W_j^{2m-2})\}\in\mathcal{H}_0^0(K^\varepsilon),\\ \{\psi_{j\sigma\mu}-\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)(Q+W^\ell+\dots+W^{2m-2})\}\in\mathcal{H}_\delta^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)\cap\mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon),\end{gathered}\tag{18.21}$$

где W^s — однородный вектор-полином порядка s, $s=\ell,\dots,2m-2$ (заметим, что однородный вектор полином порядка $2m-1$ уже принадлежит $\mathcal{H}_\delta^{2m}(K^\varepsilon)$). Если $\ell=2m-1$, то полиномы W^s в (18.21) отсутствуют; в этом случае второе соотношение в (18.21) вытекает из (18.16), где $P_{j\sigma\mu}=0$.

Из (18.14) и (18.21) получаем

$$\begin{gathered}\{\mathbf{P}_j(y,D)(\hat U_j-W_j^\ell-\dots-W_j^{2m-2})\}\in\mathcal{H}_0^0(K^\varepsilon),\\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)(\hat U-W^\ell-\dots-W^{2m-2})\}\in\mathcal{H}_\delta^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)\cap\mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon).\end{gathered}\tag{18.22}$$

4. Так как прямая $\operatorname{Im}\lambda=1-2m+\delta$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и выполнены соотношения (18.22), то из теоремы 2.2 в [13], леммы 4.3 в [13] и условий 18.2–18.4 вытекает, что функция $\hat U+W^\ell+\dots+W^{2m-2}$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_\delta^{2m}(K^\varepsilon)$ с точностью до вектор-полинома, состоящего из вектор-мономов степени $\min\limits_{s\in i\Lambda}s,\dots,2m-2$ (этот вектор-полином отсутствует, если $\ell=2m-1$). Иными словами, существует такой вектор-полином $\hat W$, состоящий из вектор-мономов степени $l,\dots,2m-2$, что

$$\begin{gathered}\hat U+\hat W\in\mathcal{H}_\delta^{2m}(K^\varepsilon),\\ \{\mathbf{P}_j(y,D)(\hat U_j+\hat W_j)\}\in\mathcal{H}_0^0(K^\varepsilon),\\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)(\hat U+\hat W)\}\in\mathcal{H}_\delta^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)\cap\mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon).\end{gathered}\tag{18.23}$$

Теперь заключение леммы следует из соотношений (18.11) и (18.23). □

Лемма 18.2. *Пусть выполнены условия* 18.1–18.4. *Тогда* $U \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$.

Доказательство. Из (18.13), леммы 7.1 и следствия 7.1 вытекает существование такой функции $V \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K) \cap \mathcal{W}^{2m}(K)$, что

$$\begin{gathered}\{\mathbf{P}_j(y,D)(U'_j - V_j)\} \in \mathcal{H}^0_0(K^\varepsilon),\\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)(U' - V)\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_0(\gamma^\varepsilon).\end{gathered} \tag{18.24}$$

В силу (18.24) и того факта, что полоса $1-2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1-2m+\delta$ не содержит собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ мы можем применить применить теорему 2.2 в [13] (об асимптотике решений нелокальных задач), из которой получаем $U' - V \in \mathcal{H}^{2m}_0(K^\varepsilon) \subset \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$. Отсюда и из леммы 18.1 следует заключение леммы. □

Теорема 18.1 вытекает из (13.21) и леммы 18.2.

19. «Пограничный» случай. Условия согласования

19.1. Поведение обобщенных решений вблизи точек сопряжения

Пусть Λ — то же множество собственных значений, что и в § 18. В этом параграфе, вместо условия 18.1, будем считать выполненным следующее условие.

Условие 19.1. *Прямая* $\operatorname{Im}\lambda = 1-2m$ *содержит единственное собственное значение* $\lambda = i(1-2m)$ *оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *и это собственное значение правильное.*

Принципиальное отличие результатов этого параграфа от результатов из § 18 связано с поведением обобщенных решений вблизи множества (орбиты) $\mathcal{K}$. При выполнении условия 19.1 по-прежнему справедливо заключение леммы 18.1. Однако заключение леммы 18.2 уже неверно, поскольку лемма 7.1 и следствие 7.1 из п. 7.1 (главы II) неприменимы, если на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1-2m$ содержится собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Поэтому в этом параграфе мы будем пользоваться результатами из пп. 7.2 и 7.3 (главы II). При этом на поведение функций $f_{i\mu}$ и коэффициентов нелокальных операторов вблизи множества (орбиты) $\mathcal{K}$ будут наложены определенные условия согласования.

Пусть $\tau_{j\sigma}$ и $D^\beta_{\tau_{j\sigma}}$ те же, что в п. 5.2 (главы II). Рассмотрим операторы

$$D^{2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}}\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U \equiv D^{2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}}\left(\sum_{k,s}(B_{j\sigma\mu ks}(D)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)\right).$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, запишем

$$D_{\tau_{j\sigma}}^{2m-m_{j\sigma\mu}-1}\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U \equiv \sum_{k,s}(\hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y). \tag{19.1}$$

где $\hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)$ — однородные дифференциальные операторы порядка $2m-1$ с постоянными коэффициентами. Формально заменяя в (19.1) нелокальные операторы на соответствующие локальные, получим операторы

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)U \equiv \sum_{k,s}\hat{B}_{j\sigma\mu ks}(D)U_k(y) \tag{19.2}$$

(которые совпадают с операторами в (7.2) при $l=0$).

В п. 7.2 (главы II) показано, что при выполнении условия 19.1 система операторов (19.2) линейно зависима. Обозначим через

$$\{\hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D)\} \tag{19.3}$$

максимальную линейно независимую подсистему системы (19.2). Тогда любой оператор $\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D)$, не вошедший в систему (19.3), представим в виде

$$\hat{\mathcal{B}}_{j\sigma\mu}(D) = \sum_{j',\sigma',\mu'}\beta_{j\sigma\mu}^{j'\sigma'\mu'}\hat{\mathcal{B}}_{j'\sigma'\mu'}(D), \tag{19.4}$$

где $\beta_{j\sigma\mu}^{j'\sigma'\mu'}$ — некоторые константы.

Введем понятие условия согласования. Пусть $\{Z_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^{\varepsilon})$ — вектор, состоящий из функций, каждая из которых определена на своем интервале $\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon}$. Рассмотрим функции

$$Z_{j\sigma\mu}^0(r) = Z_{j\sigma\mu}(y)|_{y=(r\cos\omega_j,\, r(-1)^{\sigma}\sin\omega_j)}.$$

Каждая из функций $Z_{j\sigma\mu}^0$ принадлежит $W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(0,\varepsilon)$.

Определение 19.1. Пусть $\beta_{j\sigma\mu}^{j'\sigma'\mu'}$ — константы из соотношений (19.4). Если соотношения

$$\int\limits_0^{\varepsilon} r^{-1}\left|D_r^{2m-m_{j\sigma\mu}-1}Z_{j\sigma\mu}^0 - \sum_{j',\sigma',\mu'}\beta_{j\sigma\mu}^{j'\sigma'\mu'}D_r^{2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1}Z_{j'\sigma'\mu'}^0\right|^2 dr < \infty \tag{19.5}$$

выполнены для всех индексов j,σ,μ, отвечающих операторам из системы (19.2), не вошедшим в систему (19.3), то будем говорить, что *функции $Z_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования* (19.5).

Замечание 19.1. Соотношение $\{Z_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$ достаточно (но не необходимо) для того, чтобы функции $Z_{j\sigma\mu}$ удовлетворяли соотношениям (19.5). Это следует из леммы 4.8 в [36].

Замечание 19.2. В терминах главы II условие согласование имеет вид

$$D_{\tau_{j\sigma}}^{2m-m_{j\sigma\mu}-1}\mathbf{Z}_{j\sigma\mu} - \sum_{j',\sigma',\mu'} \beta_{j\sigma\mu}^{j'\sigma'\mu'} D_{\tau_{j'\sigma'}}^{2m-m_{j'\sigma'\mu'}-1}\mathbf{Z}_{j'\sigma'\mu'} \in H_0^1(\mathbb{R}^2), \tag{19.6}$$

где $\mathbf{Z}_{j\sigma\mu} \in W^{2m-m_{j\sigma\mu}}(\mathbb{R}^2)$ — продолжение функции $Z_{j\sigma\mu}$ в $\mathbb{R}^2$, имеющее компактный носитель (соответствующие теоремы о продолжении функций, заданных в областях с угловыми точками, можно найти в [67]). Нетрудно показать, что соотношения (19.5) эквивалентны соотношениям (19.6).

Покажем, что следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы некоторое фиксированное обобщенное решение u принадлежало $W^{2m}(G)$.

Условие 19.2. *Пусть u — обобщенное решение задачи* (18.1), (18.2), *$\psi_{j\sigma\mu}$ — правые части в нелокальных условиях* (18.5) *и W — вектор-полином из леммы* 18.1. *Тогда функции $\psi_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)W$ удовлетворяют условию согласования* (19.5).

Замечание 19.3. 1. Выполнение условия 19.2 зависит, в частности, от поведения функции $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u$ вблизи множества (орбиты) $\mathcal{K}$. В силу (6.5) (при $l = 0$) значений функции $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u$ вблизи множества $\mathcal{K}$ зависят от значений функции u в $G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})}$. Поэтому гладкость обобщенного решения u вблизи множества $\mathcal{K}$ зависит от поведения u вне множества $\mathcal{K}$.

2. Поясним, каким образом выполнение условия 19.2 зависит от поведения функций $u(y), f_{i\mu}(y), (\mathbf{B}_{i\mu}^2 u)(y)$ и коэффициентов операторов $\mathbf{B}_{i\mu}^0$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ вблизи множества $\mathcal{K}$. С одной стороны, вектор W из 18.1 определяется поведением решения $u(y)$ вблизи множества $\mathcal{K}$. С другой стороны, коэффициенты операторов $\mathbf{B}_{i\mu}^0$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ в точках множества $\mathcal{K}$, а также операторы $\mathcal{G}_{j\sigma ks}$ определяют константы $\beta_{j\sigma\mu}^{j'\sigma'\mu'}$ из (19.4) и, следовательно, из (19.5). Наконец, производные функций $f_{i\mu}(y), (\mathbf{B}_{i\mu}^2 u)(y)$ и коэффициентов операторов $\mathbf{B}_{i\mu}^0$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ вблизи множества $\mathcal{K}$ должны быть согласованы таким образом, чтобы модули соответствующих линейных комбинаций производных (порядка $2m - m_{j\sigma\mu} - 1$) от функций $\psi_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)W$ были интегрируемы в квадрате (с весом r^{-1}) вблизи начала координат.

Теорема 19.1. *Пусть выполнены условия* 19.1 *и* 18.2–18.4*, и пусть* u *— обобщенное решение задачи* (18.1), (18.2) *с правой частью* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^0(G, \partial G)$. *Тогда* $u \in W^{2m}(G)$ *в том и только том случае, если выполнено условие* 19.2.

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть $u \in W^{2m}(G)$. Рассмотрим функцию $U = (U_1, \ldots, U_N)$, соответствующую множеству (орбите) $\mathcal{K}$. Очевидно, $U \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$. По лемме 18.1 $U = W + U'$, где $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$, $0 < \delta < 1$. Так как, кроме того, $U' = U - W \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$, то по теореме вложения Соболева $D^\alpha U'|_{y=0} = 0$, $|\alpha| \leqslant 2m - 2$. Отсюда и из леммы 7.2 вытекает, что функции $\psi_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu} W = \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U'$ удовлетворяют условию согласования (19.5).

2. *Достаточность.* Пусть выполнено условие 19.2. Из (18.13), леммы 7.4 и следствия 7.2 вытекает существование такой функции $V \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K) \cap \mathcal{W}^{2m}(K)$ (δ то же, что в лемме 18.1), что

$$\begin{gathered} \{\mathbf{P}_j(y, D)(U'_j - V_j)\} \in \mathcal{H}^0_0(K^\varepsilon), \\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)(U' - V)\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_0(\gamma^\varepsilon). \end{gathered} \tag{19.7}$$

В силу (19.7) и того факта, что полоса $1 - 2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1 - 2m + \delta$ содержит только правильное собственное значение $i(1 - 2m)$ оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ мы можем применить лемму 7.5, согласно которой все производные порядка $2m$ от функции $U' - V$ принадлежат $\mathcal{W}^0(K^\varepsilon)$. Отсюда и из соотношений

$$U' - V \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon) \subset \mathcal{H}^{2m-1}_0(K^\varepsilon) \subset \mathcal{W}^{2m-1}(K^\varepsilon)$$

получаем $U' - V \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$. Объединяя это соотношение с леммой 18.1, завершаем доказательство доказательство в части достаточности. □

Отметим, что теорема 19.1 лишь тогда позволяет определить, будет ли *заданное фиксированное* решение u гладким вблизи множества $\mathcal{K}$, когда мы знаем асимптотику решения u вида (18.12) вблизи множества $\mathcal{K}$ (т. е. имеем вектор-полином W). Теорема 19.1 показывает в принципе, какие факторы влияют на гладкость обобщенных решений. Ниже будут получены также необходимые и достаточные условия того, что *любое* обобщенное решение принадлежит $W^{2m}(G)$.

19.2. Задача с неоднородными нелокальными условиями

В этом пункте сформулируем необходимые и достаточные условия сохранения гладкости обобщенных решений. Вначале покажем, что правые части $f_{i\mu}$

в нелокальных условиях (18.2) не могут быть произвольными функциями из $W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, а должны удовлетворять условию согласования.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ множество, состоящее из функций $\{f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ таких, что функции $f_{j\sigma\mu}$ (см. (18.3)) удовлетворяет условию согласования (19.5). Введем также пространство

$$\tilde{\mathcal{S}}^0(G, \partial G) = L_2(G) \times \tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G).$$

Очевидно,

$$\mathcal{S}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \cap \tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) = \hat{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \subset \\ \subset \tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G) \subset \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G),$$

$$\mathcal{S}^0(G, \partial G) \cap \tilde{\mathcal{S}}^0(G, \partial G) = \hat{\mathcal{S}}^0(G, \partial G) \subset \tilde{\mathcal{S}}^0(G, \partial G) \subset \mathcal{W}^0(G, \partial G).$$

Гладкость обобщенных решений задачи (18.1), (18.2) может нарушаться, если правые части в нелокальных условиях (18.2) не удовлетворяют условию согласования.

Теорема 19.2. *Пусть выполнены условия* 19.1 *и* 18.2–18.4. *Тогда существуют такие функции* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^0(G, \partial G)$, $\{f_{i\mu}\} \notin \tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$, *и* $u \in W^{2m-1}(G)$, *что* u — *обобщенное решение задачи* (18.1), (18.2) *с правой частью* $\{f_0, f_{i\mu}\}$ *и* $u \notin W^{2m}(G)$.

Докажем предварительно один вспомогательный результат. Положим

$$\varepsilon' = d_1 \min(\varepsilon, \varkappa_2), \tag{19.8}$$

где d_1 определено в (6.15).

Лемма 19.1. *Предположим, что выполнено условие* 19.1. *Пусть функция* $\{Z_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$ *такова, что* $\operatorname{supp}\{Z_{j\sigma\mu}\} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(0)$, $D^\beta_{\tau_{j\sigma}} Z_{j\sigma\mu}|_{y=0} = 0$, $\beta \leqslant 2m - m_{j\sigma\mu} - 2$, *и функции* $Z_{j\sigma\mu}$ *не удовлетворяют условию согласования* (19.5). *Тогда существует функция* $U \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K) \subset \mathcal{W}^{2m-1}(K)$, $\delta > 0$ *произвольно, такая, что* $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$, $U \notin \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$ *и* U *удовлетворяет соотношениям*

$$\{\mathbf{P}_j(y, D)U_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \qquad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U - Z_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_0(\gamma^\varepsilon). \tag{19.9}$$

Доказательство. В силу леммы 5.1 существует такая последовательность функций $\{Z^n_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\operatorname{supp} Z^n_{j\sigma\mu} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(0)$, $Z^n_{j\sigma\mu}$ равны

нулю вблизи начала координат (и, значит, удовлетворяют условию согласования (19.5)) и $\{Z^n_{j\sigma\mu}\} \to \{Z_{j\sigma\mu}\}$ в $W^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$. Учитывая лемму 5.4, видим также, что $\{Z^n_{j\sigma\mu}\} \to \{Z_{j\sigma\mu}\}$ в $H^{2m-\mathbf{m}-1/2}_\delta(\gamma)$, $\delta > 0$ произвольно. Теперь применим лемму 7.6, согласно которой существует последовательность $V^n = (V^n_1, \dots, V^n_N)$, удовлетворяющая следующим условиям: $V^n \in \mathcal{W}^{2m}(K^d) \cap \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^d)$ для любого $d > 0$,

$$\mathcal{P}_j(D)V^n_j = 0 \quad (y \in K_j), \qquad \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V^n = Z^n_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma}) \tag{19.10}$$

и последовательность V^n сходится к функции $V \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^d)$ в $\mathcal{H}^{2m}_\delta(K^d)$ для любого $d > 0$. Переходя к пределу в (19.10) (соответственно в пространствах $\mathcal{H}^0_\delta(K^d)$ и $\mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_\delta(K^d)$), получаем

$$\mathcal{P}_j(D)V_j = 0 \quad (y \in K_j), \qquad \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V = Z_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma}). \tag{19.11}$$

Рассмотрим срезающую функцию $\xi \in C^\infty_0(\mathcal{O}_{\varepsilon'}(0))$, равную единице вблизи начала координат. Положим $U = \xi V$. Очевидно, $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$ и

$$U \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K) \subset \mathcal{W}^{2m-1}(K).$$

2. Покажем, что функция U искомая. Действительно, используя формулу Лейбница, соотношения (19.11) и леммы 5.5 и 5.6, выводим (19.9).

Осталось показать, что $U \notin \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$. Предположим противное: пусть $U \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$. Тогда в силу теоремы вложения Соболева и принадлежности $U \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$ ($\delta > 0$ произвольно) имеем $D^\alpha U|_{y=0} = 0$, $|\alpha| \leqslant 2m-2$. Отсюда и из леммы 7.2 заключаем, что функции $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U$ удовлетворяют условию согласования (19.5). Однако в таком случае функции $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U - Z_{j\sigma\mu}$ не удовлетворяют условию согласования (19.5). Это противоречим (19.9) (см. замечание 19.1). □

Доказательство теоремы 19.2. 1. Построим обобщенное решение $u \notin W^{2m}(G)$ с носителем вблизи множества $\mathcal{K}$; в этом случае $\mathbf{B}^2_{i\mu}u = 0$ в силу (6.5) (при $l = 0$).

В доказательстве леммы 7.3 было показано, что существует такая функция $\{Z_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma)$, что $\operatorname{supp} Z_{j\sigma\mu} \subset \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(0)$, $D^\beta_{\tau_{j\sigma}} Z_{j\sigma\mu}|_{y=0} = 0$, $\beta \leqslant 2m - m_{j\sigma\mu} - 2$, и функции $Z_{j\sigma\mu}$ не удовлетворяют условию согласования (19.5). По лемме 19.1 существует такая функция $U \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K) \subset \mathcal{W}^{2m}(K)$, что $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$, $U \notin \mathcal{W}^{2m}(K)$ и U удовлетворяет соотношениям (19.9). Следовательно,

$$\{\mathbf{P}_j(y, D)U_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \qquad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$$

и функции $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U$ не удовлетворяют условию согласования (19.5).

2. Введем функцию $u(y)$ такую, что $u(y) = U_j(y'(y))$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon'}(g_j)$ и $u(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathcal{K})$, где $y' \mapsto y(g_j)$ — замена переменных, обратная к замене $y \mapsto y'(g_j)$ из п. 6.1 (главы II). Поскольку $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$, то $\mathbf{B}^2_{i\mu}u = 0$. Следовательно, $u(y)$ — искомое обобщенное решение задачи (18.1), (18.2). $\square$

Теорема 19.2 показывает, что если мы хотим, чтобы *любое* обобщенное решение задачи (18.1), (18.2) было гладким, необходимо брать правые части $\{f_0, f_{i\mu}\}$ из пространства $\tilde{\mathcal{S}}^0(G,\partial G)$.

Пусть v — произвольная функция из $W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$. Рассмотрим снова замену переменных $y \mapsto y'(g_j)$ из п. 6.1 (главы II) и введем функции

$$B^v_{j\sigma\mu}(y') = (\mathbf{B}^2_{i\mu}v)(y(y')), \quad y' \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma} \tag{19.12}$$

(ср. функции (18.3)). Докажем, что следующее условие необходимо и достаточно для того, чтобы любое обобщенное решение было гладким.

Условие 19.3. 1. *Для любой $v \in W^{2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$ функции $B^v_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования* (19.5).

2. *Для любого вектор-полинома W степени $2m-2$ функции $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)W$ удовлетворяют условию согласования* (19.5).

Отметим, что выполнение условия 19.3, в отличие от условия 19.2, не зависит от конкретного обобщенного решения, а зависит только от операторов $\mathbf{B}^0_{i\mu}$, $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ и $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ и от геометрии области G вблизи множества $\mathcal{K}$. Это вполне естественно, так как в этом пункте мы изучаем гладкость *всех* обобщенных решений (тогда как в п. 19.1 изучали гладкость фиксированного решения).

Теорема 19.3. *Пусть выполнены условия* 19.1 *и* 18.2–18.4. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполнено условие* 19.3 *и u — обобщенное решение задачи* (18.1), (18.2) *с правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^0(G,\partial G)$, то $u \in W^{2m}(G)$.*

2. *Если условие* 19.3 *нарушено, то существует правая часть $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^0(G,\partial G)$ и обобщенное решение u задачи* (18.1), (18.2), *такие, что $u \notin W^{2m}(G)$.*

Доказательство. 1. *Достаточность.* Пусть выполнено условие 19.3, и пусть u — произвольное обобщенное решение задачи (18.1), (18.2) с правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^0(G, \partial G)$. В силу (13.21) имеем $u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$. Следовательно, по условию 19.3 функции $B^u_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования (19.5). Пусть W — вектор-полином степени $2m-2$ из леммы 18.1. Снова используя условие 19.3, видим, что функции $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W$ удовлетворяют условию согласования (19.5). Так как $\{f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$, то функции $f_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования (19.5). Следовательно, функции $\psi_{j\sigma\mu} = f_{j\sigma\mu} - B^u_{j\sigma\mu}$ и $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W$ удовлетворяют условию 19.2. Применяя теорему 19.1, получаем $u \in W^{2m}(G)$.

2. *Необходимость.* Пусть условие 19.3 нарушено. Тогда существуют функция $v \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$ и вектор-полином $W = (W_1, \dots, W_N)$ степени $2m-2$ такие, что функции $B^v_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}W$ не удовлетворяют условию согласования (19.5) (можно считать, что либо $v = 0, W \neq 0$, либо $v \neq 0, W = 0$). Продолжим функцию v в область G таким образом, чтобы $v(y) = 0$ при $y \in \mathcal{O}_{\varkappa_1/2}(\mathcal{K})$ и $v \in W^{2m}(G)$.

В силу леммы 5.3 существуют такие полиномы $f'_{j\sigma\mu}(r)$ степени $2m - m_{j\sigma\mu} - 2$ (если $m_{j\sigma\mu} = 2m-1$, то $f'_{j\sigma\mu}(r) \equiv 0$), что

$$\{B^v_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W - f'_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_\delta(\gamma^\varepsilon) \cap \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon),$$

где $\delta > 0$ произвольно. Следовательно,

$$D^\beta_{\tau_{j\sigma}}(B^v_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W - f'_{j\sigma\mu})(0) = 0, \qquad \beta \leqslant 2m - m_{j\sigma\mu} - 2.$$

Так как $D^{2m-m_{j\sigma\mu}-1}_r f'_{j\sigma\mu}(r) \equiv 0$, то функции $f'_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования (19.5). Тогда функции $B^v_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W - f'_{j\sigma\mu}$ не удовлетворяют условию согласования (19.5).

В силу леммы 19.1 существует такая функция $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K) \subset \mathcal{W}^{2m-1}(K)$, что $\operatorname{supp} U' \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$, $U' \notin \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$ и

$$\{\mathbf{P}_j(y, D)U'_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \tag{19.13}$$

$$\{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U' - (f'_{j\sigma\mu} - B^v_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W))\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_0(\gamma^\varepsilon).$$

Последнее соотношение можно также записать в виде

$$\{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)(U' + W) + B^v_{j\sigma\mu} - f'_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_0(\gamma^\varepsilon). \tag{19.14}$$

Введем функцию $u'(y)$ такую, что $u'(y) = U'_j(y'(y)) + \xi_j(y)W_j$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon'}(g_j)$ и $u'(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathcal{K})$, где $y' \mapsto y(g_j)$ — замена переменных, обратная к замене $y \mapsto y'(g_j)$ из п. 6.1 (главы II), $\xi_j \in C_0^\infty(O_{\varepsilon'}(g_j))$, $\xi_j(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon'/2}(g_j)$ и ε' определено в (19.8). Докажем, что функция $u = u' + v$ искомая. Очевидно, $u \in W^{2m-1}(G)$, $u \notin W^{2m}(G)$ и u удовлетворяет соотношениям (13.21). Из принадлежности $v \in W^{2m}(G)$ и соотношений (19.13) имеем

$$\mathbf{P}(y, D)u \in L_2(G).$$

Рассмотрим функции $f_{i\mu} = \mathbf{B}^0_{i\mu}u + \mathbf{B}^1_{i\mu}u + \mathbf{B}^2_{i\mu}u$. Из принадлежности $v \in W^{2m}(G)$, соотношений (13.21) и неравенства (6.5) (при $l = 0$) вытекает, что $f_{i\mu} \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}\big(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})}\big)$ при любом $\delta > 0$. Рассмотрим поведение $f_{i\mu}$ вблизи множества $\mathcal{K}$. Заметим, что $\mathbf{B}^2_{i\mu}u' = 0$ в силу (6.5) (при $l = 0$). Кроме того, $\mathbf{B}^0_{i\mu}v + \mathbf{B}^1_{i\mu}v = 0$ при $y \in \mathcal{O}_{\varkappa_1/d_2}(\mathcal{K})$. Следовательно,

$$f_{i\mu} = \mathbf{B}^0_{i\mu}u' + \mathbf{B}^1_{i\mu}u' + \mathbf{B}^2_{i\mu}v \quad (y \in \mathcal{O}_{\varkappa_1/d_2}(\mathcal{K})). \tag{19.15}$$

Введем функции $f_{j\sigma\mu}(y') = f_{i\mu}(y(y'))$, где $y \mapsto y'(g_j)$ — замена переменных из п. 6.1 (главы II). Из (19.15) и (19.14) вытекает, что $\{f_{j\sigma\mu} - f'_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$. Следовательно, $\{f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$ и функции $f_{j\sigma\mu}$ (так же как и $f'_{j\sigma\mu}$) удовлетворяют условию согласования (19.5). Значит, $\{f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$.

□

19.3. Задача с регулярными нелокальными условиями

Определение 19.2. Будем говорить, что функция $v \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$ *допустимая*, если существует такой вектор-полином $W = (W_1, \dots, W_N)$ степени $2m - 2$, что

$$D^\beta_{\tau_{j\sigma}}(B^v_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W)|_{y=0} = 0,$$
$$\beta \leqslant 2m - m_{j\sigma\mu} - 2,\ j = 1, \dots, N,\ \sigma = 1, 2,\ \mu = 1, \dots, m. \tag{19.16}$$

Любой вектор-полином W степени $2m - 2$, удовлетворяющий соотношениям (19.16), будем называть *допустимым вектор-полиномом, соответствующим функции v*.

Замечание 19.4. Множество допустимых функций линейно. Очевидно, функция $v = 0$ допустимая и ей соответствует допустимый вектор $W = 0$.

Множество допустимых вектор-полиномов, соответствующих допустимой функции v, образует аффинное пространство вида

$$\Big\{W+\tilde{W} : \tilde{W} \text{ есть вектор-полином степени } 2m-2, \\ D^{\beta}_{\tau_{j\sigma}}\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)\tilde{W}|_{y=0}=0,\ \beta\leqslant 2m-m_{j\sigma\mu}-2\Big\}, \tag{19.17}$$

где W — фиксированный допустимый вектор-полином, соответствующий v.

Определение 19.3. Правые части $f_{i\mu}$ в нелокальных условиях (18.2) назовем *регулярными*, если

1. выполнено условие 18.1 и $\{f_{i\mu}\}\in\mathcal{S}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ или
2. выполнено условие 19.1 и $\{f_{i\mu}\}\in\hat{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$.

Правые части $\psi_{j\sigma\mu}$ в нелокальных условиях (18.5) назовем *регулярными*, если

1. выполнено условие 18.1 и $\{\psi_{j\sigma\mu}\}\in\mathcal{S}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^{\varepsilon})$ или
2. выполнено условие 19.1 и $\{\psi_{j\sigma\mu}\}\in\hat{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^{\varepsilon})$.

Таким образом, регулярные правые части $f_{i\mu}$ ($\psi_{j\sigma\mu}$) имеют ноль определенного порядка вблизи множества $\mathcal{K}$ (соответственно вблизи начала координат). В частности, правые части $\{f_{i\mu}\}\in\mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ и $\{\psi_{j\sigma\mu}\}\in\mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^{\varepsilon})$ регулярны в силу теоремы вложения Соболева и замечания 19.1.

Если правые части $f_{i\mu}$ в нелокальных условиях (18.2) регулярны, то будем также говорить, что правая часть $\{f_0, f_{i\mu}\}$ задачи (18.1), (18.2) *регулярна*.

В этом пункте мы докажем, что следующее условие является необходимым и достаточным для того, чтобы любое обобщенное решение задачи (18.1), (18.2) с регулярной правой частью $\{f_{i\mu}\}\in\hat{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ было гладким.

Условие 19.4. *Для любой допустимой функции v и любого допустимого вектор-полинома W (степени $2m-2$), соответствующего v, функции $B^{v}_{j\sigma\mu}+\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)W$ удовлетворяют условию согласования* (19.5).

Отметим, что условие 19.4 слабее условия 19.3.

Теорема 19.4. *Пусть выполнены условия* 19.1 *и* 18.2–18.4. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполнено условие* 19.4 *и функция* u *есть обобщенное решение задачи* (18.1), (18.2) *с регулярной правой частью* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \hat{\mathcal{S}}^0(G, \partial G)$, *то* $u \in W^{2m}(G)$.

2. *Если условие* 19.4 *нарушено, то существует правая часть* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_0^0(G, \partial G)$ *и обобщенное решение* u *задачи* (18.1), (18.2), *такие, что* $u \notin W^{2m}(G)$.

Доказательство. 1. *Достаточность.* Пусть выполнено условие 19.4 и u — обобщенное решение задачи (18.1), (18.2) с регулярной правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \hat{\mathcal{S}}^0(G, \partial G)$. В силу (13.21) $u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$.

Из условий на функции $f_{i\mu}$ вытекает, что правые части в нелокальных условиях (18.5) имеют вид

$$\psi_{j\sigma\mu} = f_{j\sigma\mu} - B^u_{j\sigma\mu}, \tag{19.18}$$

где $\{f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$,

$$D^\beta_{\tau_{j\sigma}} f_{j\sigma\mu}|_{y=0} = 0, \quad \beta \leqslant 2m - m_{j\sigma\mu} - 2, \tag{19.19}$$

и $f_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования (19.5).

Далее, пусть $U = W + U'$, где $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$ и W — функция и вектор-полином (степени $2m-2$) из леммы 18.1. Из (18.5) и (19.18) следует, что

$$\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U' = f_{j\sigma\mu} - (B^u_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W).$$

Так как $\{B^u_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W - f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$ и $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$, то

$$\{B^u_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W - f_{j\sigma\mu}\} = \\ = \{-\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U'\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_\delta(\gamma^\varepsilon) \cap \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon).$$

Отсюда и из (19.19) выводим

$$D^\beta_{\tau_{j\sigma}}(B^u_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W)|_{y=0} = 0, \quad \beta \leqslant 2m - m_{j\sigma\mu} - 2,$$

т. е. u — допустимая функция, W — допустимый вектор полином соответствующий u. Следовательно, в силу (19.18) и условия 19.4 выполнено условие 19.2. Отсюда и из теоремы 19.1 заключаем, что $u \in W^{2m}(G)$.

2. *Необходимость.* Пусть условие 19.4 нарушено. Тогда существует функция $v \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$ и вектор-полином $W = (W_1, \ldots, W_N)$ степени $2m-2$ такие, что

$$D^\beta_{\tau_{j\sigma}}(B^u_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W)|_{y=0} = 0, \quad \beta \leqslant 2m - m_{j\sigma\mu} - 2,$$

и функции $B^v_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W$ не удовлетворяют условию согласования (19.5).

Нам нужно получить функцию $u \in W^\ell(G)$, удовлетворяющую соотношениям (13.21) и такую, что $u \notin W^{2m}(G)$ и

$$\mathbf{P}(y, D)u \in L_2(G), \qquad \{\mathbf{B}^0_{i\mu}u + \mathbf{B}^1_{i\mu}u + \mathbf{B}^2_{i\mu}u\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G).$$

Для этого достаточно повторить доказательство утверждения 2 из теоремы 19.3, полагая в нем, что v — указанная выше функция, W — указанный выше полином и $f'_{j\sigma\mu}(y) \equiv 0$ (это возможно в силу соотношения $B^v_{j\sigma\mu} + \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W \in \mathcal{H}_\delta^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon) \cap \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$, где $\delta > 0$ произвольно). □

19.4. Однородные нелокальные условия. Нарушение гладкости обобщенных решений

В этом пункте мы рассмотрим некоторые ситуации, в которых нарушение условия 19.4 приводит к нарушению гладкости обобщенных решений даже в случае *однородных* нелокальных условий.

При изучении однородных нелокальных условий, так же как и в § 11 (главы III) и § 16 (главы IV), будем считать, что «локальные» операторы образуют нормальную систему (см. например, [39, гл. 2, § 1]).

Условие 19.5. *Система операторов* $\{\mathbf{B}^0_{i\mu}\}_{\mu=1}^m$ *нормальна на* $\overline{\Gamma_i}$, $i = 1, \dots, N$.

Лемма 19.2. *При выполнении условия* 19.5 *справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть* $\{f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$. *Тогда существует функция* $u_0 \in H_0^{2m}(G)$ *такая, что*

$$\operatorname{supp} u_0 \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}),$$
$$\mathbf{B}^0_{i\mu}u_0 = f_{i\mu}(y), \quad y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K}),$$
$$\mathbf{B}^1_{i\mu}u_0 = \mathbf{B}^2_{i\mu}u_0 = 0. \tag{19.20}$$

2. *Пусть* $\{f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ *и* $\operatorname{supp} f_{i\mu} \subset \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$. *Тогда существует функция* $u_0 \in H_0^{2m}(G)$ *такая, что*

$$\operatorname{supp} u_0 \subset \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K}),$$
$$\mathbf{B}^0_{i\mu} = f_{i\mu}(y), \quad y \in \Gamma_i,$$

и имеют место соотношения (19.20).

Доказательство. 1. Используя лемму 11.1, разбиение единицы и соответствующие срезающие функции с носителем в $\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$, построим такую функцию $u_0 \in H_0^{2m}(G)$, что

$$\operatorname{supp} u_0 \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}), \tag{19.21}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}^0 u_0 = f_{i\mu}(y), \quad y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K}), \tag{19.22}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}^1 u_0 = 0.$$

В силу (19.21) и (6.5) (при $l = 0$) имеем $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u_0 = 0$. Следовательно, u_0 — искомая функция.

2. Если $\operatorname{supp} f_{i\mu} \subset \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$, то можем считать, что $\operatorname{supp} u_0 \subset \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$. В этом случае равенства (19.22) справедливы при $y \in \Gamma_i$. □

Вначале рассмотрим нарушение гладкости в том случае, когда правые части в нелокальных условиях равны нулю вблизи множества $\mathcal{K}$.

Следствие 19.1. *Пусть выполнены условия* 19.1, 19.5 *и* 18.2–18.4. *Если условие* 19.4 *нарушено, то существует правая часть* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_0^0(G, \partial G)$, *где* $f_{i\mu}(y) = 0$ *при* $y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$, *и обобщенное решение* u *задачи* (18.1), (18.2) *такие, что* $u \notin W^{2m}(G)$.

Доказательство. Доказательство этого следствия вытекает из утверждения 2 в теореме 19.4, утверждения 1 в лемме 19.2 и вложения $H_0^{2m}(G) \subset W^{2m}(G)$. □

Теперь изучим нарушение гладкости в случае, когда правые части в нелокальных условиях, равны нулю на всей границе области.

Из утверждения 2 в теоремы 19.4 получаем следующее следствие.

Следствие 19.2. *Пусть выполнены условия* 19.1 *и* 18.2–18.4, *но нарушено условие* 19.4. *Пусть* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_0^0(G, \partial G)$ — *функция из утверждения* 2 *теоремы* 19.4, *и пусть существует такая функция* $u_0 \in W^{2m}(G)$, *что*

$$\mathbf{B}_{i\mu}^0 u_0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u_0 + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u_0 = f_{i\mu}(y), \quad y \in \Gamma_i. \tag{19.23}$$

Тогда найдется правая часть $\{f_0, 0\}$, *где* $f_0 \in L_2(G)$, *и обобщенное решение* u *задачи* (18.1), (18.2) *такие, что* $u \notin W^{2m}(G)$.

Это следствие не дает в общем случае конструктивного алгоритма построения функции u_0, удовлетворяющей соотношениям (19.23). Однако мы можем доказать существование такой функции в некоторых частных случаях, описанных ниже в следствиях 19.3 и 19.4 (см. также п. 22.2).

Следствие 19.3. *Предположим, что операторы* $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ *удовлетворяют при некотором* $\rho > 0$ *условию*

$$\|\mathbf{B}^2_{i\mu} v\|_{W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c\|v\|_{W^{2m}(G_\rho)} \qquad \forall v \in W^{2m}(G_\rho). \tag{19.24}$$

Пусть выполнены условия 19.1, 19.5 *и* 18.2–18.4, *но нарушено условие* 19.4. *Тогда справедливо заключение следствия* 19.2.

Доказательство вытекает из следствия 19.2, вложения $H^{2m}_0(G) \subset W^{2m}(G)$ и следующей леммы.

Лемма 19.3. *Предположим, что выполнено условие* 19.5. *Пусть операторы* $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ *удовлетворяют условию* (19.24), *и пусть* $\{f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_0(\partial G)$. *Тогда существует функция* $u_0 \in H^{2m}_0(G)$, *удовлетворяющая* (19.23).

Доказательство. Используя лемму 11.1 и разбиение единицы, построим такую функцию $u_0 \in H^{2m}_0(G)$, что

$$\operatorname{supp} u_0 \subset \overline{G} \setminus \overline{G_\rho}, \tag{19.25}$$

$$\mathbf{B}^0_{i\mu} u_0 = f_{i\mu}, \qquad \mathbf{B}^1_{i\mu} u_0 = 0.$$

В силу (19.25) и (19.24) имеем $\mathbf{B}^2_{i\mu} u_0 = 0$. Следовательно, u_0 удовлетворяет (19.23). □

Замечание 19.5. Условие (19.24) (которое является более строгим, чем условие 6.4) означает, что операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ *соответствуют нелокальным членам с носителем внутри области* G.

Следствие 19.4. *Пусть выполнены условия* 19.1, 19.5 *и* 18.2–18.4. *Предположим, что условие* 19.4 *нарушается для такой допустимой функции* v, *что*

$$\operatorname{supp}(\mathbf{B}^0_{i\mu} v + \mathbf{B}^1_{i\mu} v + \mathbf{B}^2_{i\mu} v) \subset \Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K}). \tag{19.26}$$

Тогда справедливо заключение следствия 19.2.

Доказательство. Если $\operatorname{supp}(\mathbf{B}^0_{i\mu} v + \mathbf{B}^1_{i\mu} v + \mathbf{B}^2_{i\mu} v) \subset \Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$, то функция

$$\{f_{i\mu}\} = \{\mathbf{B}^0_{i\mu} u + \mathbf{B}^1_{i\mu} u + \mathbf{B}^2_{i\mu} u\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_0(\partial G),$$

построенная в доказательстве утверждения 2 теоремы 19.4 (см. также доказательство утверждения 2 теоремы 19.3), имеет носитель, сосредоточенный в $\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$. Следовательно, применяя утверждение 2 леммы 19.2, получим функцию u_0, удовлетворяющую (19.23). Применяя следствие 19.2, завершаем доказательство. □

20. Нелокальные условия специального вида. Регулярные и нулевые правые части

В этом параграфе мы покажем, что в некоторых случаях *гладкость обобщенных решений задачи* (18.1), (18.2) *сохраняется вне зависимости от выполнения условий* 18.3 *и* 18.4, если ограничиться рассмотрением регулярных (см. определение 19.3) или, в частности, нулевых правых частей в нелокальных условиях. Если же правые части нерегулярны (и $\ell \leqslant 2m-2$), то условия 18.3 и 18.4 необходимы для сохранения гладкости обобщенных решений (см. теорему 21.2 в п. 21.2). Очевидно, если $\ell = 2m-1$, то условия 18.3 и 18.4 не возникают; в этом случае результаты настоящего параграфа следуют из результатов предыдущих параграфов.

20.1. Нелокальные условия специального вида. Вспомогательный результат

Итак, предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих двух условий.

Условие 20.1. 1. $\ell \leqslant 2m-2$;

2. $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D) = \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)$ *при* $y \in \gamma^{\varepsilon}_{j\sigma}$;

3. *множество* Λ *содержит только правильные собственные значения оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Часть 2 в условии 20.1 означает, что операторы $B_{i\mu s}(y,D)$ однородны и имеют постоянные коэффициенты вблизи множества $\mathcal{K}$.

Условие 20.2. 1. $\ell \leqslant 2m-2$;

2. *если* $\ell \geqslant 1$, Q — *однородный полином степени не выше* $\ell-1$ *и*

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)Q|_{\gamma_{j\sigma}} = 0$$

при всех j,σ,μ, *то* $Q=0$;

3. *множество* Λ *пусто.*

Замечание 20.1. Часть 2 в условии 20.1 выполнена, например, в случае «локальной» задачи Дирихле. Если при этом обобщенные решения ищутся в пространстве $W^{\ell}(G)$ при $\ell \leqslant m$, то выполнена также часть 2 в условии 20.2. Таким

образом, результаты этого параграфа обобщают результаты В. А. Кондратьева [36, § 5].

Наконец, предположим, что абстрактные нелокальные операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ «имеют ноль соответствующего порядка» в точках множества $\mathcal{K}$:

Условие 20.3. *$D^\beta_{\tau_{j\sigma}} B^v_{j\sigma\mu}|_{y=0} = 0$, $\beta \leqslant 2m - m_{j\sigma\mu} - 2$, для любой функции $v \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$, где $B^v_{j\sigma\mu}(y)$ — функции, определенные в* (19.12) (*если $m_{j\sigma\mu} = 2m - 1$, то соответствующие соотношения отсутствуют*).

Вначале докажем следующий аналог леммы 18.1.

Лемма 20.1. *Пусть выполнено условие* 20.1 *или* 20.2. *Пусть $U \in \mathcal{W}^\ell(K^\varepsilon)$ — решение задачи* (18.4), (18.5) *с правой частью $\{f_j, \psi_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{S}^0(K^\varepsilon, \gamma^\varepsilon)$.*

Тогда

$$U = W + U', \tag{20.1}$$

где $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$ для любого $\delta > 0$, $W = (W_1, \dots, W_N)$ — такой вектор полином степени $2m - 2$, что

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D) W|_{\gamma_{j\sigma}} = 0, \tag{20.2}$$

если выполнено условие 20.1, *и $W = 0$, если выполнено условие* 20.2.

Доказательство. 1. Так как $\{\psi_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{S}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$, то из леммы 5.4 вытекает, что $\{\psi_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_\delta(\gamma^\varepsilon)$ при всех $\delta > 0$. В частности, отсюда и из вложения $\mathcal{W}^0(K^\varepsilon) \subset \mathcal{H}^0_\delta(K^\varepsilon)$ (при любом $\delta > 0$) следует, что

$$\{\mathbf{P}_j(y, D) U_j\} \in \mathcal{H}^0_\delta(K^\varepsilon), \qquad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D) U\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_\delta(\gamma^\varepsilon) \qquad \forall \delta > 0. \tag{20.3}$$

Рассмотрим такое число $\delta > 0$, при котором полосы

$$1 - \delta \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 1, \quad -\delta \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 0, \quad \dots, \quad 1 - \ell - \delta \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 1 - \ell \tag{20.4}$$

не содержат собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ (существование такого δ гарантируется леммой 6.1).

Из (20.3), соотношения $U \in \mathcal{H}^{2m}_{2m}(K^\varepsilon)$ (см. (15.14)) и лемм 5.5 и 5.6 следует, что

$$\{\mathcal{P}_j(D) U_j\} \in \mathcal{H}^0_{2m-\delta}(K^\varepsilon), \qquad \{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(y, D) U\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m-\delta}(\gamma^\varepsilon). \tag{20.5}$$

Используя (20.5), теорему 2.2 в [13] и тот факт, что в полосе $1-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 1$ нет собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, получим

$$U \in \mathcal{H}^{2m}_{2m-\delta}(K^\varepsilon). \tag{20.6}$$

Из (20.3), (20.6) и лемм 5.5 и 5.6 вытекает, что

$$\{\mathcal{P}_j(D)U_j\} \in \mathcal{H}^0_{2m-1-\delta}(K^\varepsilon), \quad \{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m-1-\delta}(\gamma^\varepsilon) \quad \forall\delta>0. \tag{20.7}$$

Следовательно, используя (20.7) и применяя теорему 2.2 в [13], получаем

$$U = W^1 + U^1, \tag{20.8}$$

где

$$W^1 = \sum_{n=1}^{n_1}\sum_{l=0}^{l_1} r^{i\mu_n}(i\ln r)^l \varphi_{nl}(\omega),$$

$\{\mu_1,\dots,\mu_{n_1}\}$ — множество всех собственных значений из полосы $0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 1-\delta$ (на самом деле надо брать собственные значения из полосы $-\delta < \operatorname{Im}\lambda < 1-\delta$, но мы учли, что вторая полоса в (20.4) не содержит собственных значений), $\varphi_{nl} \in \mathcal{W}^{2m}(-\overline{\omega},\overline{\omega})$ и $U^1 \in \mathcal{H}^{2m}_{2m-1-\delta}(K^\varepsilon)$; более того,

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)W^1|_{\gamma_{j\sigma}} = 0. \tag{20.9}$$

Так как $\operatorname{Re} i\mu_n \leqslant 0$ и

$$W^1 = U - U^1 \in \mathcal{W}^1(K^\varepsilon),$$

то из леммы 4.20 в [36] следует, что W^1 — однородный вектор-полином степени 0 по переменным y_1, y_2 (т. е. постоянный вектор) и $W^1 = 0$, если выполнено условие 20.2.

2. Если $2m-2>0$, то сделаем следующий шаг. Используя (20.3), (20.8), лемму 5.5 и тот факт, что W^1 — вектор-полином (на данном шаге — постоянный вектор), получим

$$\begin{aligned}\{\mathcal{P}_j(D)U^1_j\} = \{\mathbf{P}_j(y,D)U_j\} - \{\mathbf{P}(y,D)W^1_j\} + \\ + \{(\mathcal{P}_j(D) - \mathbf{P}_j(y,D))U^1_j\} \in \mathcal{H}^0_{2m-2-\delta}(K^\varepsilon).\end{aligned} \tag{20.10}$$

Если выполнено условие 20.1, то используя равенство $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D) = \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)$ и соотношения (20.3), (20.8) и (20.9), получаем

$$\{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^1\} = \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m-2-\delta}(\gamma^\varepsilon). \tag{20.11}$$

Если выполнено условие 20.2, то $W^1 = 0$, т. е. $U = U^1$, и тогда имеем

$$\begin{aligned}\{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^1\} = \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U\}+ \\ + \{(\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D) - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D))U^1\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m-2-\delta}(\gamma^\varepsilon)\end{aligned} \tag{20.12}$$

в силу (20.3) и леммы 5.6.

Повторяя описанную процедуру конечное число раз, получим

$$U = W^1 + \dots + W^\ell + U^\ell,$$

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)W^1|_{\gamma_{j\sigma}} = \dots = \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)W^\ell|_{\gamma_{j\sigma}} = 0,$$

где W^s $(s = 1, \dots, \ell)$ — однородный вектор-полином степени $s-1$ и $U^\ell \in \mathcal{H}^{2m}_{2m-\ell-\delta}(K^\varepsilon)$. Более того, если выполнено условие 20.2, то $W^1 = \dots = W^\ell = 0$, и тогда

$$U = U^\ell \in \mathcal{H}^{2m}_{2m-\ell-\delta}(K^\varepsilon).$$

3. Аналогично (20.10)–(20.12) можно проверить, что функция U^ℓ удовлетворяет соотношениям

$$\{\mathcal{P}(D)U^\ell_j\} \in \mathcal{H}^0_{2m-\ell-1-\delta}(K^\varepsilon), \quad \{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)U^\ell\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_{2m-\ell-1-\delta}(\gamma^\varepsilon).$$

Повторяя описанную процедуру еще раз, получаем

$$U = W^1 + \dots + W^{2m-1} + U',$$

$$\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)W^{\ell+1}|_{\gamma_{j\sigma}} = \dots = \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)W^{2m-1}|_{\gamma_{j\sigma}} = 0,$$

где $W^{\ell+1}, \dots, W^{2m-1}$ — однородные вектор-полиномы степени $\ell, \dots, 2m-2$ соответственно, возникающие за счет того, что множество Λ содержит только правильные собственные значения, если выполнено условие 20.1, и $W^{\ell+1} = \dots = W^{2m-1} = 0$ в силу того факта, что $\Lambda = \varnothing$, если выполнено условие 20.2; наконец, $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$. □

20.2. Основные результаты

Докажем аналог теоремы 18.1.

Теорема 20.1. *Пусть выполнены условия* 18.1 *и* 20.3. *Предположим также, что выполнено условие* 20.1 *или* 20.2. *Пусть* u — *обобщенное решение задачи* (18.1), (18.2) *с регулярной правой частью* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{S}^0(G, \partial G)$. *Тогда* $u \in W^{2m}(G)$.

Доказательство. Так как правые части $f_{i\mu}$ регулярны и при этом выполнено условие 20.3, то $\psi_{j\sigma\mu} = f_{j\sigma\mu} - B^u_{j\sigma\mu} \in \mathcal{S}^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma^\varepsilon_{j\sigma})$ (т. е. правые части $\psi_{j\sigma\mu}$ регулярные). Следовательно, справедливо заключение леммы 20.1. В силу (18.4), (18.5), (20.1) и (20.2) функция $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$ из леммы 20.1 удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_j(y,D)U'_j\} = \{f_j - \mathbf{P}_j(y,D)W_j\} \in \mathcal{H}^0_0(K^\varepsilon), \\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U'\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_\delta(\gamma^\varepsilon) \quad \forall \delta > 0, \\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U'\} = \{\psi_{j\sigma\mu} - \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)W\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon), \end{aligned} \tag{20.13}$$

ср. (18.13). Аналогично доказательству леммы 18.2 мы выводим из (20.13), что $U' \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$; значит, $U \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$. Комбинируя это включение с (13.21), завершаем доказательство. □

Далее докажем аналог теоремы 19.4, в котором будет изучена ситуация, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1 - 2m$ содержит только правильное собственное значение $i(1-2m)$ оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Следующее условие есть аналог условия 19.4.

Условие 20.4. *Для любой функции $v \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$ функции $B^v_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования* (19.5).

Теорема 20.2. *Пусть выполнены условия* 19.1 *и* 20.3. *Предположим также, что выполнено условие* 20.1 *или* 20.2. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполнено условие* 20.4 *и u — обобщенное решение задачи* (18.1), (18.2) *с регулярной правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \hat{\mathcal{S}}^0(G, \partial G)$, то $u \in W^{2m}(G)$.*

2. *Если условие* 20.4 *нарушено, то существуют правая часть $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}^0_0(G, \partial G)$ и обобщенное решение u задачи* (18.1), (18.2) *такие, что $u \notin W^{2m}(G)$.*

Доказательство. 1. *Достаточность.* Пусть выполнено условие 20.4 и u — обобщенное решение задачи (18.1), (18.2) с регулярной правой частью $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \hat{\mathcal{S}}^0(G, \partial G)$. Так как правые части $f_{i\mu}$ регулярны, то в силу условия 20.3 $\psi_{j\sigma\mu} = f_{j\sigma\mu} - B^u_{j\sigma\mu} \in \mathcal{S}^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma^\varepsilon_{j\sigma})$. Следовательно, справедливо заключение леммы 20.1. Согласно (18.4), (18.5), (20.1) и (20.2) функция $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$ из леммы 20.1 удовлетворяет соотношениям (20.13).

Далее, заметим, что $\{f_{i\mu}\} \in \hat{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$, т. е. функции $f_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования (19.5). Функции $B^u_{j\sigma\mu}$ также удовлетворяют условию согласования (19.5) согласно условию 20.4. Следовательно, функции $\psi_{j\sigma\mu} = f_{j\sigma\mu} - B^u_{j\sigma\mu}$ удовлетворяют условию согласования (19.5).

Пусть W — вектор-полином из леммы 20.1. Покажем, что функции

$$\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W$$

удовлетворяют условию согласования (19.5). Действительно, если выполнено условие 20.1, то, используя (20.2), имеем

$$D^{2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}}\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W|_{\gamma^\varepsilon_{j\sigma}} = D^{2m-m_{j\sigma\mu}-1}_{\tau_{j\sigma}}\mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)W|_{\gamma^\varepsilon_{j\sigma}} = 0.$$

Если выполнено условие 20.2, то $W = 0$ по лемме 20.1. Таким образом, в обоих случаях функции $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)W$ удовлетворяют условию согласования (19.5).

Следовательно, используя включение $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K^\varepsilon)$ и соотношения (20.13), мы можем повторить рассуждения из доказательства теоремы 19.1 (в части достаточности). В результате получим $U' \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$; значит, $U \in \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$. Отсюда и из (13.21) имеем $u \in W^{2m}(G)$.

2. *Необходимость.* Пусть условие 20.4 нарушено. Тогда существует такая функция $v \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$, что функции $B^v_{j\sigma\mu}$ не удовлетворяют условию согласования (19.5). Продолжим функцию v в область G так, чтобы $v(y) = 0$ при $y \in \mathcal{O}_{\varkappa_1/2}(\mathcal{K})$ и $v \in W^{2m}(G)$.

Согласно лемме 19.1 существует такая функция $U' \in \mathcal{H}^{2m}_\delta(K) \subset \mathcal{W}^{2m-1}(K)$, что $\operatorname{supp} U' \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$, $U' \notin \mathcal{W}^{2m}(K^\varepsilon)$ и

$$\{\mathbf{P}_j(y, D)U'_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \tag{20.14}$$

$$\{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U' + B^v_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}^{2m-\mathbf{m}-1/2}_0(\gamma^\varepsilon). \tag{20.15}$$

Введем функцию $u'(y)$ такую, что $u'(y) = U'_j(y'(y))$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon'}(g_j)$ и $u'(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathcal{K})$, где $y' \mapsto y(g_j)$ — замена переменных, обратная к замене $y \mapsto y'(g_j)$ из п. 6.1 (главы II), $\xi_j \in C^\infty_0(O_{\varepsilon'}(g_j))$, $\xi_j(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon'/2}(g_j)$, а ε' задано в (19.8). Докажем, что функция $u = u' + v$ искомая. Очевидно, $u \in W^{2m-1}(G)$, $u \notin W^{2m}(G)$ и u удовлетворяет соотношениям (13.21). Из включения $v \in W^{2m}(G)$ и соотношений (20.14) вытекает, что

$$\mathbf{P}(y, D)u \in L_2(G).$$

Рассмотрим функции

$$f_{i\mu} = \mathbf{B}^0_{i\mu} u + \mathbf{B}^1_{i\mu} u + \mathbf{B}^2_{i\mu} u.$$

Из включения $v \in W^{2m}(G)$, соотношений (13.21) и неравенства (6.5) (при $l = 0$) следует, что $f_{i\mu} \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}\big(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})}\big)$ при всех $\delta > 0$. Рассмотрим поведение $f_{i\mu}$ вблизи множества $\mathcal{K}$. Заметим, что $\mathbf{B}^2_{i\mu} u' = 0$ в силу (6.5) (при $l = 0$). Далее, $\mathbf{B}^0_{i\mu} v + \mathbf{B}^1_{i\mu} v = 0$ при $y \in \mathcal{O}_{\varkappa_1/d_2}(\mathcal{K})$. Значит,

$$f_{i\mu} = \mathbf{B}^0_{i\mu} u' + \mathbf{B}^1_{i\mu} u' + \mathbf{B}^2_{i\mu} v \quad (y \in \mathcal{O}_{\varkappa_1/d_2}(\mathcal{K})). \tag{20.16}$$

Введем функции $f_{j\sigma\mu}(y') = f_{i\mu}(y(y'))$, где $y \mapsto y'(g_j)$ — замена переменных из п. 6.1 (главы II). Из (20.16) и (20.15) имеем $\{f_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon)$. Следовательно, $\{f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$. □

Замечание 20.2. Также имеют место аналоги следствий 19.1–19.4 (для их доказательства следует воспользоваться утверждением 2 теоремы 20.2 вместо утверждения 2 теоремы 19.4).

21. Нарушение гладкости обобщенных решений

21.1. Одновременное нарушение условий 18.1 и 19.1 или нарушение условия 18.2

Название данного пункта эквивалентно следующему условию.

Условие 21.1. *Полоса* $1-2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 1-\ell$ *содержит неправильное собственное значение оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Покажем, что в этом случае гладкость обобщенных решений может нарушаться для любых операторов $\mathbf{B}^2_{i\mu}$.

Теорема 21.1. 1. *Пусть выполнено условие* 21.1. *Тогда существует правая часть* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_0^0(G, \partial G)$ *и обобщенное решение* u *задачи* (18.1), (18.2) *такие, что* $u \notin W^{2m}(G)$.

2. *Пусть выполнены условия* 21.1 *и* 19.5. *Тогда утверждение* 1 *выполнено с* $f_{i\mu} = 0$.

Доказательство. 1. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — неправильное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, $1-2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda_0 < 1-\ell$. Рассмотрим функцию

$$V = r^{i\lambda_0} \sum_{l=0}^{l_0} \frac{1}{l!} (i \ln r)^l \varphi^{(l_0-l)}(\omega) \in \mathcal{W}^\ell(K^d) \quad \forall d > 0, \tag{21.1}$$

где $\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(\varkappa-1)}$ — собственный и присоединенные векторы (жорданова цепочка длины $\varkappa \geqslant 1$) оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, соответствующая собственному значению λ_0. Число l_0 ($0 \leqslant l_0 \leqslant \varkappa - 1$) из определения функции V таково, что функция V не является вектор-полиномом по переменным y_1, y_2. Такое l_0 действительно существует, так как λ_0 — неправильное собственное значение (если $\operatorname{Im}\lambda$ — нецелое число или $\operatorname{Im}\lambda$ — целое число, но $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, то можно взять $l_0 = 0$).

Поскольку V не является вектор-полиномом, то по лемме 4.20 в [36]

$$V \notin \mathcal{W}^{2m}(K^d) \quad \forall d > 0. \tag{21.2}$$

Из леммы 2.1 в [13] следует, что

$$\mathcal{P}_j(D)V_j = 0, \qquad \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V|_{\gamma_{j\sigma}} = 0. \tag{21.3}$$

Используя равенства (21.3) и разложение Тейлора для коэффициентов операторов $\mathbf{P}_j(y, D)$ и $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)$, получим

$$\{\mathbf{P}_j(y, D)V_j - P_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \quad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)V - P_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon), \tag{21.4}$$

где P_j — линейная комбинация слагаемых вида

$$r^{i\lambda_0-2m+1}(i\ln r)^l\varphi(\omega), \dots, r^{i\lambda_0-2m+k_0}(i\ln r)^l\varphi(\omega),$$

$P_{j\sigma\mu}$ — линейная комбинация слагаемых вида

$$r^{i\lambda_0-m_{j\sigma\mu}+1}(i\ln r)^l, \dots, r^{i\lambda_0-m_{j\sigma\mu}+k_0}(i\ln r)^l,$$

$\varphi(\omega)$ — бесконечно дифференцируемые вектор-функции, а число $k_0 \in \mathbb{N}$ таково, что

$$-\operatorname{Im}\lambda_0 - 2m + k_0 \leqslant -1, \quad -\operatorname{Im}\lambda_0 - 2m + k_0 + 1 > -1. \tag{21.5}$$

Очевидно, если неравенства (21.5) выполнены при $k_0 = 0$, т. е. если $1 - 2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda_0 < 2 - 2m$, то можно считать $P_j = 0$ и $P_{j\sigma\mu} = 0$.

Используя лемму 4.3 в [13], построим функцию

$$V' = \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{l=0}^{l'} r^{i\lambda_0+k}(i\ln r)^{l_k}\varphi_{kl}(\omega) \in W^\ell(K^d) \quad \forall d > 0 \tag{21.6}$$

такую, что

$$\{\mathbf{P}_j(y, D)V_j' - P_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \quad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)V' - P_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon). \tag{21.7}$$

Рассмотрим срезающую функцию $\xi \in C_0^\infty(\mathcal{O}_{\varepsilon'}(0))$, равную единице вблизи начала координат, где ε' задано в (19.8). Положим $U = \xi(V - V')$. Очевидно, $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$; следовательно,

$$\operatorname{supp} \mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U \subset \overline{\gamma_{j\sigma}} \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(0). \tag{21.8}$$

Из (21.1), (21.6) и (21.2) вытекает, что

$$U \in \mathcal{W}^\ell(K), \qquad U \notin \mathcal{W}^{2m}(K^d) \quad \forall d > 0. \tag{21.9}$$

Более того, в силу (21.4) и (21.7)

$$\{\mathbf{P}_j(y, D)U_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \quad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D)U\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon). \tag{21.10}$$

2. Рассмотрим функцию $u(y)$ такую, что $u(y) = U_j(y'(y))$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon'}(g_j)$ и $u(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathcal{K})$, где $y' \mapsto y(g_j)$ — замена переменных, обратная к замене $y \mapsto y'(g_j)$ из п. 6.1 (главы II). Функция u искомая. Действительно, $u \notin W^{2m}(G)$ согласно (21.9). Далее, $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u = 0$ в силу неравенства (6.5) (при $l = 0$), поскольку $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$. Из равенства $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u = 0$ и соотношений (21.10) вытекает, что функция u удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(y, D)u \in L_2(G), \qquad \mathbf{B}_{i\mu}^0 u + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u \in H_0^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i), \\ \operatorname{supp}(\mathbf{B}_{i\mu}^0 u + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u) \subset \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K}). \end{gathered} \tag{21.11}$$

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 вытекает из (21.11) и утверждения 2 леммы 19.2. □

21.2. Нарушение условия 18.3 или 18.4

При $\ell = 2m - 1$ изучены все возможные случаи расположения собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Осталось предположить, что $\ell \leqslant 2m - 2$ и нарушено условие 18.3 или 18.4.

Теорема 21.2. *Пусть выполнено условие* 18.2*, однако нарушено условие* 18.3 *или* 18.4*. Тогда существует правая часть* $\{f_0, f_{i\mu}^1 + f_{i\mu}^2\} \in \mathcal{W}^0(G, \partial G)$ *и обобщенное решение* u *задачи* (18.1), (18.2) *такие, что* $u \notin W^{2m}(G)$*, где* $f_{i\mu}^1$ — *полином степени* $\leqslant 2m - m_{i\mu} - 2$ *в окрестности точки* $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ *и* $\{f_{i\mu}^2\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$.

Доказательство. 1. Согласно части 2 замечания 18.3 для некоторого s из множества $\{\ell, \dots, 2m-2\}$ и некоторого (ненулевого) вектора $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$ найдется такая функция V вида (18.8), что

$$V \in \mathcal{W}^{\ell}(K^d), \quad V \notin \mathcal{W}^{2m}(K^d) \quad \forall d > 0, \tag{21.12}$$

$$\mathcal{P}_j(D)V_j = 0, \qquad \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(D)V|_{\gamma_{j\sigma}} = c_{j\sigma\mu} r^{s-m_{j\sigma\mu}}. \tag{21.13}$$

Используя равенство (21.13) и формулу Тейлора для коэффициентов операторов $\mathbf{P}_j(y,D)$ и $\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)$, получим

$$\begin{gathered} \{\mathbf{P}_j(y,D)V_j - P_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \\ \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)V - c_{j\sigma\mu} r^{s-m_{j\sigma\mu}} - P_{j\sigma\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon), \end{gathered} \tag{21.14}$$

где функции P_j и $P_{j\sigma\mu}$ имеют тот же вид, что в (21.4).

Аналогично доказательству теоремы 21.1 построим функцию V' вида (21.6) (где $i\lambda_0$ следует заменить на s), удовлетворяющую соотношениям (21.7).

Рассмотрим срезающую функцию $\xi \in C_0^\infty(\mathcal{O}_{\varepsilon'}(0))$, равную единице вблизи начала координат, где ε' задано в (19.8). Положим $U = \xi(V - V')$. Очевидно, $\operatorname{supp} U \subset \mathcal{O}_{\varepsilon'}(0)$ и

$$U \in \mathcal{W}^{\ell}(K), \qquad U \notin \mathcal{W}^{2m}(K^d) \quad \forall d > 0. \tag{21.15}$$

Более того, в силу (21.14) и (21.7)

$$\{\mathbf{P}_j(y,D)U_j\} \in \mathcal{W}^0(K^\varepsilon), \quad \{\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y,D)U - c_{j\sigma\mu} r^{s-m_{j\sigma\mu}}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\gamma^\varepsilon). \tag{21.16}$$

Заметим, что, поскольку $\{c_{j\sigma\mu}\} \in C_s$, функция $c_{j\sigma\mu} r^{s-m_{j\sigma\mu}}$ либо равна нулю (в частности, она равна нулю, если $(j,\sigma,\mu) \in J_s$), либо является мономом степени $s - m_{j\sigma\mu}$ (т. е. степень монома не превосходит $2m - m_{j\sigma\mu} - 2$).

2. Рассмотрим функцию $u(y)$ такую, что $u(y) = U_j(y'(y))$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon'}(g_j)$ и $u(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_{\varepsilon'}(\mathcal{K})$, где $y' \mapsto y(g_j)$ — замена переменных, обратная к замене $y \mapsto y'(g_j)$ из п. 6.1 (главы II). Функция u искомая. Действительно, $u \notin W^{2m}(G)$ согласно (21.15). Далее, $\mathbf{B}^2_{i\mu} u = 0$ в силу неравенства (6.5) (при $l = 0$), поскольку $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$. Из равенства $\mathbf{B}^2_{i\mu} u = 0$ и соотношений (21.16) вытекает, что функция u удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{P}(y,D)u \in L_2(G), \qquad \mathbf{B}^0_{i\mu} u + \mathbf{B}^1_{i\mu} u + \mathbf{B}^2_{i\mu} u = f^1_{i\mu} + f^2_{i\mu},$$

где $f^1_{i\mu}$ — полином[2] степени не выше $2m - m_{i\mu} - 2$ в окрестности точки $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ и $\{f^2_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_0^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$. □

[2]Функция $f^1_{i\mu}$ (будучи записанной в системе координат с началом в точке $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$) либо равна нулю, либо есть моном степени $s - m_{j\sigma\mu}$.

Замечание 21.1. Напомним, что пространство $\tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ было введено в п. 19.2 в случае, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = 1-2m$ содержит единственное собственное значение $i(1-2m)$. Согласно теореме 19.2 гладкость обобщенных решений может нарушаться, если правая часть $\{f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ не принадлежит $\tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$. Теорема 21.2 показывает, что если условие 18.3 или 18.4 не выполнено, то гладкость обобщенных решений может нарушаться даже для правых частей $\{f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$. Это следует из того, что правые части $\{f^1_{i\mu} + f^2_{i\mu}\}$ в формулировке теоремы 21.2 принадлежат $\tilde{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$ (ср. замечание 19.1).

С другой стороны, принципиальным является тот факт, что нарушение гладкости в теореме 21.2 имеет место для ненулевых (и даже нерегулярных, т. е. не принадлежащих $\hat{\mathcal{S}}^{2m-\mathbf{m}-1/2}(\partial G)$) правых частей $\{f_{i\mu}\}$. Как показывают теоремы 20.1 и 20.2, если мы ограничимся рассмотрением регулярных правых частей, гладкость обобщенных решений может сохраняться даже тогда, когда нарушено условие 18.3 или 18.4.

22. Пример

Приведем пример, иллюстрирующий результаты этой главы. В примере множество $\mathcal{K}$ состоит из нескольких орбит, поэтому, ссылаясь на теоремы из предыдущих параграфов, будем иметь в виду очевидные обобщения на этот случай.

22.1. Задача с неоднородными нелокальными условиями

Постановка задачи

Пусть $\partial G \setminus \mathcal{K} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_i — открытые (в топологии ∂G) кривые класса C^∞ и $\mathcal{K} = \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \{g, h\}$, где g, h — концевые точки кривых $\overline{\Gamma_1}$ и $\overline{\Gamma_2}$. Предположим, что область G совпадает с плоским углом раствора π в окрестности каждой из точек g, h. Таким образом, граница G бесконечно гладкая. Рассмотрим следующую нелокальную задачу в области G (ср. пример в п. 6.2 главы II):

$$\Delta u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{22.1}$$

$$\begin{aligned} &u|_{\Gamma_1} + b_1(y)u\big(\Omega_1(y)\big)\big|_{\Gamma_1} + a(y)u\big(\Omega(y)\big)\big|_{\Gamma_1} = f_1(y) \quad (y \in \Gamma_1), \\ &u|_{\Gamma_2} + b_2(y)u\big(\Omega_2(y)\big)\big|_{\Gamma_2} = f_2(y) \quad (y \in \Gamma_2). \end{aligned} \tag{22.2}$$

Здесь b_1, b_2 и a — вещественнозначные бесконечно дифференцируемые функции; Ω_i (Ω) — диффеоморфизмы класса C^∞, отображающие некоторую окрест-

ность $\mathcal{O}_i$ ($\mathcal{O}_1$) кривой Γ_i (Γ_1) на множество $\Omega_i(\mathcal{O}_i)$ ($\Omega(\mathcal{O}_1)$) так, что $\Omega_i(\Gamma_i) \subset G$, $\Omega_i(g) = g$, $\Omega_i(h) = h$ и преобразование Ω_i вблизи точек g, h есть поворот границы Γ_i на угол $\pi/2$ внутрь области G (соответственно $\Omega(\Gamma_1) \subset G$, $\overline{\Omega(\Gamma_1)} \cap \{g, h\} = \varnothing$, но подход кривой $\Omega(\overline{\Gamma_1})$ к границе ∂G произвольный), см. рис. 22.1.

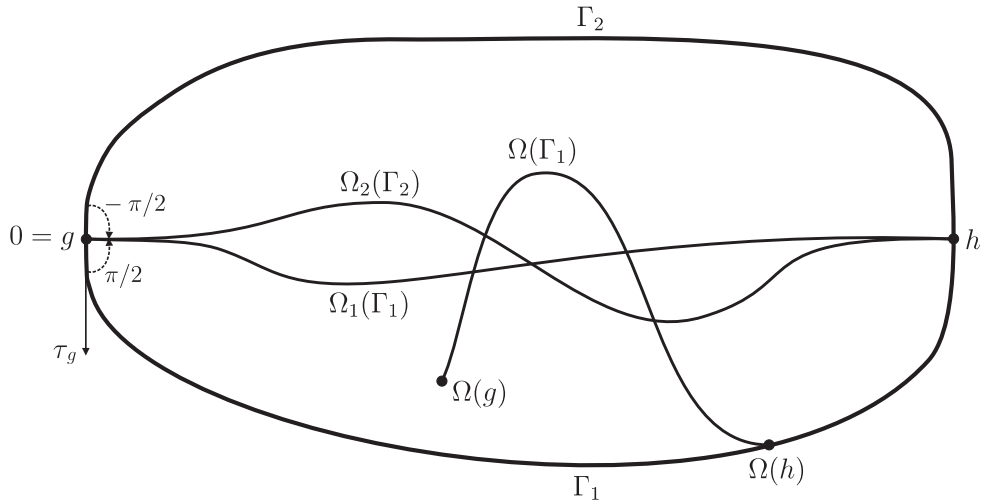

Рис. 22.1. Область G с границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{g, h\}$.

Для того чтобы записать нелокальные условия (22.2) в виде (18.2), выберем такое достаточно малое число ε, чтобы множества $\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g)}$ и $\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(h)}$ не пересекались с кривой $\overline{\Omega(\Gamma_1)}$.

Рассмотрим функцию $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\zeta(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K})$ и $\operatorname{supp}\zeta \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$. Введем операторы

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_i^1 u &= \zeta(y) b_i(y) u(\Omega_i(y))|_{\Gamma_i}, \\
\mathbf{B}_1^2 u &= (1 - \zeta(y)) b_1(y) u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1} + a(y) u(\Omega(y))|_{\Gamma_1}, \\
\mathbf{B}_2^2 u &= (1 - \zeta(y)) b_2(y) u(\Omega_2(y))|_{\Gamma_2}.
\end{aligned}$$

В этом примере множество $\mathcal{K}$ образовано двумя орбитами; первая орбита состоит из точки g, вторая — из точки h. Так как носитель ζ содержится вблизи окрестности множества $\mathcal{K}$, то можно считать, что преобразования Ω_i в определении операторов $\mathbf{B}_{i\mu}^1$ также определены в окрестности множества $\mathcal{K}$ и удовлетворяют условию 6.3. Нетрудно также видеть, что операторы $\mathbf{B}_{i\mu}^2$ удовлетворяют условию 6.4 с $\varkappa_1 = \varepsilon/2$ и некоторыми $\varkappa_2 < \varkappa_1$ и ρ.

В этом параграфе будем использовать пространства вектор-функций, введенные в (5.3) и (5.21) при $N = 2$.

Запишем модельную задачу, соответствующую точке g (модельная задача, соответствующая точке h записывается аналогично). Предположим для опре-

деленности, что точка g совпадает с началом координат: $g = 0$, а ось Oy_1 направлена внутрь области G, перпендикулярно к границе. Рассмотрим множества

$$K^\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < \varepsilon,\ |\omega| < \pi/2\},$$
$$\gamma_\sigma^\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < \varepsilon,\ \omega = (-1)^\sigma \pi/2\}.$$

Выберем ε настолько малым, чтобы $\mathcal{O}_\varepsilon(0) \cap G = K^\varepsilon$. Модельная задача примет вид

$$\Delta U = F(y) \quad (y \in K^\varepsilon), \tag{22.3}$$
$$U(y) + b_\sigma(y) U(\mathcal{G}_\sigma y) = \psi_\sigma(y) \quad (y \in \gamma_\sigma^\varepsilon,\ \sigma = 1, 2). \tag{22.4}$$

Здесь $\mathcal{G}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^\sigma \\ (-1)^{\sigma+1} & 0 \end{pmatrix}$ — оператор поворота на угол $(-1)^{\sigma+1}\pi/2$,

$$F(y) = f_0(y), \quad y \in K^\varepsilon, \qquad \psi_\sigma(y) = f_\sigma(y) - B_\sigma^u(y), \quad y \in \gamma_\sigma^\varepsilon;$$

кроме того,

$$B_1^u(y) = a(y) u\big(\Omega(y)\big), \quad y \in \gamma_1^{\varepsilon/2}, \qquad B_2^u(y) = 0, \quad y \in \gamma_2^{\varepsilon/2},$$

поскольку $(1 - \zeta(y)) b_\sigma(y) u(\Omega_\sigma(y)) = 0$ при $y \in \gamma_\sigma^{\varepsilon/2}$, $\sigma = 1, 2$.

Задача на собственные значения имеет вид

$$\varphi''(\omega) - \lambda^2 \varphi(\omega) = 0 \quad (|\omega| < \pi/2), \tag{22.5}$$
$$\varphi(-\pi/2) + b_1(0)\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi/2) + b_2(0)\varphi(0) = 0. \tag{22.6}$$

Обозначим $I_1 = (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$ и $I_2 = (-2, 0)$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что собственные значения задачи (22.5), (22.6) могут быть расположены относительно полосы $-1 \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 0$ следующим образом.

Случай 1 ($b_1(0) + b_2(0) \in I_1$): полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 0$ не содержит собственных значений.

Случай 2 ($b_1(0) + b_2(0) = 0$): полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 0$ содержит единственное собственное значение $\lambda = -i$; это собственное значение правильное.

Случай 3 ($b_1(0) + b_2(0) \in I_2$): полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im} \lambda < 0$ содержит неправильное собственное значение

$$\lambda = 2\pi^{-1} i \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4 - (b_1(0) + b_2(0))^2}}{b_1(0) + b_2(0)}.$$

Случай 1

Теорема 22.1. *Пусть* $b_1(0)+b_2(0)\in I_1$ *и* $b_1(h)+b_2(h)\in I_1$. *Пусть* $u\in W^1(G)$ — *обобщенное решение задачи* (22.1), (22.2) *с правой частью*

$$\{f_0, f_{i\mu}\}\in \mathcal{W}^0(G,\partial G).$$

Тогда $u\in W^2(G)$.

Доказательство. В данном случае полоса $-1\leqslant \operatorname{Im}\lambda<0$ не содержит собственных значений задачи (22.5), (22.6) (а также собственных значений аналогичной задачи, соответствующей точке h). Следовательно, утверждение теоремы вытекает из теоремы 18.1. □

Отметим, что на коэффициенты b_i и a, а также на правые части $f_{i\mu}$ никаких условий согласования в случае 1 не налагется.

Случай 2

Предположим для определенности, что

$$b_1(h)+b_2(h)\in I_1.$$

В этом случае условие согласования (19.5) рассматривается только вблизи начала координат. Запишем это условие для задачи (22.1), (22.2). Пусть τ_σ обозначает вектор с координатами $(0,(-1)^\sigma)$. Тогда[3] $\partial/\partial\tau_\sigma=(-1)^\sigma\partial/\partial y_2$ и

$$\frac{\partial}{\partial\tau_1}\big(U(y)+b_1(0)U(\mathcal{G}_1y)\big)=-U_{y_2}(y)+b_1(0)U_{y_1}(\mathcal{G}_1y),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau_2}\big(U(y)+b_2(0)U(\mathcal{G}_2y)\big)=U_{y_2}(y)+b_2(0)U_{y_1}(\mathcal{G}_2y).$$

Следовательно,

$$\hat{\mathcal{B}}_\sigma(D)U=(-1)^\sigma U_{y_2}+b_\sigma(0)U_{y_1},\quad \sigma=1,2.$$

Так как $b_1(0)+b_2(0)=0$, то операторы $\hat{\mathcal{B}}_1(D)$ и $\hat{\mathcal{B}}_2(D)$ линейно зависимы:

$$\hat{\mathcal{B}}_1(D)+\hat{\mathcal{B}}_2(D)=0.$$

[3] В этом примере для простоты записи будем пользоваться операторами $\partial/\partial\tau_\sigma$ вместо $D_{\tau_\sigma}=-i\partial/\partial\tau_\sigma$.

Таким образом, условие согласования (19.5) для функций $Z_\sigma \in W^{3/2}(\gamma_\sigma^\varepsilon)$ принимает вид

$$\int\limits_0^\varepsilon r^{-1}\left|\frac{\partial Z_1}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,-r)} - \frac{dZ_2}{dy_2}\bigg|_{y=(0,r)}\right|^2 dr < \infty. \tag{22.7}$$

Учитывая (22.7), обозначим через $\tilde{\mathcal{S}}^{3/2}(\partial G)$ множество, состоящее из всех функций $\{f_{i\mu}\} \in \mathcal{W}^{3/2}(\partial G)$ таких, что

$$\int\limits_0^\varepsilon r^{-1}\left|\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,-r)} - \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,r)}\right|^2 dr < \infty. \tag{22.8}$$

Положим $\tilde{\mathcal{S}}^0(G,\partial G) = \tilde{\mathcal{S}}^0(G,\partial G)$.

По теореме 19.2 включение $\{f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^{3/2}(\partial G)$ необходимо для того, чтобы любое обобщенное решение задачи (22.1), (22.2) принадлежало $W^2(G)$.

Теорема 22.2. *Пусть* $b_1(0) + b_2(0) = 0$ *и* $b_1(h) + b_2(h) \in I_1$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если*

$$a(0) = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial y_2}\bigg|_{y=0} = 0, \tag{22.9}$$

$$\int\limits_0^\varepsilon r^{-1}\left|\frac{\partial b_1}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,-r)} - \frac{\partial b_2}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,r)}\right|^2 dr < \infty, \tag{22.10}$$

и $u \in W^1(G)$ — *обобщенное решение задачи* (22.1), (22.2) *с правой частью* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^0(G,\partial G)$, *то* $u \in W^2(G)$.

2. *Если условие* (22.9)–(22.10) *нарушено, то существует правая часть* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^0(G,\partial G)$ *и обобщенное решение* $u \in W^1(G)$ *задачи* (22.1), (22.2) *такие, что* $u \notin W^2(G)$.

Доказательство. 1. Согласно теореме 19.3 достаточно доказать, что условие (22.9)–(22.10) эквивалентно условию 19.3.

Для любой функции $v \in W^2(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$ обозначим $v_\Omega(y) = v\big(\Omega(y)\big)$, $y \in \Gamma_1$. Тогда

$$B_1^v(y) = a(y)v_\Omega(y), \quad y \in \gamma_1^{\varepsilon/2}, \qquad B_2^v(y) = 0, \quad y \in \gamma_2^{\varepsilon/2}.$$

Следовательно, функции B_σ^v удовлетворяют условию согласования (22.7) тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{-1}\left|\frac{\partial(av_\Omega)}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,-r)}\right|^2 dr = \int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{-1}\left|\Big(\frac{\partial a}{\partial y_2}v_\Omega + a\frac{\partial v_\Omega}{\partial y_2}\Big)\bigg|_{y=(0,-r)}\right|^2 dr < \infty. \tag{22.11}$$

Мы берем в качестве верхнего предела интегрирования $\varepsilon/2$ вместо ε, поскольку функции B_σ^v в этом случае выглядят проще; очевидно, замена ε на $\varepsilon/2$ не влияет на сходимость интеграла.

Докажем, что условие (22.11) эквивалентно (22.9). Предположим, что выполнено (22.11). Выберем такую функцию v, чтобы $v_\Omega(y) = y_2$ вблизи начала координат; тогда

$$\left.\frac{\partial(av_\Omega)}{\partial y_2}\right|_{y=0} = a(0).$$

Так как функция $\partial(av_\Omega)/\partial y_2$ непрерывна вблизи начала координат, то из последнего соотношения и (22.11) имеем $a(0) = 0$. Аналогично, подставляя в (22.11) функцию v такую, что $v_\Omega(y) = 1$ вблизи начала координат, получим

$$(\partial a/\partial y_2)|_{y=0} = 0.$$

Обратно, предположим, что выполнено (22.9). В силу гладкости преобразования Ω

$$v_\Omega, \frac{\partial v_\Omega}{\partial y_2} \in W^{1/2}(\gamma_1^\varepsilon) \subset H_1^{1/2}(\gamma_1^\varepsilon)$$

для любой функции $v \in W^2(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$. Отсюда, из (22.9) и леммы 5.6 вытекает, что $\partial(av_\Omega)/\partial y_2 \in H_0^{1/2}(\gamma_1^\varepsilon)$. Следовательно, по лемме 4.8 в [36] выполнено соотношение (22.11). Таким образом, доказано, что часть 1 условия 19.3 эквивалентна условию (22.9).

2. Часть 2 условия 19.3 выполнена тогда и только тогда, когда функции $C + b_1(y)C$ и $C + b_2(y)C$ удовлетворяют условию согласования (22.7) для любой константы C. Это, в свою очередь, эквивалентно (22.10). □

Таким образом, в случае 2 гладкость обобщенных решений зависит от значений первых производных коэффициентов b_1, b_2 *вблизи* начала координат и от значений коэффициента a и его первой производной *в* начала координат.

Случай 3

Теорема 22.3. *Пусть* $b_1(0) + b_2(0) \in I_2$ *или* $b_1(h) + b_2(h) \in I_2$. *Тогда существует правая часть* $\{f_0, 0\}$, *где* $f_0 \in L_2(G)$, *и обобщенное решение* $u \in W^1(G)$ *задачи* (22.1), (22.2) *такие, что* $u \notin W^2(G)$.

Доказательство. Полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda < 0$ содержит неправильное собственное значение задачи (22.5), (22.6) (или аналогичной задачи, соответствующей точке h). Следовательно, заключение теоремы вытекает из теоремы 21.1. □

Таким образом, в случае 3 гладкость обобщенных решений может нарушаться вне зависимости от поведения коэффициента a и производных коэффициентов b_1, b_2 вблизи точки g.

22.2. Задача с регулярными и нулевыми правыми частями в нелокальных условиях

Рассмотрим задачу (22.1), (22.2) с регулярными и нулевыми правыми частями в краевых условиях. Согласно теоремам 22.1 и 22.3 гладкость обобщенных решений сохраняется в случае 1 и может нарушаться в случае 3. Особый интерес представляет случай 2 («пограничный» случай).

Задача с регулярными правыми частями

Для определенности считаем, что

$$b_1(h) + b_2(h) \in I_1.$$

Теорема 22.4. *Пусть* $b_1(0) + b_2(0) = 0$ *и* $b_1(h) + b_2(h) \in I_1$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если*
$$a(0) = 0, \quad \left.\frac{\partial a}{\partial y_2}\right|_{y=0} = 0 \tag{22.12}$$
и $u \in W^1(G)$ — *обобщенное решение задачи* (22.1), (22.2) *с правой частью* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^0(G, \partial G)$, *где* $f_{i\mu}(0) = 0$, *то* $u \in W^2(G)$.

2. *Если условие* (22.12) *нарушено, то существует правая часть* $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}^0(G, \partial G)$, *где* $f_{i\mu}(y) = 0$ *вблизи начала координат, и обобщенное решение* $u \in W^1(G)$ *задачи* (22.1), (22.2) *такие, что* $u \notin W^2(G)$.

Доказательство. 1. В силу теоремы 19.4 и следствия 19.1 достаточно доказать, что условие (22.12) эквивалентно условию 19.4.

Согласно определению 19.2 функция $v \in W^2(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$ допустимая тогда и только тогда, когда существуют константы C и C_h такие, что

$$\begin{gathered} a(0)v_\Omega(0) + C + b_1(0)C = 0, \quad C + b_2(0)C = 0, \\ a(h)v_\Omega(h) + C_h + b_1(h)C_h = 0, \quad C_h + b_2(h)C_h = 0, \end{gathered} \tag{22.13}$$

где $v_\Omega(y) = v\big(\Omega(y)\big)$, $y \in \Gamma_1$.

Пусть $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — срезающая функция такая, что

$$\operatorname{supp}\xi \subset \mathcal{O}_\delta(\Omega(0)), \qquad \xi(y) = 1, \quad y \in \mathcal{O}_{\delta/2}(\Omega(0)),$$

где $\delta > 0$ настолько мало, что $\Omega(h) \notin \mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$. Так как $b_1(h) + b_2(h) \in I_1$, то условие согласования (19.5) следует рассматривать только вблизи начала координат. Следовательно, если v — допустимая функция, C, C_h — допустимые постоянные, соответствующие функции v и условие 19.4 выполнено (нарушено) для v и C, то ξv — также допустимая функция, $C, 0$ — допустимые векторы, соответствующие ξv и условие 19.4 выполнено (соответственно нарушено) для ξv и C. Таким образом, достаточно рассматривать только функции v с носителем в $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$ (т. е. функции v_Ω с носителем вблизи начала координат), и при этом можно считать, что $C_h = 0$.

Вначале изучим ситуацию, когда $b_2(0) \neq -1$. В этом случае, согласно (22.13), функция v с носителем в $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$ допустима тогда и только тогда, когда

$$a(0)v_\Omega(0) = 0; \tag{22.14}$$

при этом соответствующее множество допустимы констант состоит из единственной константы $C = 0$ (напомним, что C_h также равно нулю по предположению). Следовательно, условие 19.4 выполнено тогда и только тогда, когда соотношение

$$\int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{-1}\left|\frac{\partial(av_\Omega)}{\partial y_2}\Big|_{y=(0,-r)}\right|^2 dr = \int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{-1}\left|\Big(\frac{\partial a}{\partial y_2}v_\Omega + a\frac{\partial v_\Omega}{\partial y_2}\Big)\Big|_{y=(0,-r)}\right|^2 dr < \infty \tag{22.15}$$

справедливо для любой функции v_Ω, удовлетворяющей (22.14). Предположим, что имеет место (22.12). Тогда любая функция v с носителем в $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$ допустима (так как $a(0) = 0$). Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 22.2 получим (22.15).

Обратно, предположим, что (22.15) имеем место для любой функции v_Ω, удовлетворяющей (22.14). Очевидно, функция v такая, что $v_\Omega(y) = y_2$ вблизи начала координат, удовлетворяет (22.14). Подставляя функцию v_Ω в (22.15), получим $a(0) = 0$ (ср. доказательство теоремы 22.2). Следовательно, любая функция v с носителем в $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$, допустима. Подставляя $v_\Omega(y) = 1$ в (22.15), получим $(\partial a/\partial y_2)|_{y=0} = 0$.

2. Осталось рассмотреть ситуацию, когда $b_2(0) = -1$. В этом случае $b_1(0) = 1$. Тогда в силу (22.13) любая функция v с носителем в $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$ допустима; при

этом соответствующее множество допустимых констант состоит из единственной константы $C = -a(0)v_\Omega(0)/2$ (константу C_h по-прежнему считаем равной нулю). Следовательно, условие 19.4 выполнено тогда и только тогда, когда соотношение

$$\int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{-1}\left|\frac{\partial(av_\Omega)}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,-r)} + C\left(\frac{\partial b_1}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,-r)} - \frac{\partial b_2}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,r)}\right)\right|^2 dr =$$

$$= \int\limits_0^{\varepsilon/2} r^{-1}\left|\left(\frac{\partial a}{\partial y_2}v_\Omega + a\frac{\partial v_\Omega}{\partial y_2}\right)\bigg|_{y=(0,-r)} - \right.$$

$$\left. - \frac{a(0)v_\Omega(0)}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,-r)} - \frac{\partial b_2}{\partial y_2}\bigg|_{y=(0,r)}\right)\right|^2 dr < \infty \quad (22.16)$$

справедливо для любой функции v с носителем в $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$. Предположим, что выполнено условие (22.12). Тогда (аналогично предыдущему) видим, что (22.15) выполнено для любой функции v_Ω; значит, (22.16) также выполнено для любой функции v_Ω (поскольку $a(0) = 0$).

Обратно, предположим, что выполнено (22.16). Подставим в (22.16) функцию v такую, что $v_\Omega(y) = y_2$ вблизи начала координат. Так как $v_\Omega(0) = 0$ и $(\partial v_\Omega/\partial y_2)|_{y=0} = 1$, то из (22.16) (аналогично предыдущему) заключаем, что $a(0) = 0$. Следовательно, соотношение (22.16) совпадает с (22.15). Теперь, повторяя приведенные выше рассуждения, получаем $(\partial a/\partial y_2)|_{y=0} = 0$. □

Очевидно, условие (22.12) слабее условия (22.9)–(22.10): в условии (22.12) отсутствуют ограничения на поведение коэффициентов b_1, b_2. Отсутствие этих ограничений «компенируется» тем, что правые части в нелокальных условиях *регулярны*, т. е. $\{f_{i\mu}\} \in \tilde{\mathcal{S}}^{3/2}(\partial G)$ и $f_{i\mu}(0) = 0$.

Задача с нулевыми правыми частями

Из утверждения 1 теоремы 22.4 вытекает, что в случае нулевых правых частей условие (22.12) достаточно для того, чтобы любое обобщенное решение было гладким. Докажем, что это условие также необходимо в следующих случаях (см. рисунки 22.2–22.4):

Случай A: $\operatorname{supp} a(\Omega^{-1}(y))|_{\Omega(\Gamma_1)} \subset G$.

Случай B: $\Omega(0) \in G$ и $\Omega(0) \notin \Omega_1(\Gamma_1) \cup \Omega_2(\Gamma_2)$.

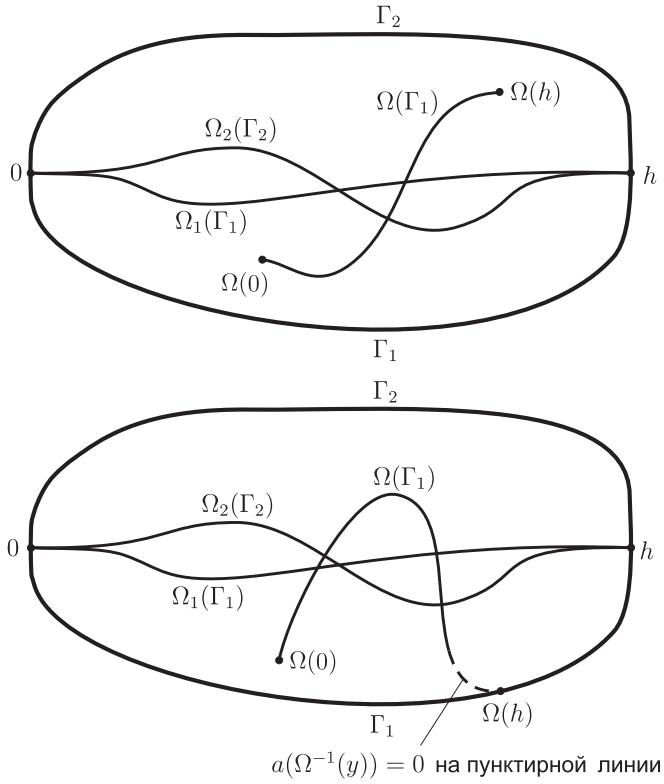

Рис. 22.2. Случай A.

Случай C:

$$\Omega(0) \in \Gamma_1, \qquad \Omega(\Omega(0)) \notin \Omega_1(\Gamma_1) \cup \Omega_2(\Gamma_2). \tag{22.17}$$

$$a(\Omega(0)) \neq 0. \tag{22.18}$$

Следствие 22.1. *Пусть* $b_1(0) + b_2(0) = 0$ *и* $b_1(h) + b_2(h) \in I_1$. *Предположим, что имеет место случай* A, B *или* C. *Если условие* (22.12) *нарушено, то существует правая часть* $\{f_0, 0\}$, *где* $f_0 \in L_2(G)$, *и обобщенное решение* $u \in W^1(G)$ *задачи* (22.1), (22.2) *такие, что* $u \notin W^2(G)$.

Доказательство. 1. Вначале предположим, что имеет место случай A. Из непрерывности преобразований Ω_i и Ω вытекает, что операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ удовлетворяют условию (19.24) при всех ρ таких, что

$$0 < \rho < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} a(\Omega^{-1}(y))|_{\Omega(\Gamma_1)}, \partial G).$$

Поэтому заключение следствия вытекает из следствия 19.3.

2. Теперь предположим, что имеет место случай B. Как и выше, мы можем считать, что условие 19.4 нарушено для допустимой функции v с носителем в

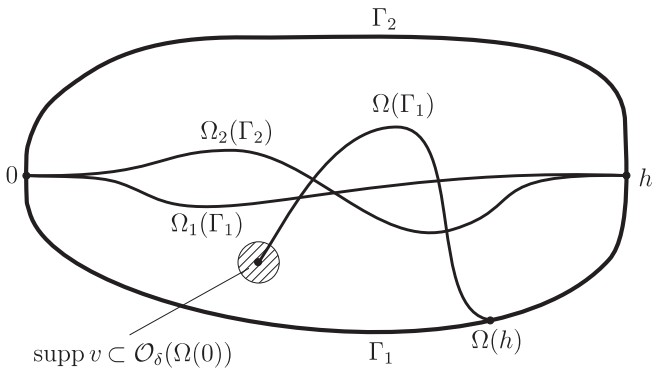

Рис. 22.3. Случай B.

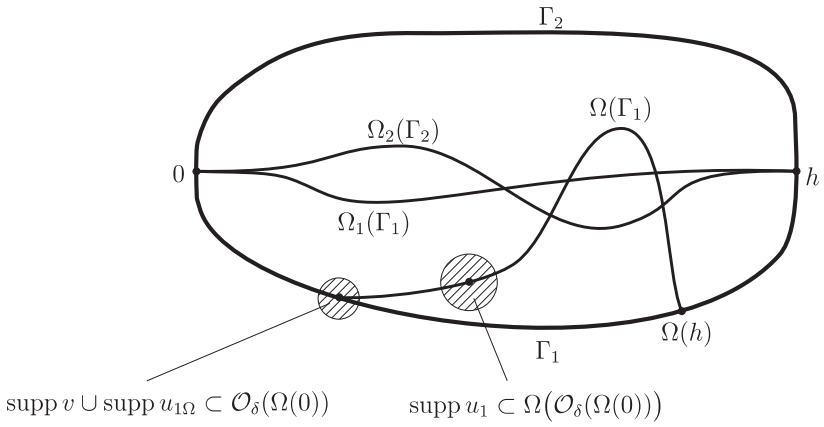

Рис. 22.4. Случай C.

сколь угодно малой δ-окрестности $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$ точки $\Omega(0)$. Число δ можно выбрать настолько малым, чтобы

$$v(y)|_{\Gamma_i} \equiv 0, \qquad v(\Omega_i(y))|_{\Gamma_i} = 0, \qquad \operatorname{supp} v(\Omega(y))|_{\Gamma_1} \subset \Gamma_1 \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(0).$$

Таким образом, функция v удовлетворяет соотношениям (19.26), и заключение следствия вытекает из следствия 19.4.

3. Наконец, предположим, что имеет место случай C. Вновь будем считать, что условие 19.4 нарушено для допустимой функции v с носителем в $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$. В силу соотношений (22.17) число δ можно выбрать так, что

$$v(\Omega_i(y))|_{\Gamma_i} \equiv 0, \tag{22.19}$$

$$\operatorname{supp} v(\Omega(y))|_{\Gamma_1} \subset \Gamma_1 \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(0). \tag{22.20}$$

Пусть $f_{i\mu}$ — функции из утверждения 2 теоремы 19.4, построенные по схеме из доказательства теоремы 19.4. Из (22.19) и (22.20) вытекает, что

$$\operatorname{supp} f_1 \subset \Gamma_1 \cap \big(\mathcal{O}_{\varkappa_2}(0) \cup \mathcal{O}_\delta(\Omega(0))\big), \qquad \operatorname{supp} f_2 \subset \Gamma_2 \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(0).$$

Допустим, нам удалось построить такую функцию $u_1 \in H_0^2(G)$, что

$$u_1|_{\Gamma_i} + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u_1 + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u_1 = f_i(y), \quad y \in \Gamma_i \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K}),\ i = 1, \dots, N, \tag{22.21}$$

$$u_1|_{\Gamma_i} + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u_1 + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u_1 = 0, \quad y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K}),\ i = 1, \dots, N. \tag{22.22}$$

Тогда заключение следствия вытекает из леммы 19.2 и следствия 19.2.

Построим функцию u_1. Для этого рассмотрим функцию $u_{1\Omega} \in W^2\big(\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))\big)$ с носителем в $\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))$ такую, что

$$u_{1\Omega}(y) = f_1(y)/a(y), \quad y \in \Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\delta(\Omega(0)),$$

где δ настолько мало, что $a(y) \neq 0$ при $y \in \overline{\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))}$ (существование такого δ следует из (22.18) и непрерывности $a(y)$).

Положим $u_1(y) = u_{1\Omega}(\Omega^{-1}(y))$ при $y \in \Omega\big(\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))\big)$ и $u_1(y) = 0$ при $y \notin \Omega\big(\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))\big)$. Выберем δ настолько малым, чтобы

$$\Gamma_i \cap \Omega\big(\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))\big) = \varnothing, \quad \Omega_i(\Gamma_i) \cap \Omega\big(\mathcal{O}_\delta(\Omega(0))\big) = \varnothing, \quad \mathcal{O}_\delta(\Omega(0)) \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(0) = \varnothing$$

(существование такого δ следует из (22.17) и непрерывности преобразования Ω). Тогда

$$u_1|_{\Gamma_i} = 0, \qquad u_1(\Omega_i(y))|_{\Gamma_i} = 0,$$

$$a(y) u_1(\Omega(y)) = f_1(y), \quad y \in \Gamma_1 \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_2}(0),$$

$$u_1(\Omega(y)) = 0, \quad y \in \Gamma_1 \cap \mathcal{O}_{\varkappa_2}(0).$$

Таким образом, функция u_1 удовлетворяет соотношениям (22.21) и (22.22), и следствие доказано. $\square$

Глава VI

Полугруппы Феллера и двумерные диффузионные процессы

23. Нелокальные задачи в пространствах непрерывных функций

23.1. Предварительные сведения

В этом пункте мы напомним понятия полугруппы Феллера и ее генератора и сформулируем теорему Хилле—Иосиды в удобном для нас виде.

Пусть $\mathcal{X}$ — замкнутое подпространство в $C(\overline{G})$, содержащее по крайней мере одну неотрицательную функцию.

Определение 23.1. Сильно непрерывная полугруппа операторов $\mathbf{T}_t : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *полугруппой Феллера на* $\mathcal{X}$, если: 1. $\|\mathbf{T}_t\| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$; 2. $\mathbf{T}_t u \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$ и $u \in \mathcal{X}$, $u \geqslant 0$.

Определение 23.2. Линейный оператор $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ называется *генератором* (*инфинитезимальным производящим оператором*) сильно непрерывной полугруппы $\{\mathbf{T}_t\}$, если

$$\mathbf{P}u = \lim_{t \to +0} \frac{\mathbf{T}_t u - u}{t}, \quad \mathrm{D}(\mathbf{P}) = \{u \in \mathcal{X} : \text{предел в } \mathcal{X} \text{ существует}\}.$$

Теорема 23.1 (теорема Хилле—Иосиды, см. теорему 9.3.1 в [102])**.**

1. *Пусть* $\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *— генератор полугруппы Феллера на* $\mathcal{X}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

   (a) *Область определения* $\mathrm{D}(\mathbf{P})$ *плотна в* $\mathcal{X}$.

(b) *Для любого* $q > 0$ *оператор* $q\mathbf{I} - \mathbf{P}$ *имеет ограниченный обратный* $(q\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ *и* $\|(q\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}\| \leqslant 1/q$.

(c) *Оператор* $(q\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $q > 0$, *неотрицательный.*

2. *Если* $\mathbf{P}$ — *линейный оператор из* $\mathcal{X}$ *в* $\mathcal{X}$, *удовлетворяющий условию* (a) *и существует такая константа* $q_0 \geqslant 0$, *что условия* (b) *и* (c) *выполнены при* $q > q_0$, *то* $\mathbf{P}$ — *генератор некоторой полугруппы Феллера на* $\mathcal{X}$, *которая однозначно определена оператором* $\mathbf{P}$.

23.2. Постановка нелокальных задач

Пусть $p_{jk}, p_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — *вещественнозначные* функции, и пусть $p_{jk} = p_{kj}$, $j, k = 1, 2$. В этой главе будем рассматривать дифференциальный оператор *второго* порядка

$$\mathbf{P}(y, D)u = \sum_{j,k=1}^{2} p_{jk}(y) u_{y_j y_k}(y) + \sum_{j=1}^{2} p_j(y) u_{y_j}(y) + p_0(y)u(y). \tag{23.1}$$

Условие 23.1. *1. Существует такая константа* $c > 0$, *что* $\sum\limits_{j,k=1}^{2} p_{jk}(y)\xi_j\xi_k \geqslant c|\xi|^2$ *для* $y \in \overline{G}$ *и* $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. *2.* $p_0(y) \leqslant 0$, $y \in \overline{G}$.

Пусть Ω_{is} $(i = 1, \ldots, N,\ s = 1, \ldots, S_i)$ — диффеоморфизмы класса C^∞, удовлетворяющие условию 6.3.

Введем нелокальные операторы $\mathbf{B}_i u = \sum\limits_{s=1}^{S_i} b_{is}(y) u(\Omega_{is}(y))$ для $y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ и $\mathbf{B}_i u = 0$ для $y \in \Gamma_i \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$, где $b_{is} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — вещественнозначные функции, $\operatorname{supp} b_{is} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$.

Условие 23.2. *Имеют место следующие соотношения*:

$$b_{is}(y) \geqslant 0, \qquad \sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y) \leqslant 1, \qquad y \in \overline{\Gamma_i}; \tag{23.2}$$

$$\sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(g) + \sum_{s=1}^{S_j} b_{js}(g) < 2, \quad g \in \overline{\Gamma_i} \cap \overline{\Gamma_j} \subset \mathcal{K}, \quad \text{если } i \neq j \text{ и } \overline{\Gamma_i} \cap \overline{\Gamma_j} \neq \varnothing. \tag{23.3}$$

Будем изучать нелокальную задачу

$$\mathbf{P}(y, D)u - qu = f(y),\ y \in G; \qquad u|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i u = 0,\ y \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, N, \tag{23.4}$$

где $q \geqslant 0$, и ту же задачу, но с неоднородными нелокальными условиями.

Прежде чем рассматривать задачу (23.4) в пространствах непрерывных функций, изучим ее в весовых пространствах. Рассмотрим ограниченный оператор $\mathbf{L}(q) = \mathbf{L}_{l+1-\delta}(q) : H^{l+2}_{l+1-\delta}(G) \to \mathcal{H}^l_{l+1-\delta}(G, \partial G)$, заданный формулой

$$\mathbf{L}(q)u = \{\mathbf{P}(y, D)u - qu,\ u|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i u\}, \quad q > 0,$$

где $H^{l+2}_{l+1-\delta}(G)$ и $\mathcal{H}^l_{l+1-\delta}(G, \partial G)$ — пространства, определенные в (5.21), с нормами (5.22), зависящими от параметра $q > 0$.

В п. 23.3 будет доказан следующий результат.

Теорема 23.2. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 23.2*, и пусть* $l \geqslant 0$ *фиксировано. Тогда для любого достаточно малого* $\delta \geqslant 0$ *существует такое* $q_1 > 0$*, что оператор* $\mathbf{L}(q)$ *имеет ограниченный обратный при* $q \geqslant q_1$ *и*

$$c_1 \|\mathbf{L}(q)u\|_{\mathcal{H}^l_{l+1-\delta}(G,\partial G)} \leqslant \|u\|_{H^{l+2}_{l+1-\delta}(G)} \leqslant c_2 \|\mathbf{L}(q)u\|_{\mathcal{H}^l_{l+1-\delta}(G,\partial G)}, \quad q \geqslant q_1, \tag{23.5}$$

где $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* u *и* q.

Следствие 23.1 (локальная априорная оценка)**.** *Пусть* G_1 *и* G_2 *— такие подобласти области* G*, что* $G_1 \subset G_2$ *и* $\operatorname{dist}(\partial G_1 \setminus \partial G,\ \partial G_2 \setminus \partial G) > 0$*. Тогда при всех* $q \geqslant q_1$ *имеет место априорная оценка*

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{l+2}_a(G_1)} \leqslant c\Big(&\|\mathbf{P}(y, D)u - qu\|_{H^l_a(G_2)} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \|u|_{\Gamma_i}\|_{H^{l+3/2}_a(\Gamma_i \cap \overline{G_2})} + q^{-1/2}\|u\|_{H^{l+2}_a(G_2)}\Big), \end{aligned} \tag{23.6}$$

где $H^{l+2}_a(G_j) = H^{l+2}_a(G_j, \mathcal{K})$*,* $H^l_a(G_2) = H^l_a(G_2, \mathcal{K})$*,* $H^{l+3/2}_a(\Gamma_i \cap \overline{G_2}) = H^{l+3/2}_a(\Gamma_i \cap \overline{G_2}, \mathcal{K})$ $q_1 > 0$ *достаточно велико,* $c > 0$ *не зависит ни от* u*, ни от* q*. Если* $\Gamma_i \cap \overline{G_2} = \varnothing$*, то в* (23.6) *слагаемое* $\|u|_{\Gamma_i}\|_{H^{l+3/2}_a(\Gamma_i \cap \overline{G_2})}$ *отсутствует.*

Доказательство. Рассмотрим срезающую функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\zeta(y) = 1$ при $y \in \overline{G_1}$ и $\zeta(y) = 0$ при $y \in G \setminus \overline{G_2}$. Применяя теорему 23.2 при $\mathbf{B}_i = 0$ и используя формулу Лейбница, получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{l+2}_a(G_1)} &\leqslant \|\zeta u\|_{H^{l+2}_a(G)} \leqslant \\ &\leqslant k_1 \left(\|\mathbf{P}(y, D)(\zeta u) - q\zeta u\|_{H^l_a(G)} + \sum_{i=1}^N \|(\zeta u)|_{\Gamma_i}\|_{H^{l+3/2}_a(\Gamma_i)} \right) \leqslant \\ &\leqslant k_2 \left(\|\mathbf{P}(y, D)u - qu\|_{H^l_a(G_2)} + \sum_{i=1}^N \|u|_{\Gamma_i}\|_{H^{l+3/2}_a(\Gamma_i \cap \overline{G_2})} + \|u\|_{H^{l+1}_a(G_2)} \right), \end{aligned}$$

где $k_1, k_2 > 0$ не зависят ни от u, ни от q. С другой стороны, по лемме 7.1 в [23] имеем

$$\|u\|_{H_a^{l+1}(G_2)} \leqslant q^{-1/2} \|u\|_{H_a^{l+2}(G_2)}.$$

Из этих двух неравенств вытекает утверждение следствия. □

23.3. Нелокальные задачи в весовых пространствах

Обозначим через $u_j(y)$ функцию $u(y)$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$. Если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$, $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$ и $\Omega_{is}(y) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$, то обозначим функцию $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$. Тогда нелокальная задача (23.4) примет следующий вид в ε-окрестности орбиты $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{P}(y, D)u_j - qu_j = f(y), \quad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap G,$$

$$u_j(y) - \sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y) u_k(\Omega_{is}(y)) = 0, \quad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap \Gamma_i,$$
$$i \in \{1 \leqslant i \leqslant N : g_j \in \overline{\Gamma_i}\}, \ j = 1, \ldots, N.$$

Пусть $y \mapsto y'(g_j)$ — замена переменных из п. 6.1. Введем функции $U_j(y') = u(y(y'))$ и $F_j(y') = f(y(y'))$ для $y' \in K_j^\varepsilon$, где $\sigma = 1$ ($\sigma = 2$), если преобразование $y \mapsto y'(g_j)$ отображает Γ_i на сторону γ_{j1} (γ_{j2}) угла K_j. Переобозначим y' через y. Тогда в силу условия 6.3 задача (23.4) примет вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_j(y, D)U_j - qU_j = F_j(y), \quad y \in K_j^\varepsilon; \\ U_j(y) - \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_{j\sigma k}} &B_{j\sigma ks}(y) U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) = 0, \qquad y \in \gamma_{j\sigma}^\varepsilon. \end{aligned} \tag{23.7}$$

Здесь $\mathbf{P}_j(y, D)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с вещественнозначными коэффициентами класса C^∞, причем главная однородная часть оператора $\mathbf{P}_j(0, D)$ есть оператор Лапласа Δ; $B_{j\sigma ks}(y)$ — гладкие функции; $\mathcal{G}_{j\sigma ks}$ — оператор поворота на угол $\omega_{j\sigma ks}$ и гомотетии с коэффициентом $\chi_{j\sigma ks} > 0$, причем $|(-1)^\sigma \omega_j + \omega_{j\sigma ks}| < \omega_k$.

Следуя [23], «заморозим» коэффициенты задачи (23.7) в точке $y = 0$, заменим операторы $\mathbf{P}_j(0, D)$ их главными однородными частями и положим $q = 1$. Таким образом, мы рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\Delta U_j - U_j = F_j(y), \quad y \in K_j; \\ \mathcal{B}_{j\sigma} U \equiv U_j(y) - \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_{j\sigma k}} &b_{j\sigma ks} U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) = 0, \qquad y \in \gamma_{j\sigma}, \end{aligned} \tag{23.8}$$

где $U = (U_1, \dots, U_N)$ и $b_{j\sigma ks} = B_{j\sigma ks}(0)$. Из условия 23.2 следует, что

$$b_{j\sigma ks} \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{S_{j\sigma k}} b_{j\sigma ks} \leqslant 1, \qquad \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{S_{j1k}} b_{j1ks} + \sum_{s=1}^{S_{j2k}} b_{j2ks} \right) < 2. \tag{23.9}$$

Задачу (23.8) следует рассматривать в весовых пространствах с неоднородным весом. Обозначим через $E_a^l(K_j)$ пополнение множества $C_0^\infty(\overline{K_j} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|v\|_{E_a^l(K_j)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int\limits_{K_j} |y|^{2a} (|y|^{2(|\alpha|-l)} + 1) |D^\alpha v(y)|^2 \, dy \right)^{1/2},$$

где $l \geqslant 0$ целое и $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через $E_a^{l-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ ($l \geqslant 1$ целое) пространство следов на $\gamma_{j\sigma}$ (с инфимум-нормой). Введем пространства вектор-функций

$$\mathcal{E}_a^{l+2}(K) = \prod_{j=1}^{N} E_a^{l+2}(K_j), \quad \mathcal{E}_a^l(K, \gamma) = \prod_{j=1}^{N} \Big(E_a^l(K_j) \times \prod_{\sigma=1,2} E_a^{l+3/2}(\gamma_{j\sigma}) \Big).$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{L} : \mathcal{E}_{1-\delta}^2(K) \to \mathcal{E}_{1-\delta}^0(K, \gamma)$, заданный формулой $\mathcal{L}U = \{\Delta U_j - U_j,\ \mathcal{B}_{j\sigma} U\}$.

Наша цель — доказать, что оператор $\mathcal{L}$ — изоморфизм для всех достаточно малых $\delta \geqslant 0$. Для этого рассмотрим аналитическую оператор-функцию $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) : \mathcal{W}_2^2(-\overline{\omega}, \overline{\omega}) \to \mathcal{W}^0[-\overline{\omega}, \overline{\omega}]$, заданную формулой (ср. (6.18))

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi = \Big\{ \varphi_j'' - \lambda^2 \varphi_j,\ \varphi_j((-1)^\sigma \omega_j) - \sum_{k,s} (\chi_{j\sigma ks})^{i\lambda} b_{j\sigma ks} \varphi_k((-1)^\sigma \omega_j + \omega_{j\sigma ks}) \Big\}.$$

Лемма 23.1. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 23.2. *Тогда на прямой* $\operatorname{Im} \lambda = 0$ *нет собственных значений оператора* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Доказательство. 1. Предположим, что $\lambda_0 \neq 0$ — вещественное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ (случай $\lambda_0 = 0$ проще и рассматривается аналогично). Пусть $\varphi(\omega)$ — соответствующий собственный вектор. Запишем его в виде $\varphi(\omega) = \varphi^1(\omega) + i\varphi^2(\omega)$, где $\varphi^1(\omega)$ и $\varphi^2(\omega)$ — вещественнозначные функции класса C^∞. Легко видеть, что функция $U = r^{i\lambda_0}\varphi(\omega) = e^{i\lambda_0 \ln r}\varphi(\omega)$ является решением задачи

$$\Delta U_j = 0,\ y \in K_j; \qquad \mathcal{B}_{j\sigma} U = 0,\ y \in \gamma_{j\sigma}. \tag{23.10}$$

Представим функцию U в виде $U = V + iW$, где $V = \cos(\lambda_0 \ln r)\varphi^1(\omega) - \sin(\lambda_0 \ln r)\varphi^2(\omega)$, $W = \cos(\lambda_0 \ln r)\varphi^2(\omega) + \sin(\lambda_0 \ln r)\varphi^1(\omega)$. Так как коэффициенты в (23.10) вещественны, то V (а также W) будет решением задачи

$$\Delta V_j = 0,\ y \in K_j; \qquad \mathcal{B}_{j\sigma} V = 0,\ y \in \gamma_{j\sigma}. \tag{23.11}$$

Положим $M = \max\limits_{j=1,\dots,N} \sup\limits_{y\in K_j} |V_j(y)|$. Докажем, что $M = 0$. Предположим противное: пусть $M > 0$.

2. Если $|V_j(y^0)| = M$ при некотором j и $y^0 \in K_j$, то $V_j(y) \equiv M$ по принципу максимума, и из нелокальных условий в (23.11) получаем

$$M = |V_j(y^0)| = |V_j|_{\gamma_{j\sigma}}| \leqslant M \sum_{k,s} b_{j\sigma ks}, \qquad \sigma = 1, 2. \tag{23.12}$$

Однако $0 \leqslant \sum\limits_{k,s} b_{j\sigma ks} < 1$ при $\sigma = 1$ или 2 в силу условий (23.9), что противоречит (23.12).

3. Пусть $|V_j(y^0)| = M$ при некотором j, $\sigma = 1$ или 2 и $y^0 \in \gamma_{j\sigma}$. В этом случае, учитывая (23.9), снова из нелокальных условий в (23.11) получаем

$$M = |V_j(y^0)| \leqslant \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} |V_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y^0)| \leqslant M \tag{23.13}$$

при $\sigma = 1$ или 2. Следовательно, неравенства в (23.13) принимают вид равенств, но тогда $\sum\limits_{k,s} b_{j\sigma ks} = 1$ и $|V_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y^0)| = M$ по крайней мере для одной пары (k, s). По доказанному это невозможно, так как $\mathcal{G}_{j\sigma ks} y^0 \in K_k$.

4. Наконец, предположим, что существует последовательность $\{y^s\}_{s=1}^{\infty} \subset K_j$ такая, что $|V_j(y^s)| \to M$ для некоторого j при $|y^s| \to 0$ или $|y^s| \to \infty$.

Заметим, что функция V_j периодична относительно $\ln r$, т.е. функция V_j полностью определяется своими значениями на множестве

$$\hat{K}_j = \overline{K_j} \cap \left\{1 \leqslant r \leqslant e^{2\pi/\lambda_0}\right\}.$$

Так как множество $\hat{K}_j$ компактно, существует такая последовательность $\{\hat{y}^s\}_{s=1}^{\infty} \subset \hat{K}_j$, что $|V_j(\hat{y}^s)| \to M$ при $\hat{y}^s \to \hat{y}$, где $\hat{y} \in \hat{K}_j$. Из непрерывности $V_j(y)$ на компакте $\hat{K}_j$ вытекает, что $|V_j(\hat{y})| = M$. Снова получили противоречие с доказанным выше.

5. Из пп. 1–4 доказательства следует, что $M = 0$. Следовательно, $V = 0$, т.е. $\varphi^1(\omega) = \varphi^2(\omega) = 0$. □

Лемма 23.2. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 23.2. *Тогда оператор* $\mathcal{L} : \mathcal{E}_1^2(K) \to \mathcal{E}_1^0(K, \gamma)$ *— изоморфизм.*

Доказательство. 1. Вначале покажем, что оператор $\mathcal{L} : \mathcal{E}_1^2(K) \to \mathcal{E}_1^0(K, \gamma)$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \mathcal{L} = 0$. Рассмотрим семейство операторов $\mathcal{L}_t : \mathcal{E}_1^2(K) \to \mathcal{E}_1^0(K, \gamma)$, заданных формулой

$$\mathcal{L}_t U = \left\{\Delta U_j - U_j,\ U_j|_{\gamma_{j\sigma}} - t \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y)|_{\gamma_{j\sigma}}\right\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Аналогично оператору $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ введем операторы $\tilde{\mathcal{L}}_t(\lambda)$. По лемме 23.1 на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 0$ нет собственных значений операторов $\tilde{\mathcal{L}}_t(\lambda)$. Следовательно, операторы $\mathcal{L}_t$ фредгольмовы по теореме 9.1 в [83]. В силу гомотопической устойчивости индекса фредгольмовых операторов имеем $\operatorname{ind}\mathcal{L}_t = \mathrm{const}$, $t \in [0,1]$. Поскольку локальный оператор $\mathcal{L}_0$ — изоморфизм (см., например, § 10.3 в [83]), то $\operatorname{ind}\mathcal{L} = \operatorname{ind}\mathcal{L}_0 = 0$.

2. Осталось доказать, что $\dim\ker\mathcal{L} = 0$. Пусть $U \in \mathcal{E}_1^2(K)$ — вещественнозначное решение задачи

$$\Delta U_j = U_j,\ y \in K_j; \qquad \mathcal{B}_{j\sigma}U = 0,\ y \in \gamma_{j\sigma}. \tag{23.14}$$

По теореме о внутренней гладкости функции U_j бесконечно дифференцируемы в K_j. Докажем, что U_j непрерывны на $\overline{K_j}$.

Так как на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 0$ нет собственных значений $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то из [62] вытекает существование такого числа $\delta \in [0,1]$, что в полосе $-1-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ содержится не более конечного множества собственных значений $\{\lambda_k\}$ оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, причем $-1-\delta < \operatorname{Im}\lambda_k < 0$. Учитывая, что $U_j \in E_1^2(K_j) \subset H_1^2(K_j)$ — решение задачи (23.14) с правыми частями $U_j \in E_1^2(K_j) \subset H_{-\delta}^0(K_j)$, и применяя теорему 2.2 в [13] (об асимптотике решений нелокальных задач), получим

$$U = \sum_k \sum_{q=1}^{J_k} \sum_{m=0}^{\varkappa_{qk}-1} c_k^{(m,q)} W_k^{(m,q)} + U', \quad W_k^{(m,q)}(\omega, r) = r^{i\lambda_k} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{1}{\nu!}(i\ln r)^\nu \varphi_k^{(m-\nu,q)}(\omega), \tag{23.15}$$

где $\varphi_k^{(0,q)}, \ldots, \varphi_k^{(\varkappa_{qk}-1,q)} \in \prod_j C^\infty([-\omega_j, \omega_j])$ — жорданова цепочка, отвечающая собственному значению λ_k, $c_k^{(m,q)}$ — константы и $U_j' \in H_{-\delta}^2(K_j)$. Отсюда и из теоремы вложения Соболева следует, что U_j непрерывны на $\overline{K_j}$ и $U_j(0) = 0$.

Далее, покажем, что

$$|U_j(y)| \to 0 \qquad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{23.16}$$

Так как $U \in \mathcal{E}_1^2(K)$, то $U \in \mathcal{E}_1^0(K)$. Отсюда, из того факта, что U — решение однородной задачи (23.14) и из теоремы 3.2 в [83] получаем, что $U \in \mathcal{E}_3^2(K)$. Фиксируя произвольное сколь угодно большое $a \geqslant 1$ и повторяя эти рассуждения конечное число раз, имеем $U \in \mathcal{E}_a^2(K)$. Полагая $V(\omega, r) = U(\omega, r^{-1})$ и используя теорему вложения Соболева и произвольность a, видим, что функции $V_j(y)$ непрерывны в начале координат и $|V_j(y)| \to 0$ при $|y| \to 0$. Отсюда вытекает (23.16)

3. Обозначим $M = \max\limits_{j=1,\dots,N} \sup\limits_{y\in\overline{K_j}} |U_j(y)|$. Покажем, что $M = 0$. Предположим противное: пусть $M > 0$. В силу доказанных выше свойств U_j, каждая из функций $|U_j(y)|$ достигает максимума в некоторой точке $y^0 \in \overline{K_j} \setminus \{0\}$. Если $|U_j(y^0)| = M$ при некотором j и $y^0 \in K_j$, то $U_j(y) \equiv \mathrm{const}$ по принципу максимума. Используя дифференциальное уравнение в (23.14), получаем $M \equiv |U_j| = |\Delta U_j| = 0$.

Если $|U_j(y^0)| = M$ при $y^0 \in \gamma_{j\sigma}$, где $\sigma = 1$ или 2, то, используя нелокальные условия в (23.14) и неравенства (23.9), получим

$$M = |U_j(y^0)| \leqslant \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} |U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y^0)| \leqslant M. \tag{23.17}$$

Таким образом неравенства в (23.17) принимают вид равенств, откуда следует, что $\sum\limits_{k,s} b_{j\sigma ks} = 1$ и $|U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y^0)| = M$ по крайней мере для одной пары (k, s). Однако $\mathcal{G}_{j\sigma ks} y^0 \in K_k$, что невозможно по доказанному. □

Следствие 23.2. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 23.2. *Тогда существует такое* $\delta_0 > 0$, *что при* $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ *оператор* $\mathcal{L} : \mathcal{E}^{l+2}_{l+1-\delta}(K) \to \mathcal{E}^{l}_{l+1-\delta}(K, \gamma)$, $l = 0, 1, 2, \dots,$ — *изоморфизм.*

Доказательство. По лемме 23.2 оператор $\mathcal{L} : \mathcal{E}^2_1(K) \to \mathcal{E}^0_1(K, \gamma)$ — изоморфизм. С другой стороны, в силу леммы 23.1 и дискретности спектра $\tilde{L}(\lambda)$ (см. [62]) существует такое $\delta_0 > 0$, что при в полосе $-\delta_0 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$ нет собственных значений $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Аналогично предложению 2.8 в [46, гл. 6] можно показать, что при $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ оператор $\mathcal{L} : \mathcal{E}^2_{1-\delta}(K) \to \mathcal{E}^0_{1-\delta}(K, \gamma)$ — изоморфизм. Тогда в силу теорем 9.2 и 9.3 в [83] оператор $\mathcal{L} : \mathcal{E}^{l+2}_{l+1-\delta}(K) \to \mathcal{E}^{l}_{l+1-\delta}(K, \gamma)$ — также изоморфизм. □

Доказательство теоремы 23.2. Теорема вытекает из следствия 23.2 и теоремы 8.1 в [23]. □

23.4. Нелокальные задачи в пространствах непрерывных функций

Пусть число $\delta \in [0, 1]$ выбрано таким образом, что ни в полосе $-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$, ни на прямой $\operatorname{Im}\lambda = -1 - \delta$ нет собственных значений оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Существование такого числа вытекает из леммы 23.1 и дискретности спектра $\tilde{L}(\lambda)$ (см. лемму 6.1).

Пусть q_1 — число из теоремы 23.2. Вначале мы построим аналог барьерной функции для нелокальной задачи. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\mathbf{P}(y,D)v - q_1 v = 0,\ y \in G; \qquad v|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i v = 1,\ y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots,N. \tag{23.18}$$

Лемма 23.3. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 23.2. *Тогда задача* (23.18) *имеет такое ограниченное решение* $v \in C^\infty(\overline{G} \setminus \mathcal{K})$, *что* $\inf\limits_{y \in \overline{G} \setminus \mathcal{K}} v(y) > 0$.

Доказательство. 1. Рассмотрим модельную задачу

$$\Delta W_j^1 = 0,\ y \in K_j^\varepsilon; \qquad W_j^1(y) - \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} W_k^1(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) = 1,\ y \in \gamma_{j\sigma}^\varepsilon. \tag{23.19}$$

Будем искать решение задачи (23.19) в виде

$$W_j^1 = \varphi_j(\omega), \qquad |\omega| < \omega_j,\ j = 1,\dots,N. \tag{23.20}$$

Очевидно, функции $\varphi_1(\omega),\dots,\varphi_N(\omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_j''(\omega) = 0,\ |\omega| < \omega_j; \qquad \varphi_j((-1)^\sigma \omega_j) - \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} \varphi_k((-1)^\sigma \omega_j + \omega_{j\sigma ks}) = 1, \tag{23.21}$$

или, что то же самое, $\tilde{\mathcal{L}}(0)\varphi = \{\tilde{F}_j, \tilde{F}_{j\sigma}\}$, где $\tilde{F}_j = 0$, $\tilde{F}_{j\sigma} = 1$. В силу леммы 23.1 число $\lambda = 0$ не является собственным значением $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Так как оператор $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ фредгольмов и имеет нулевой индекс [62], то существует единственное (вещественнозначное) решение $\varphi \in \prod\limits_j C^\infty([-\omega_j, \omega_j])$ задачи (23.21). Очевидно, функции $\varphi_j(\omega)$ линейны. Используя нелокальные условия в (23.21) и соотношения (23.9), нетрудно проверить, что $\varphi_j(\omega) > 0$ при $\omega \in [-\omega_j, \omega_j]$.

2. Рассмотрим такую функцию $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что $\xi(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K})$ и $\operatorname{supp} \xi \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$.

Будем искать решение v исходной задачи (23.18) в виде

$$v(y) = w^1(y) + v^1(y), \qquad y \in G, \tag{23.22}$$

где $w^1(y) = \xi(y) W_j^1(y'(y))$, $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$, $g_j \in \mathcal{K}$, $y' \mapsto y(g_j)$ — преобразование, обратное к преобразованию $y \mapsto y'(g_j)$ из § 23.2, и функция w^1 продолжена нулем на $G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$; v^1 — неизвестная функция.

Из соотношений (23.18) и (23.22) следует, что функция v^1 удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{P}(y,D)v^1 - q_1 v^1 = f^1(y),\ y \in G; \qquad v^1|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i v^1 = f_i^1(y),\ y \in \Gamma_i, \tag{23.23}$$

где

$$f^1 = -\mathbf{P}(y,D)w^1 + q_1 w^1, \qquad f_i^1 = 1 - w^1|_{\Gamma_i} + \mathbf{B}_i w^1|_{\Gamma_i}. \tag{23.24}$$

Положим $V_j^1(y') = v^1(y(y'))$, $F_j(y') = f^1(y(y'))$ и $F_{j\sigma}(y') = f_i^1(y(y'))$, $y' \in K_j^\varepsilon$, где $y \mapsto y'(g_j)$ — преобразование из § 23.2, $g_j \in \mathcal{K} \cap \overline{\Gamma_i}$. Переобозначим y' через y. Тогда в силу (23.19) и (23.24) имеем

$$\begin{aligned} F_j(y) &= (\Delta - \mathbf{P}_j(y,D))W_j^1 + q_1 W_j^1, && y \in K_j^{\varepsilon/2}, \\ F_{j\sigma}(y) &= \sum_{k,s} (B_{j\sigma ks}(y) - b_{j\sigma ks}) W_k^1(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y), && y \in K_j^{\varepsilon/2}, \end{aligned} \tag{23.25}$$

где $\mathbf{P}_j(y,D)$ и $B_{j\sigma ks}(y)$ те же, что в (23.7).

Учитывая, что главные однородные части операторов $\mathbf{P}(y,D)_j(0,D)$ совпадают с оператором Лапласа и $B_{j\sigma ks}(0) = b_{j\sigma ks}$ и используя формулу Тейлора, из представления (23.20) и соотношений (23.25) получаем $F_j \in H_{l+1-\delta}^l(K_j^{\varepsilon/2})$ и $F_{j\sigma} \in H_{l+1-\delta}^{l+3/2}(\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon/2})$, т.е. $\{f^1, f_i^1\} \in \mathcal{H}_{l+1-\delta}^l(G, \partial G)$. Следовательно, по теореме 23.2 существует единственное решение $v^1 \in H_{l+1-\delta}^{l+2}(G)$ задачи (23.23). Так как $l \geqslant 0$ произвольно, то по теореме вложения Соболева функция v, определенная в (23.22), принадлежит $C^\infty(\overline{G} \setminus \mathcal{K})$. Очевидно, она будет решением исходной задачи (23.18).

3. Докажем, что $v^1 \in C(\overline{G})$ и $v^1(y) = 0$ при $y \in \mathcal{K}$. В силу (23.23) функции $V_j^1(y)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta V_j^1 &= F_j^1(y) + F_j(y), && y \in K_j^{\varepsilon/2}, \\ V_j^1(y) - \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} V_k^1(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) &= F_{j\sigma}^1(y) + F_{j\sigma}(y), && y \in \gamma_{j\sigma}^{\varepsilon/2}, \end{aligned} \tag{23.26}$$

где $F_j^1 = (\Delta - \mathbf{P}_j(y,D))V_j^1 + q_1 V_j^1$ и $F_{j\sigma}^1 = \sum\limits_{k,s} (B_{j\sigma ks}(y) - b_{j\sigma ks}) V_k^1(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y)$.

Учитывая, что главные однородные части операторов $\mathbf{P}(y,D)_j(0,D)$ совпадают с оператором Лапласа и $B_{j\sigma ks}(0) = b_{j\sigma ks}$ и используя формулу Тейлора еще раз, мы представим правые части задачи (23.26) в виде

$$F_j^1 + F_j = F_j^1 + F_j^2 + r^{-1}\psi_j(\omega), \qquad F_{j\sigma}^1 + F_{j\sigma} = F_{j\sigma}^1 + F_{j\sigma}^2 + \psi_{j\sigma} r, \tag{23.27}$$

где $\psi_j \in C^\infty([-\omega_j, \omega_j])$, $F_j^1 + F_j^2 \in H_{-\delta}^0(K_j^{\varepsilon/2})$ и $\psi_{j\sigma} \in \mathbb{R}$, $F_{j\sigma}^1 + F_{j\sigma}^2 \in H_{-\delta}^{3/2}(\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon/2})$.

Получим асимптотику функций V_j^1. Для этого обозначим через $\{\lambda_k\}$ конечное множество собственных значений $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащих в полосе $-1-\delta < \operatorname{Im}\lambda < -\delta$. Тогда по теореме 2.2 в [13] и лемме 4.3 в [13], примененным к задаче (23.26)

с правой частью (23.27), получим

$$V^1 = r\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\frac{1}{\nu!}(i\ln r)^\nu u^{(\nu)}(\omega) + \sum_k\sum_{q=1}^{J_k}\sum_{m=0}^{\varkappa_{qk}-1} c_k^{(m,q)}W_k^{(m,q)} + V^2, \quad y\in K_j^{\varepsilon/2}, \quad (23.28)$$

где $u^{(\nu)} \in \prod\limits_j C^\infty([-\omega_j,\omega_j])$, функции $W_k^{(m,q)}$ имеют тот же вид, что в (23.15), $c_k^{(m,q)}$ — некоторые константы и $V_j^2 \in H^2_{-\delta}(K_j^{\varepsilon/2})$. Из асимптотической формулы (23.28) и теоремы вложения Соболева получаем $V_j^1 \in C(\overline{K_j^{\varepsilon/2}})$ и $V_j^1(0)=0$. Следовательно, $v^1 \in C(\overline{G})$ и $v^1(0)=0$ при $y\in\mathcal{K}$. В частности, отсюда вытекает, что функция $v = v^1 + w^1$ ограничена.

4. Осталось показать, что $m>0$, где $m = \inf\limits_{y\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}} v(y)$. Предположим противное: пусть $m\leqslant 0$. Рассмотрим такую последовательность $\{y^k\}\subset\overline{G}\setminus\mathcal{K}$, что $v(y^k)\to m$ при $k\to\infty$. Так как последовательность $\{y^k\}$ ограничена, она содержит сходящуюся подпоследовательность (которую мы также обозначим $\{y^k\}$). Пусть $y^k\to y^0$ при $k\to\infty$, где $y^0\in\overline{G}$.

Используя принцип максимума, нелокальные условия в (23.18) и соотношения (23.2), несложно проверить, что $y^0\notin\overline{G}\setminus\mathcal{K}$. Предположим, что $y^0\in\mathcal{K}$. По доказанному в п. 1 найдется такая константа $A>0$, что $w^1(y)\geqslant A$ в некоторой окрестности точки y^0 (за исключением самой точки y^0, где функция w^1 может быть не определена). С другой стороны, в п. 3 доказано, что $v^1(y^0)=0$. Следовательно, $v(y)\geqslant A/2$ в некоторой окрестности y^0 (за исключением, быть может, самой точки y^0). Но в таком случае последовательность $\{v(y^k)\}$ не может сходиться к неположительному числу m. □

Рассмотрим задачу

$$\mathbf{P}(y,D)u - qu = 0,\ y\in G; \qquad u|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i u = \psi_i(y),\ y\in\Gamma_i,\ i=1,\dots,N. \quad (23.29)$$

Следующая теорема играет важную роль при изучении полугрупп Феллера.

Теорема 23.3. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 23.2*, и пусть* $q\geqslant q_1$. *Тогда для любой* $\psi=\{\psi_i\}\in\mathcal{C}_\mathcal{K}(\partial G)$ *существует единственное решение* $u\in C(\overline{G})\cap C^\infty(G)$ *задачи* (23.29). *При этом* $u(y)=0$ *для* $y\in\mathcal{K}$ *и имеет место оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{G})} \leqslant c_1\|\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{K}(\partial G)}, \quad (23.30)$$

где $c_1>0$ *не зависит от* ψ *и* q.

Доказательство. 1. Докажем теорему для бесконечно гладких функций ψ_i, равных нулю в некоторой окрестности множеств $\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$. Общий случай получается предельным переходом. Для указанных функций ψ_i имеем $\psi_i \in H^{3/2}_{-\delta}(\Gamma_i)$. Следовательно, по теореме 23.2 существует единственное решение $u \in H^2_{1-\delta}(G)$ задачи (23.29). В силу (13.22) $u \in C^\infty(\overline{G} \setminus \mathcal{K})$. Пусть $\{\lambda_k\}$ — конечное множество собственных значений $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащих в полосе $-1-\delta < \operatorname{Im}\lambda < -\delta$. Тогда по теореме 2.2 в [13] (об асимптотике решений нелокальных задач) функция u представима вблизи точки $g_j \in \mathcal{K}$ $(j = 1, \dots, N)$ в следующем виде:

$$u(y) = \sum_k \sum_{q=1}^{J_k} \sum_{m=0}^{\varkappa_{qk}-1} c_k^{(m,q)} W_{kj}^{(m,q)} + u'(y), \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j),$$

где $c_k^{(m,q)}$ — некоторые константы, функции $W_{kj}^{(m,q)}(\omega, r)$ имеют тот же вид, что компоненты вектора $W_k^{(m,q)}(\omega, r)$ в (23.15) (ω, r — полярные координаты с полюсом в точке g_j) и $u' \in H^2_{-\delta}(G)$. Таким образом, применяя теорему вложения Соболева, видим, что $u \in C(\overline{G})$ и

$$u(y) = 0, \qquad y \in \mathcal{K}. \tag{23.31}$$

2. Докажем оценку (23.30). Положим $M = \|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)}$ и предположим, что $M > 0$.

Обозначим $w_\pm(y) = Mv(y) \pm u(y)$, где $v(y)$ — функция из леммы 23.3. В силу равенств (23.18) и (23.29) функции $w_\pm$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(y, D)w_\pm - qw_\pm &= M(q_1 - q)v(y), \quad y \in G, \\ w_\pm|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i w_\pm &= M \pm \psi_i(y), \qquad y \in \Gamma_i,\ i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Так как $q_1 \leqslant q$, $v(y) > 0$, $y \in G$ (по лемме 23.3) и $M \geqslant \pm\psi_i$, то

$$\mathbf{P}(y, D)w_\pm - qw_\pm \leqslant 0,\ y \in G, \qquad w_\pm|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i w_\pm \geqslant 0,\ y \in \Gamma_i,\ i = 1, \dots, N. \tag{23.32}$$

Покажем, что $m_\pm = \inf\limits_{y \in \overline{G} \setminus \mathcal{K}} w_\pm(y) \geqslant 0$. Предположим противное: пусть $m_\pm < 0$. Как и в п. 4 из доказательства леммы 23.3 рассмотрим такую последовательность $\{y^k\} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}$, что $y^k \to y^0$ и $w_\pm(y_k) \to m_\pm$ при $k \to \infty$, где $y^0 \in \overline{G}$. Возможны следующие три случая: $y^0 \in G$, $y^0 \in \Gamma_i$ при некотором i и $y^0 \in \mathcal{K}$.

Пусть $y^0 \in G$. Так как $w_\pm(y)$ непрерывна в G, то она достигает отрицательного минимума m внутри области. Из первого неравенства в (23.32) и принципа максимума вытекает, что $w_\pm(y) = m_\pm$ при $y \in G$. Отсюда, учитывая

условие 23.1, получаем $\mathbf{P}(y,D)w_\pm(y^0)-qw_\pm(y^0)=p_0(y^0)m_\pm-qm_\pm\geqslant -qm_\pm>0$, что противоречит первому неравенству в (23.32).

Пусть $y^0\in\Gamma_i$ при некотором i. Тогда из (23.32) и (23.2) получим

$$m_\pm=w_\pm(y^0)\geqslant\sum_{s=1}^{S_i}b_{is}(y^0)w_\pm(\Omega_{is}(y^0))\geqslant m_\pm\sum_{s=1}^{S_i}b_{is}(y^0)\geqslant m_\pm. \tag{23.33}$$

Следовательно, неравенства (23.33) принимают вид равенств, т. е. $\sum\limits_{s=1}^{S_i}b_{is}(y^0)=1$ и $w_\pm(\Omega_{is}(y^0))=m_\pm$ при некотором s, т.е. функция $w_\pm(y)$ достигает отрицательного минимума во внутренней точке $\Omega_{is}(y^0)\in G$. По доказанному выше это невозможно.

Наконец, предположим, что $y^0\in\mathcal{K}$. По лемме 23.3 $m=\inf\limits_{y'\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}}v(y')>0$, откуда получим

$$Mv(y)\geqslant Mm>0,\qquad y\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}.$$

Из последнего неравенства и (23.31) вытекает, что

$$w_\pm(y)=Mv(y)\pm u(y)\geqslant Mm/2>0$$

в некоторой окрестности y^0 (за исключением самой точки y^0, где $w_\pm(y)$ может быть не определена). Следовательно, последовательность $\{w_\pm(y^k)\}$ не может сходиться к отрицательному числу $m_\pm$.

Итак, доказано, что $\inf\limits_{y\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}}w_\pm(y)\geqslant 0$, откуда

$$|u(y)|\leqslant Mv(y)\leqslant M\sup_{y'\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}}v(y'),\qquad y\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}.$$

Так как функция $u(y)$ непрерывна в $\overline{G}$, то из последнего неравенства получаем оценку (23.30), где $c_1=\sup\limits_{y'\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}}v(y')$. Очевидно, константа $c_1>0$ не зависит от ψ и q. □

Рассмотрим нелокальную задачу

$$\mathbf{P}(y,D)u-qu=f_0(y),\ y\in G;\qquad u|_{\Gamma_i}-\mathbf{B}_iu=\psi_i(y),\ y\in\Gamma_i,\ i=1,\dots,N. \tag{23.34}$$

Следующий результат вытекает из теорем 23.2 и 23.3 и асимптотических свойств решений нелокальных задач [13].

Следствие 23.3. *Пусть выполнены условия* 23.1, 23.2. *Тогда найдется такое число* $q_1 > 0$, *что для любых* $f_0 \in C(\overline{G})$, $\psi = \{\psi_i\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)$ *и* $q \geqslant q_1$ *существует единственное решение* $u \in C_{\mathcal{K}}(\overline{G}) \cap W^2_{\mathrm{loc}}(G)$ *задачи* (23.34). *Кроме того, если* $f_0 = 0$, *то* $u \in C_{\mathcal{K}}(\overline{G}) \cap C^\infty(G)$ *и имеет место оценка*

$$\|u\|_{C_{\mathcal{K}}(\overline{G})} \leqslant c_1 \|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)}, \tag{23.35}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* ψ *и* q.

24. Ограниченные возмущения диффузионных процессов

24.1. Задачи с нелокальными членами, носитель которых содержится вблизи точек сопряжения

В дальнейшем нам понадобится принцип максимума, который мы сформулируем в следующем виде.

Принцип максимума 24.1 (см. теорему 9.6 в [11]). *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^2$ — *ограниченная или неограниченная область, и пусть условие* 23.1 *выполнено для области* D. *Если функция* $u \in C(D)$ *достигает положительного максимума в точке* $y^0 \in D$ *и*[1] $\mathbf{P}(y, D)u \in C(D)$, *то* $\mathbf{P}(y, D)u(y^0) \leqslant 0$.

Сформулируем некоторые вспомогательные результаты, которые понадобятся в следующих параграфах.

Пусть $u \in C^\infty(G) \cap C_{\mathcal{K}}(\overline{G})$ — решение задачи (23.34) с $f_0 = 0$ и $\psi = \{\psi_i\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)$. Обозначим $u = \mathbf{S}_q \psi$. В силу следствия 23.3 оператор

$$\mathbf{S}_q : \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G) \to C_{\mathcal{K}}(\overline{G}), \qquad q \geqslant q_1,$$

ограничен и $\|\mathbf{S}_q\| \leqslant c_1$, где $c_1 > 0$ не зависит от q.

Лемма 24.1. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 23.2, *пусть* Q_1 *и* Q_2 — *такие замкнутые множества, что* $Q_1 \subset \partial G$, $Q_2 \subset \overline{G}$ *и* $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, *и пусть* $q \geqslant q_1$. *Тогда для всех* $\psi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)$ *таких, что* $\operatorname{supp}(\mathbf{S}_q \psi)|_{\partial G} \subset Q_1$, *выполнено неравенство*

$$\|\mathbf{S}_q \psi\|_{C(Q_2)} \leqslant \frac{c_2}{q} \|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)}, \qquad q \geqslant q_1,$$

где $c_2 > 0$ *не зависит от* ψ *и* q.

[1] Здесь и далее оператор $\mathbf{P}(y, D)$ действует в смысле обобщенных функций.

Доказательство. Используя[2] лемму 1.3 в [10] и следствие 23.3, получим

$$\|\mathbf{S}_q\psi\|_{C(Q_2)} \leqslant \frac{k}{q}\|(\mathbf{S}_q\psi)|_{\partial G}\|_{C(\partial G)} \leqslant \frac{k}{q}\|\mathbf{S}_q\psi\|_{C(\overline{G})} \leqslant \frac{kc_1}{q}\|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)}, \qquad q \geqslant q_1, \tag{24.1}$$

где число q_1 из следствия 23.3 предполагается достаточно большим (настолько, чтобы лемма 1.3 в [10] была справедлива при $q \geqslant q_1$); число $k = k(q_1)$ не зависит от ψ и q. □

Лемма 24.2. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 23.2*, пусть* Q_1 *и* Q_2 *те же, что в лемме* 24.1*, и пусть* $q \geqslant q_1$*. Предположим также, что* $Q_2 \cap \mathcal{K} = \varnothing$*. Тогда для всех* $\psi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)$ *таких, что* $\operatorname{supp}\psi \subset Q_1$*, имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{S}_q\psi\|_{C(Q_2)} \leqslant \frac{c_3}{q}\|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(Q_1)}, \qquad q \geqslant q_1,$$

где $c_3 > 0$ *не зависит от* ψ *и* q*.*

Доказательство. 1. Рассмотрим такое число $\sigma > 0$, что

$$\operatorname{dist}(Q_1, Q_2) > 3\sigma, \qquad \operatorname{dist}(\mathcal{K}, Q_2) > 3\sigma. \tag{24.2}$$

Введем функцию $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $0 \leqslant \xi(y) \leqslant 1$, $\xi(y) = 1$ при $\operatorname{dist}(y, Q_2) \leqslant \sigma$, и $\xi(y) = 0$ при $\operatorname{dist}(y, Q_2) \geqslant 2\sigma$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathbf{P}(y, D)v - qv = 0,\ y \in G; \qquad v(y) = \xi(y)u(y),\ y \in \partial G, \tag{24.3}$$

где $u = \mathbf{S}_q\psi \in C_{\mathcal{K}}(\overline{G})$. Применяя следствие 23.3 (с $\mathbf{B}_i = 0$), видим, что существует единственное решение $v \in C^\infty(G) \cap C_{\mathcal{K}}(\overline{G})$ задачи (24.3). Из принципа максимума 24.1 и определения функции ξ следует, что

$$\|v\|_{C(\overline{G})} \leqslant \|\xi u\|_{C(\partial G)} \leqslant \max_{i=1,\dots,N} \|u|_{Q_{2,2\sigma}\cap\overline{\Gamma_i}}\|_{C(Q_{2,2\sigma}\cap\overline{\Gamma_i})}, \tag{24.4}$$

где $Q_{2,2\sigma} = \{y \in \partial G : \operatorname{dist}(y, Q_2) \leqslant 2\sigma\}$.

Так как $\operatorname{supp}\psi \cap Q_{2,2\sigma} = \varnothing$, то

$$u - \mathbf{B}_i u = 0, \qquad y \in Q_{2,2\sigma} \cap \overline{\Gamma_i}. \tag{24.5}$$

[2] В лемме 1.3 из [10] предполагается, что граница области бесконечно гладкая. Это предположение используется для доказательства существования классических решений эллиптических уравнений с неоднородными краевыми условиями. Однако, если известно, что классическое решение существует, то при доказательстве первого неравенства в (24.1) предположение о гладкости границы можно опустить.

Поскольку $\mathbf{B}_i u = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$, из (24.5) следует

$$u(y) = 0, \qquad y \in [Q_{2,2\sigma} \cap \overline{\Gamma_i}] \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}). \tag{24.6}$$

Используя (24.4)–(24.6), определение операторов $\mathbf{B}_i$ и условие 23.2, получаем

$$\begin{aligned} \|v\|_{C(\overline{G})} &\leqslant \max_{i=1,\dots,N} \|u|_{Q_{2,2\sigma}\cap\overline{\Gamma_i}\cap\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})}}\|_{C(Q_{2,2\sigma}\cap\overline{\Gamma_i}\cap\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})})} \leqslant \\ &\leqslant \max_{i=1,\dots,N} \max_{s=1,\dots,S_i} \|u|_{\Omega_{is}(Q_{2,2\sigma}\cap\overline{\Gamma_i}\cap\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})})}\|_{C(\Omega_{is}(Q_{2,2\sigma}\cap\overline{\Gamma_i}\cap\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})}))}. \end{aligned} \tag{24.7}$$

Так как $Q_{2,2\sigma} \cap \mathcal{K} = \varnothing$ (см. (24.2)), то из определения преобразований Ω_{is} вытекает, что

$$\Omega_{is}(Q_{2,2\sigma} \cap \overline{\Gamma_i} \cap \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})})) \subset G.$$

Следовательно, используя неравенства (24.7) и лемму 24.1, в которой роль Q_1 и Q_2 играют множества ∂G и $\Omega_{is}(Q_{2,2\sigma} \cap \overline{\Gamma_i} \cap \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})}))$, имеем

$$\|v\|_{C(\overline{G})} \leqslant \frac{c_2}{q}\|\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{K}(\partial G)}. \tag{24.8}$$

2. Положим $w = u - v$. Очевидно, функция w удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{P}(y, D)w - qw = 0,\ y \in G; \qquad w(y) = u(y) - v(y) = 0,\ y \in Q_{2,\sigma}.$$

Применяя лемму 24.1 (с $\mathbf{B}_i = 0$), в которой роль Q_1 играет множество $\overline{\partial G \setminus Q_{2,\sigma}}$, и учитывая, что $w|_{\partial G} = (1 - \xi)u|_{\partial G}$, получим

$$\|w\|_{C(Q_2)} \leqslant \frac{c_2}{q}\|w|_{\partial G}\|_{C(\partial G)} \leqslant \frac{c_2}{q}\|u\|_{C(\overline{G})}.$$

Из последнего неравенства и следствия 23.3 имеем

$$\|w\|_{C(Q_2)} \leqslant \frac{c_2 c_1}{q}\|\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{K}(\partial G)}.$$

Объединяя эту оценку с (24.8), завершаем доказательство. □

24.2. Ограниченные возмущения эллиптических операторов и их свойства

Рассмотрим линейный оператор $\mathbf{P}_1$, удовлетворяющий следующему свойству.

Условие 24.1. *Оператор* $\mathbf{P}_1 : C(\overline{G}) \to C(\overline{G})$ *ограничен, и если функция* $u \in C(\overline{G})$ *достигает в точке* $y^0 \in G$ *положительного максимума, то* $\mathbf{P}_1 u(y^0) \leqslant 0$.

Оператор $\mathbf{P}_1$ будет играть роль ограниченного возмущения неограниченных эллиптических операторов в пространствах непрерывных функций (ср. [10,81]).

Следующий результат вытекает из условий 23.1 и 24.1 и принципа максимума 24.1.

Лемма 24.3. *Пусть выполнены условия* 23.1 *и* 24.1. *Если функция* $u \in C(\overline{G})$ *достигает в точке* $y^0 \in G$ *положительного максимума и* $\mathbf{P}(y, D)u \in C(G)$, *то* $\mathbf{P}(y, D)u(y^0) + \mathbf{P}_1 u(y^0) \leqslant 0$.

В настоящей работе будем рассматривать следующие нелокальные условия в *нетрансверсальном* случае:

$$b(y)u(y) + \int\limits_{\overline{G}} [u(y) - u(\eta)]\mu(y, d\eta) = 0, \qquad y \in \partial G, \tag{24.9}$$

где $b(y) \geqslant 0$, $\mu(y, \cdot)$ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{G}$.

Положим $\mathcal{N} = \{y \in \partial G : \mu(y, \overline{G}) = 0\}$ и $\mathcal{M} = \partial G \setminus \mathcal{N}$. Будем предполагать, что $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ — борелевские множества.

Условие 24.2. $\mathcal{K} \subset \mathcal{N}$.

Введем функцию $b_0(y) = b(y) + \mu(y, \overline{G})$.

Условие 24.3. $b_0(y) > 0$ *при* $y \in \partial G$.

В силу условий 24.2 и 24.3 соотношение (24.9) можно записать в виде

$$u(y) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\mu_i(y, d\eta) = 0, \ y \in \Gamma_i; \qquad u(y) = 0, \ y \in \mathcal{K}, \tag{24.10}$$

где $\mu_i(y, \cdot) = \dfrac{\mu(y, \cdot)}{b_0(y)}$, $y \in \Gamma_i$. По определению функции $b_0(y)$ имеем

$$\mu_i(y, \overline{G}) \leqslant 1, \qquad y \in \Gamma_i. \tag{24.11}$$

Для любого множества Q обозначим через $\chi_Q(y)$ функцию, равную единице на Q и нулю на $\mathbb{R}^2 \setminus Q$.

Пусть $b_{is}(y)$ и Ω_{is} те же, что выше. Введем меры δ_{is} следующим образом:

$$\delta_{is}(y, Q) = \begin{cases} b_{is}(y)\chi_Q(\Omega_{is}(y)), & y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}), \\ 0, & y \in \Gamma_i \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}), \end{cases}$$

где Q — произвольное борелевское множество.

Будем изучать меры $\mu_i(y,\cdot)$, представимые в виде

$$\mu_i(y,\cdot) = \sum_{s=1}^{S_i} \delta_{is}(y,\cdot) + \alpha_i(y,\cdot) + \beta_i(y,\cdot), \qquad y \in \Gamma_i, \tag{24.12}$$

где $\alpha_i(y,\cdot)$ и $\beta_i(y,\cdot)$ — неотрицательные борелевские меры, удовлетворяющие приведенным ниже условиям.

Для любой борелевской меры $\mu(y,\cdot)$ назовем замкнутое множество

$$\operatorname{spt}\mu(y,\cdot) = \overline{G} \setminus \bigcup_{V\in T} \{V \in T : \mu(y, V \cap \overline{G}) = 0\}$$

(где T — множество всех открытых множеств в $\mathbb{R}^2$) *носителем* меры $\mu(y,\cdot)$.

Условие 24.4. *Существуют такие числа $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$ и $\sigma > 0$, что*

1. $\operatorname{spt}\alpha_i(y,\cdot) \subset \overline{G} \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$ *для* $y \in \Gamma_i$,
2. $\operatorname{spt}\alpha_i(y,\cdot) \subset \overline{G_\sigma}$ *для* $y \in \Gamma_i \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$,

где $\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(y,\mathcal{K}) < \varkappa_1\}$ *и* $G_\sigma = \{y \in G : \operatorname{dist}(y,\partial G) < \sigma\}$.

Условие 24.5. $\beta_i(y,\mathcal{M}) < 1$ *для* $y \in \Gamma_i \cap \mathcal{M}$, $i = 1,\dots,N$.

Замечание 24.1. Условие 24.5 слабее аналогичных условий 2.2 в [10] и 3.2 в [81], в которых требуется, чтобы $\mu_i(y,\mathcal{M}) < 1$ для $y \in \Gamma_i \cap \mathcal{M}$.

Замечание 24.2. Можно показать, что если выполнены условия 24.3–24.5, то $b(y) + \mu(y, \overline{G} \setminus \{y\}) > 0$, $y \in \partial G$, т. е. краевое условие (24.9) задано в каждой точке границы.

Используя соотношения (24.12), запишем нелокальные условия (24.10) в виде

$$u(y) - \mathbf{B}_i u(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u(y) = 0,\ y \in \Gamma_i; \qquad u(y) = 0,\ y \in \mathcal{K}, \tag{24.13}$$

где операторы $\mathbf{B}_i$ определены в п. 23.2,

$$\mathbf{B}_{\alpha i} u(y) = \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\alpha_i(y,d\eta), \qquad \mathbf{B}_{\beta i} u(y) = \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\beta_i(y,d\eta), \qquad y \in \Gamma_i.$$

Введем пространство

$$C_B(\overline{G}) = \{u \in C(\overline{G}) : u \text{ удовлетворяют (24.9)}\}.$$

Очевидно, в определении пространства $C_B(\overline{G})$ можно также использовать условия (24.10) или (24.13). Из определения пространства $C_B(\overline{G})$ и условия 24.2 следует, что

$$C_B(\overline{G}) \subset C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \subset C_{\mathcal{K}}(G). \tag{24.14}$$

Лемма 24.4. *Пусть выполнены условия* 23.1, 23.2 *и* 24.1–24.5. *Пусть функция* $u \in C_B(\overline{G})$ *достигает в точке* $y^0 \in \overline{G}$ *положительного максимума, и пусть* $\mathbf{P}(y, D)u \in C(G)$. *Тогда найдется такая точка* $y^1 \in G$, *что* $u(y^1) = u(y^0)$ *и* $\mathbf{P}(y, D)u(y^1) + \mathbf{P}_1 u(y^1) \leqslant 0$.

Доказательство. 1. Если $y^0 \in G$, то заключение леммы вытекает из леммы 24.3. Пусть $y^0 \in \partial G$. Предположим, что лемма неверна, т. е. $u(y^0) > u(y)$ для всех $y \in G$.

Так как $u(y^0) > 0$ и $u \in C_B(\overline{G}) \subset C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$, то $y^0 \in \mathcal{M}$. Пусть $y^0 \in \Gamma_i \cap \mathcal{M}$ при некотором i. Если $\mu_i(y^0, G) > 0$, то, учитывая (24.11), имеем

$$u(y^0) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\mu_i(y^0, d\eta) \geqslant \int\limits_{G} [u(y^0) - u(\eta)]\mu_i(y^0, d\eta) > 0,$$

что противоречит (24.10). Следовательно, $\operatorname{spt} \mu_i(y^0, \cdot) \subset \partial G$. Отсюда, из (24.12) и условия 24.4 (часть 1) вытекает, что

$$b_{is}(y^0) = 0, \qquad \operatorname{spt} \alpha_i(y^0, \cdot) \subset \partial G \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}), \qquad \operatorname{spt} \beta_i(y^0, \cdot) \subset \partial G. \tag{24.15}$$

2. Предположим, что $\alpha_i(y^0, \partial G \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})) = 0$. В этом случае согласно (24.15)

$$\alpha_i(y^0, \overline{G}) = 0. \tag{24.16}$$

Далее, из (24.12), (24.15), (24.16) и условия 24.5 получаем

$$\mu_i(y^0, \cdot) = \beta_i(y^0, \cdot), \qquad \operatorname{spt} \beta_i(y^0, \cdot) \subset \partial G, \qquad \beta_i(y^0, \mathcal{M}) < 1.$$

Следовательно, для $u \in C_B(\overline{G}) \subset C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ имеют место соотношения

$$u(y^0) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\mu_i(y^0, d\eta) = u(y^0) - \int\limits_{\mathcal{M}} u(\eta)\beta_i(y^0, d\eta) \geqslant u(y^0) - u(y^0)\beta_i(y^0, \mathcal{M}) > 0,$$

что противоречит (24.10).

Полученное противоречие означает, что $\alpha_i(y^0, \partial G \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})) > 0$. Таким образом, учитывая условие 24.4 (часть 2), имеем $y^0 \in \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$.

3. Покажем, что найдется точка

$$y' \in \partial G \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}) \tag{24.17}$$

такая, что $u(y') = u(y^0)$. Предположим противное: $u(y^0) > u(y)$ для $y \in \partial G \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$. Тогда, используя (24.11), (24.12) и (24.15), получаем

$$\begin{aligned} u(y^0) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\mu_i(y^0, d\eta) &\geqslant \int\limits_{\overline{G}} [u(y^0) - u(\eta)]\mu_i(y^0, d\eta) \geqslant \\ &\geqslant \int\limits_{\partial G \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})} [u(y^0) - u(\eta)]\alpha_i(y^0, d\eta) > 0, \end{aligned} \tag{24.18}$$

поскольку $\alpha_i(y^0, \partial G \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})) > 0$. Неравенство (24.18) противоречит (24.10). Следовательно, функция u достигает в некоторой точке $y' \in \partial G \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$ положительного максимума. Повторяя рассуждения пп. 1 и 2 доказательства, получаем, что $y' \in \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$. Но это противоречит (24.17).

Итак, доказано существование такой точки $y^1 \in G$, что $u(y^1) = u(y^0)$. Применяя лемму 24.3, получим $\mathbf{P}(y, D)u(y^1) + \mathbf{P}_1 u(y^1) \leqslant 0$. □

Следствие 24.1. *Пусть выполнены условия* 23.1, 23.2 *и* 24.1–24.5. *Пусть* $u \in C_B(\overline{G})$ — *решение уравнения*

$$qu(y) - \mathbf{P}(y, D)u(y) - \mathbf{P}_1 u(y) = f_0(y), \quad y \in G,$$

где $q > 0$ *и* $f_0 \in C(\overline{G})$. *Тогда*

$$\|u\|_{C(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{q}\|f_0\|_{C(\overline{G})}. \tag{24.19}$$

Доказательство. Пусть $\max\limits_{y \in \overline{G}} |u(y)| = u(y^0) > 0$ для некоторого $y^0 \in \overline{G}$. Тогда по лемме 24.4 найдется такая точка $y^1 \in G$, что $u(y^1) = u(y^0)$ и $\mathbf{P}(y, D)u(y^1) + \mathbf{P}_1 u(y^1) \leqslant 0$. Следовательно,

$$\|u\|_{C(\overline{G})} = u(y^0) = u(y^1) = \frac{1}{q}(\mathbf{P}(y, D)u(y^1) + \mathbf{P}_1 u(y^1) + f_0(y^1)) \leqslant \frac{1}{q}\|f_0\|_{C(\overline{G})}.$$

Если $\max\limits_{y \in \overline{G}} |u(y)| = -u(y^0) > 0$, то, повторяя приведенные рассуждения применительно к решению $v(y) = -u(y)$ уравнения $qv - \mathbf{P}(y, D)v - \mathbf{P}_1 v = -f_0$, мы снова получим (24.19). □

24.3. Сведение к операторному уравнению на границе

В этом параграфе мы наложим на нелокальные операторы дополнительные ограничения, которые позволят свести нелокальные эллиптические задачи к операторным уравнениям на границе.

Заметим, что если $u \in C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$, то функция $\mathbf{B}_i u$ непрерывна на Γ_i и может быть продолжена до непрерывной функции на $\overline{\Gamma_i}$ (которую также будем обозначать $\mathbf{B}_i u$), принадлежащей $C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})$. Предположим, что операторы $\mathbf{B}_{\alpha i}$ и $\mathbf{B}_{\beta i}$ обладают аналогичным свойством.

Условие 24.6. *Для любой $u \in C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ функции $\mathbf{B}_{\alpha i} u$ и $\mathbf{B}_{\beta i} u$ могут быть продолжены на $\overline{\Gamma_i}$ таким образом, что продолженные функции (которые также будем обозначать $\mathbf{B}_{\alpha i} u$ и $\mathbf{B}_{\beta i} u$ соответственно) принадлежат $C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})$.*

Следующая лемма непосредственно вытекает из определения нелокальных операторов.

Лемма 24.5. *Пусть выполнены условия* 6.3, 23.2, 24.2, 24.3 *и* 24.6. *Тогда операторы $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{\alpha i}, \mathbf{B}_{\beta i} : C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \to C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})$ ограничены и*

$$\|\mathbf{B}_i u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})} \leqslant \|u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{G})}, \qquad \|\mathbf{B}_{\alpha i} u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})} \leqslant \|u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{G} \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}))},$$

$$\|\mathbf{B}_{\beta i} u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})} \leqslant \|u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{G})}, \qquad \|\mathbf{B}_{\alpha i} u + \mathbf{B}_{\beta i} u\| \leqslant \|u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{G})},$$

$$\|\mathbf{B}_i u + \mathbf{B}_{\alpha i} u + \mathbf{B}_{\beta i} u\| \leqslant \|u\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{G})}.$$

Введем операторы

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_i\} : C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \to \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G), \qquad \mathbf{B}_{\alpha\beta} = \{\mathbf{B}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\beta i}\} : C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \to \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G), \tag{24.20}$$

где $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$ определено в (5.1).

Используя определенный в п. 24.1 оператор $\mathbf{S}_q$, введем ограниченный оператор

$$\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta} \mathbf{S}_q : \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G) \to \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G), \qquad q \geqslant q_1. \tag{24.21}$$

Так как $\mathbf{S}_q \psi \in C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ для $\psi \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$, то оператор в (24.21) определен корректно.

Далее будут сформулированы достаточные условия, гарантирующие существование ограниченного оператора $(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta} \mathbf{S}_q)^{-1} : \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G) \to \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$.

Представим меры $\beta_i(y, \cdot)$ в виде

$$\beta_i(y, \cdot) = \beta_i^1(y, \cdot) + \beta_i^2(y, \cdot), \tag{24.22}$$

где $\beta_i^1(y,\cdot)$ и $\beta_i^2(y,\cdot)$ — неотрицательные борелевские меры. Опишем их. Для каждого $p>0$ рассмотрим покрытие множества $\overline{\mathcal{M}}$ p-окрестностями всех его точек. Обозначим через $\mathcal{M}_p$ некоторое конечное подпокрытие. Очевидно, $\mathcal{M}_p$ — открытое борелевское множество. Далее, для каждого $p>0$ рассмотрим срезающую функцию $\hat{\zeta}_p \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $0 \leqslant \hat{\zeta}_p(y) \leqslant 1$, $\hat{\zeta}_p(y)=1$, если $y \in \mathcal{M}_{p/2}$, и $\hat{\zeta}_p(y)=0$, если $y \notin \mathcal{M}_p$. Положим $\tilde{\zeta}_p = 1-\hat{\zeta}_p$. Введем операторы

$$\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}u(y) = \int\limits_{\overline{G}} \hat{\zeta}_p(\eta)u(\eta)\beta_i^1(y,d\eta), \qquad \tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i}u(y) = \int\limits_{\overline{G}} \tilde{\zeta}_p(\eta)u(\eta)\beta_i^1(y,d\eta),$$

$$\mathbf{B}^2_{\beta i}u(y) = \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\beta_i^2(y,d\eta).$$

Условие 24.7. *При всех $i=1,\dots,N$ имеем*:

1. *операторы $\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}, \tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i} : C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \to C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})$ ограничены*;
2. *существует такое число $p>0$, что*[3]

$$\|\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}\| < \begin{cases} \dfrac{1}{c_1}, & \text{если} \quad \alpha_j(y,\overline{G})=0 \ \forall y \in \Gamma_j,\ j=1,\dots,N, \\ \dfrac{1}{c_1(1+c_1)} & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где c_1 — константа из следствия 23.3.

Замечание 24.3. Операторы $\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}, \tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i} : C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \to C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})$ ограничены тогда и только тогда, когда оператор $\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i} + \tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i} : C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \to C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})$ ограничен. Это следует из соотношений $\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}u = (\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i} + \tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i})(\hat{\zeta}_p u)$ и $\tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i}u = (\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i} + \tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i})(\tilde{\zeta}_p u)$ и непрерывности функций $\hat{\zeta}_p$ и $\tilde{\zeta}_p$.

Условие 24.8. *Операторы $\mathbf{B}^2_{\beta i} : C_{\mathcal{N}}(\overline{G}) \to C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})$, $i=1,\dots,N$, компактные.*

Из (24.12) и (24.22) следует, что меры $\mu_i(y,\cdot)$ представимы в виде

$$\mu_i(y,\cdot) = \sum_{s=1}^{S_i} \delta_{is}(y,\cdot) + \alpha_i(y,\cdot) + \beta_i^1(y,\cdot) + \beta_i^2(y,\cdot), \qquad y \in \Gamma_i.$$

Меры $\delta_{is}(y,\cdot)$ отвечают нелокальным членам с носителем вблизи множества $\mathcal{K}$ точек сопряжения. Меры $\alpha_i(y,\cdot)$ соответствуют нелокальным членам с носителем вне множества $\mathcal{K}$. Меры $\beta_i^1(y,\cdot)$ и $\beta_i^2(y,\cdot)$ соответствуют нелокальным

[3]Часть 2 условия 24.7 может быть заменена более сильным предположением: «$\|\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}\| \to 0$ при $p \to 0$», которое проще проверить в конкретных приложениях.

членам, носитель которых имеет произвольную геометрическую структуру (в частности, может пересекаться с множеством $\mathcal{K}$); однако мера $\beta_i^1(y, \mathcal{M}_p)$ множества $\mathcal{M}_p$ при малых p должна быть мала (условие 24.7), а мера $\beta_i^2(y, \cdot)$ должна порождать компактный оператор (условие 24.8).

Лемма 24.6. *Пусть выполнены условия* 23.1, 23.2, 24.1–24.5 *и* 24.6–24.8. *Тогда существует ограниченный оператор* $(\mathbf{I}-\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)^{-1} : \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G) \to \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$, $q \geqslant q_1$, *где* $q_1 > 0$ *достаточно велико.*

Доказательство. 1. Рассмотрим ограниченные операторы $\hat{\mathbf{B}}_\beta^1 = \{\hat{\mathbf{B}}_{\beta i}^1\}$, $\tilde{\mathbf{B}}_\beta^1 = \{\tilde{\mathbf{B}}_{\beta i}^1\}$, $\mathbf{B}_\beta^2 = \{\mathbf{B}_{\beta i}^2\}$ и $\mathbf{B}_\alpha = \{\mathbf{B}_{\alpha i}\}$, действующие из $C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ в $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$ (ср. (24.20)).

Докажем, что оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha \mathbf{S}_q : \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G) \to \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$ имеет ограниченный обратный.

Введем функцию $\zeta \in C^\infty(\overline{G})$ такую, что $0 \leqslant \zeta(y) \leqslant 1$, $\zeta(y) = 1$ при $y \in \overline{G_\sigma}$ и $\zeta(y) = 0$ при $y \notin G_{\sigma/2}$, где $\sigma > 0$ — число из условия 24.4.

Имеем

$$\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha \mathbf{S}_q = \mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha (1-\zeta)\mathbf{S}_q - \mathbf{B}_\alpha \zeta \mathbf{S}_q. \tag{24.23}$$

1a. Вначале покажем, что оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q$ имеет ограниченный обратный. По лемме 24.5 и следствию 23.3

$$\|\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\| \leqslant c_1. \tag{24.24}$$

Далее, $(1-\zeta)\mathbf{S}_q\psi = 0$ в $\overline{G_\sigma}$ для любого $\psi \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$. Следовательно, по условию 24.4

$$\operatorname{supp} \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\psi \subset \partial G \cap \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}. \tag{24.25}$$

Покажем, что

$$\|[\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q]^2\| \leqslant \frac{c}{q}, \qquad q \geqslant q_1, \tag{24.26}$$

где $q_1 > 0$ достаточно велико и $c > 0$ не зависит от q. Последовательно применяя (I) лемму 24.5, (II) лемму 24.2 и соотношение (24.25) и (III) лемму 24.5 и следствие 23.3, получаем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\,\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)} &\leqslant \|\mathbf{S}_q\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\psi\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{G}\setminus\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}))} \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_3}{q}\|\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\psi\|_{C_{\mathcal{N}}(\partial G\cap\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})})} \leqslant \frac{c_3c_1}{q}\|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)}.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает (24.26) с $c = c_3c_1$.

Если $q \geqslant 2c$, то оператор $\mathbf{I} - [\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q]^2$ имеет ограниченный обратный. Тогда оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q$ также имеет ограниченный обратный и

$$[\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q]^{-1} = [\mathbf{I} + \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q][\mathbf{I} - (\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q)^2]^{-1}. \tag{24.27}$$

Из (24.27), леммы 24.5, следствия 23.3 и соотношений (24.24) и (24.26) следует, что

$$\|[\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q]^{-1}\| = 1 + c_1 + O(q^{-1}), \qquad q \to +\infty. \tag{24.28}$$

1b. Теперь оценим норму оператора $\mathbf{B}_\alpha\zeta\mathbf{S}_q$. Из лемм 24.5 и 24.2 получаем

$$\|\mathbf{B}_\alpha\zeta\mathbf{S}_q\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{N}(\partial G)} \leqslant \|\mathbf{S}_q\psi\|_{C(\overline{G_{\sigma/2}})} \leqslant \frac{c_2}{q}\|\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{N}(\partial G)}. \tag{24.29}$$

Следовательно, используя представление (24.23), видим, что оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}_q$ имеет ограниченный обратный при всех достаточно больших q и

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}_q)^{-1} = [\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q)^{-1}\mathbf{B}_\alpha\zeta\mathbf{S}_q]^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q]^{-1}. \tag{24.30}$$

Из (24.28)–(24.30) вытекает, что

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}_q)^{-1}\| = 1 + c_1 + O(q^{-1}), \qquad q \to +\infty. \tag{24.31}$$

2. Докажем, что оператор $\mathbf{I} - (\mathbf{B}_\alpha + \hat{\mathbf{B}}^1_\beta + \tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q : \mathcal{C}_\mathcal{N}(\partial G) \to \mathcal{C}_\mathcal{N}(\partial G)$ имеет ограниченный обратный.

2a. Из определения оператора $\tilde{\mathbf{B}}^1_\beta$ и леммы 24.1 (с $Q_1 = \overline{\mathcal{M}}$ и $Q_2 = \overline{G} \setminus \mathcal{M}_{p/2}$) следует, что

$$\|\tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i}\mathbf{S}_q\psi\|_{C_\mathcal{N}(\overline{\Gamma_i})} \leqslant \|\mathbf{S}_q\psi\|_{C(\overline{G}\setminus\mathcal{M}_{p/2})} \leqslant \frac{c_2}{q}\|\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{N}(\partial G)}, \tag{24.32}$$

поскольку $(\overline{G} \setminus \mathcal{M}_{p/2}) \cap \overline{\mathcal{M}} = \varnothing$ и $\operatorname{supp}(\mathbf{S}_q\psi)|_{\partial G} \subset \overline{\mathcal{M}}$ для $\psi \in \mathcal{C}_\mathcal{N}(\partial G)$.

2b. Пусть $\alpha_j(y, \overline{G}) \neq 0$ при некоторых j и $y \in \Gamma_j$. В силу условия 24.7 (часть 2) и следствия 23.3 найдется такое число d, что $0 < 2d < 1/(1+c_1)$ и

$$\|\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}\mathbf{S}_q\psi\|_{C_\mathcal{N}(\overline{\Gamma_i})} \leqslant \left(\frac{1}{c_1(1+c_1)} - \frac{2d}{c_1}\right)\|\mathbf{S}_q\psi\|_{C_\mathcal{N}(\overline{G})} \leqslant \left(\frac{1}{1+c_1} - 2d\right)\|\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{N}(\partial G)}. \tag{24.33}$$

Из неравенств (24.32) и (24.33) получаем

$$\|(\hat{\mathbf{B}}^1_\beta + \tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q\| \leqslant \frac{1}{1+c_1} - d \tag{24.34}$$

для всех достаточно больших q. Из (24.31) и (24.34) имеем

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}_q)^{-1}(\hat{\mathbf{B}}^1_\beta + \tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q\| < 1$$

для достаточно больших q. Следовательно, существует ограниченный обратный оператор

$$[\mathbf{I}-(\mathbf{B}_\alpha+\hat{\mathbf{B}}^1_\beta+\tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q]^{-1}=[\mathbf{I}-(\mathbf{I}-\mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}_q)^{-1}(\hat{\mathbf{B}}^1_\beta+\tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q]^{-1}[\mathbf{I}-\mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}_q]^{-1}. \quad (24.35)$$

2c. Если $\alpha_j(y,\overline{G})=0$ при $y\in\Gamma_j$, $j=1,\dots,N$, то в силу условия 24.7 (часть 1) неравенство (24.33) принимает вид

$$\|\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}\mathbf{S}_q\psi\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_i})}\leqslant\left(\frac{1}{c_1}-\frac{2d}{c_1}\right)\|\mathbf{S}_q\psi\|_{C_{\mathcal{N}}(\overline{G})}\leqslant(1-2d)\|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)}.$$

Следовательно, неравенство (24.34) примет вид

$$\|(\hat{\mathbf{B}}^1_\beta+\tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q\|\leqslant 1-d. \quad (24.36)$$

Так как в данном случае $\mathbf{B}_\alpha=0$, то из (24.36) следует, что оператор

$$\mathbf{I}-(\mathbf{B}_\alpha+\hat{\mathbf{B}}^1_\beta+\tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q=\mathbf{I}-(\hat{\mathbf{B}}^1_\beta+\tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q$$

имеет ограниченный обратный.

3. Осталось доказать, что оператор $\mathbf{I}-\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q$ также имеет ограниченный обратный. По условию 24.8 оператор $\mathbf{B}^2_\beta$ компактный. Следовательно, оператор $\mathbf{B}^2_\beta\mathbf{S}_q$ также компактный. Так как индекс фредгольмова оператора устойчив по отношению к компактным возмущениям, то оператор $\mathbf{I}-\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q$ фредгольмов и $\operatorname{ind}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)=0$. Чтобы доказать, что $\mathbf{I}-\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q$ имеет ограниченный обратный, достаточно показать, что $\dim\ker(\mathbf{I}-\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)=0$.

Пусть $\psi\in\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$ и $(\mathbf{I}-\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)\psi=0$. Тогда функция $u=\mathbf{S}_q\psi\in C^\infty(G)\cap C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ является решением задачи

$$\mathbf{P}(y,D)u-qu=0,\quad y\in G,$$
$$u(y)-\mathbf{B}_iu(y)-\mathbf{B}_{\alpha i}u(y)-\mathbf{B}_{\beta i}u(y)=0,\ y\in\Gamma_i;\qquad u(y)=0,\ y\in\mathcal{K}.$$

В силу следствия 24.1 имеем $u=0$. Значит, $\psi=\mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q\psi=\mathbf{B}_{\alpha\beta}u=0$. □

24.4. Существование полугрупп Феллера

В этом параграфе мы докажем, что ограниченные возмущения эллиптических операторов с нелокальными членами, удовлетворяющими условиям пп. 24.1–24.3, являются генераторами полугрупп Феллера.

Сводя нелокальные задачи на границу и используя лемму 24.6, докажем, что нелокальные задачи разрешимы в пространствах непрерывных функций.

Лемма 24.7. *Пусть выполнены условия* 23.1, 23.2, 24.2–24.5 *и* 24.6–24.8, *и пусть* $q_1 > 0$ *достаточно велико. Тогда для любых* $q \geqslant q_1$ *и* $f_0 \in C(\overline{G})$ *задача*

$$qu(y) - \mathbf{P}(y, D)u(y) = f_0(y), \quad y \in G, \tag{24.37}$$

$$u(y) - \mathbf{B}_i u(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u(y) = 0, \ y \in \Gamma_i; \qquad u(y) = 0, \ y \in \mathcal{K}, \tag{24.38}$$

имеет единственное решение $u \in C_B(\overline{G}) \cap W^2_{\mathrm{loc}}(G)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$qv(y) - \mathbf{P}(y, D)v(y) = f_0(y), \ y \in G; \qquad v(y) - \mathbf{B}_i v(y) = 0, \ y \in \Gamma_i, \ i = 1, \ldots, N. \tag{24.39}$$

Так как $f_0 \in C(\overline{G})$, то по следствию 23.3 существует единственное решение $v \in C_{\mathcal{K}}(\overline{G})$ задачи (24.39). Следовательно, $v \in C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$.

2. Положим $w = u - v$. Неизвестная функция w принадлежит $C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ и в силу (24.37)–(24.39) удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} qw(y) - \mathbf{P}(y, D)w(y) &= 0, & y &\in G, \\ w(y) - \mathbf{B}_i w(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} w(y) - \mathbf{B}_{\beta i} w(y) &= \mathbf{B}_{\alpha i} v(y) + \mathbf{B}_{\beta i} v(y), & y &\in \Gamma_i, \ i = 1, \ldots, N, \\ w(y) &= 0, & y &\in \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{24.40}$$

В силу условия 24.6 задача (24.40) эквивалентна операторному уравнению $\psi - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q\psi = \mathbf{B}_{\alpha\beta}v$ относительно неизвестной функции $\psi \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$. Согласно лемме 24.6 это уравнение имеет единственное решение $\psi \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$. Тогда задача (24.37), (24.38) также имеет единственное решение

$$u = v + w = v + \mathbf{S}_q\psi = v + \mathbf{S}_q(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)^{-1}\mathbf{B}_{\alpha\beta}v \in C_B(\overline{G}).$$

Более того, $u \in W^2_{\mathrm{loc}}(G)$ в силу теоремы о внутренней гладкости решений эллиптических уравнений. □

Используя лемму 24.7 и условие 24.1, докажем, что задачи с ограниченными возмущениями также разрешимы в пространствах непрерывных функций.

Лемма 24.8. *Пусть выполнены условия* 23.1, 23.2 *и* 24.1–24.8, *и пусть* $q_1 > 0$ *достаточно велико. Тогда для любых* $q \geqslant q_1$ *и* $f_0 \in C(\overline{G})$ *задача*

$$qu - (\mathbf{P}(y, D) + \mathbf{P}_1)u = f_0(y), \qquad y \in G, \tag{24.41}$$

$$u(y) - \mathbf{B}_i u(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u(y) = 0, \ y \in \Gamma_i; \qquad u(y) = 0, \ y \in \mathcal{K}, \tag{24.42}$$

имеет единственное решение $u \in C_B(\overline{G}) \cap W^2_{\mathrm{loc}}(G)$.

Доказательство. Обозначим через I единичный оператор в $C(\overline{G})$. Рассмотрим оператор $qI - \mathbf{P}(y, D)$ как оператор, действующий из $C(\overline{G})$ в $C(\overline{G})$ с областью определения $\mathrm{D}(qI - \mathbf{P}(y, D)) = \{u \in C_B(\overline{G}) \cap W^2_{\mathrm{loc}}(G) : \mathbf{P}(y, D)u \in C(\overline{G})\}$. В силу леммы 24.7 и следствия 24.1 существует ограниченный оператор $(qI - \mathbf{P}(y, D))^{-1} : C(\overline{G}) \to C(\overline{G})$ и

$$\|(qI - \mathbf{P}(y, D))^{-1}\| \leqslant 1/q.$$

Введем оператор $qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1 : C(\overline{G}) \to C(\overline{G})$ с областью определения $\mathrm{D}(qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1) = \mathrm{D}(qI - \mathbf{P}(y, D))$. Так как

$$qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1 = (I - \mathbf{P}_1(qI - \mathbf{P}(y, D))^{-1})(qI - \mathbf{P}(y, D)),$$

то оператор $qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1 : C(\overline{G}) \to C(\overline{G})$ имеет ограниченный обратный при $q \geqslant q_1$, где q_1 настолько велико, что $\|\mathbf{P}_1\| \cdot \|(qI - \mathbf{P}(y, D))^{-1}\| \leqslant 1/2$, $q \geqslant q_1$. $\square$

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$, заданный формулой

$$\begin{gathered} \mathbf{P}_B u = \mathbf{P}(y, D)u + \mathbf{P}_1 u, \\ u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) = \{u \in C_B(\overline{G}) \cap W^2_{\mathrm{loc}}(G) : \mathbf{P}(y, D)u + \mathbf{P}_1 u \in C_B(\overline{G})\}. \end{gathered} \tag{24.43}$$

Лемма 24.9. *Пусть выполнены условия* 23.1, 23.2 *и* 24.1–24.8. *Тогда* $\mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ *плотно в* $C_B(\overline{G})$.

Доказательство. Будем проводить доказательство по схеме, предложенной в [81].

1. Пусть $u \in C_B(\overline{G})$. Так как $C_B(\overline{G}) \subset C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ в силу (24.14), то для любых $\varepsilon > 0$ и $q \geqslant q_1$ существует такая функция $u_1 \in C^\infty(\overline{G}) \cap C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$, что

$$\|u - u_1\|_{C(\overline{G})} \leqslant \min(\varepsilon, \varepsilon/(2c_1 k_q)), \tag{24.44}$$

где $k_q = \|(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)^{-1}\|$.

Положим

$$\begin{aligned} &f_0(y) \equiv qu_1 - \mathbf{P}(y, D)u_1, && y \in G, \\ &\psi_i(y) \equiv u_1(y) - \mathbf{B}_i u_1(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u_1(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u_1(y), && y \in \Gamma_i,\ i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{24.45}$$

Поскольку $u_1 \in C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$, то согласно условию 24.6 $\{\psi_i\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$. Используя соотношение

$$u(y) - \mathbf{B}_i u(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u(y) = 0, \qquad y \in \Gamma_i,$$

неравенство (24.44) и лемму 24.5, получим

$$\|\{\psi_i\}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)} \leqslant \|u-u_1\|_{C(\overline{G})} + \|(\mathbf{B}+\mathbf{B}_{\alpha\beta})(u-u_1)\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)} \leqslant \varepsilon/(c_1 k_q). \quad (24.46)$$

Рассмотрим вспомогательную нелокальную задачу

$$qu_2 - \mathbf{P}(y,D)u_2 = f_0(y), \quad y \in G,$$
$$u_2(y) - \mathbf{B}_i u_2(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u_2(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u_2(y) = 0,\ y \in \Gamma_i; \qquad u_2(y) = 0,\ y \in \mathcal{K}. \quad (24.47)$$

Так как $f_0 \in C^\infty(\overline{G})$, то по лемме 24.7 задача (24.47) имеет единственное решение $u_2 \in C_B(\overline{G}) \subset C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$.

Используя (24.45), (24.47) и соотношения $u_1(y) = u_2(y) = 0$, $y \in \mathcal{K}$, видим, что функция $w_1 = u_1 - u_2$ удовлетворяет соотношениям

$$qw_1 - \mathbf{P}(y,D)w_1 = 0, \quad y \in G,$$
$$w_1(y) - \mathbf{B}_i w_1(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} w_1(y) - \mathbf{B}_{\beta i} w_1(y) = \psi_i(y),\ y \in \Gamma_i; \qquad w_1(y) = 0,\ y \in \mathcal{K}. \quad (24.48)$$

Из условия 24.6 следует, что задача (24.48) эквивалентна операторному уравнению $\varphi - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q\varphi = \psi$ в $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$, где $w_1 = \mathbf{S}_q\varphi$. Согласно лемме 24.6 это уравнение имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$. Таким образом, пользуясь следствием 23.3 и неравенством (24.46), получаем

$$\|w_1\|_{C(\overline{G})} \leqslant c_1 \|(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)^{-1}\| \cdot \|\{\psi_i\}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)} \leqslant c_1 k_q \varepsilon/(c_1 k_q) = \varepsilon. \quad (24.49)$$

2. Наконец, рассмотрим задачу

$$\lambda u_3 - \mathbf{P}(y,D)u_3 - \mathbf{P}_1 u_3 = \lambda u_2, \quad y \in G,$$
$$u_3(y) - \mathbf{B}_i u_3(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u_3(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u_3(y) = 0,\ y \in \Gamma_i; \qquad u_3(y) = 0,\ y \in \mathcal{K}. \quad (24.50)$$

Так как $u_2 \in C_B(\overline{G})$, то по лемме 24.8 задача (24.50) имеет единственное решение $u_3 \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ при всех достаточно больших λ.

Обозначим $w_2 = u_2 - u_3$. Из (24.50) вытекает, что

$$\lambda w_2 - \mathbf{P}(y,D)w_2 - \mathbf{P}_1 w_2 = -\mathbf{P}(y,D)u_2 - \mathbf{P}_1 u_2 = f_0 - qu_2 - \mathbf{P}_1 u_2.$$

Применяя следствие 24.1, имеем

$$\|w_2\|_{C(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f_0 - qu_2 - \mathbf{P}_1 u_2\|_{C(\overline{G})}.$$

Выбирая достаточно большое λ, получаем

$$\|w_2\|_{C(\overline{G})} \leqslant \varepsilon. \quad (24.51)$$

Из неравенств (24.44), (24.49) и (24.51) следует, что

$$\|u-u_3\|_{C(\overline{G})} \leqslant \|u-u_1\|_{C(\overline{G})} + \|u_1-u_2\|_{C(\overline{G})} + \|u_2-u_3\|_{C(\overline{G})} \leqslant 3\varepsilon.$$

□

Докажем теперь основной результат статьи.

Теорема 24.1. *Пусть выполнены условия* 23.1, 23.2 *и* 24.1–24.8. *Тогда оператор* $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ *является генератором полугруппы Феллера.*

Доказательство. 1. В силу леммы 24.8 и следствия 24.1 при всех достаточно больших $q > 0$ существует ограниченный оператор $(qI - \mathbf{P}_B)^{-1} : C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ и

$$\|(qI - \mathbf{P}_B)^{-1}\| \leqslant 1/q.$$

2. Поскольку оператор $(qI-\mathbf{P}_B)^{-1}$ ограничен и определен на всем пространстве $C_B(\overline{G})$, он замкнут. Следовательно, оператор $qI - \mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ замкнут. Значит, и оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ также замкнут.

3. Докажем, что оператор $(qI-\mathbf{P}_B)^{-1}$ неотрицателен. Предположим противное; тогда найдется такая функция $f_0 \geqslant 0$, что решение $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ уравнения $qu - \mathbf{P}_B u = f_0$ достигает в некоторой точке $y^0 \in \overline{G}$ отрицательного минимума. В этом случае функция $v = -u$ достигает в точке y^0 положительного максимума. Согласно лемме 24.4 существует такая точка $y^1 \in G$, что $v(y^1) = v(y^0)$ и $\mathbf{P}_B v(y^1) \leqslant 0$. Следовательно, $0 < v(y^0) = v(y^1) = (\mathbf{P}_B v(y^1) - f_0(y^1))/q \leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает, что $u \geqslant 0$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы Хилле—Иосиды (теоремы 23.1), и оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ — генератор полугруппы Феллера. □

В следующем пункте приведем пример нелокальных операторов, удовлетворяющих условиям теоремы 24.1.

24.5. Пример

Пусть $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{K}$, где Γ_1 и Γ_2 открытые связные в топологии ∂G кривые класса C^∞, причем $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ и $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \mathcal{K}$; множество $\mathcal{K}$ состоит

из двух точек: g_1 и g_2. Предположим, что область G совпадает с плоским углом в ε-окрестности точек g_i, $i = 1, 2$. Пусть Ω_j, $j = 1, \ldots, 4$, — непрерывные преобразования, заданные на $\overline{\Gamma_1}$ и удовлетворяющие следующим условиям (см. рис. 24.1):

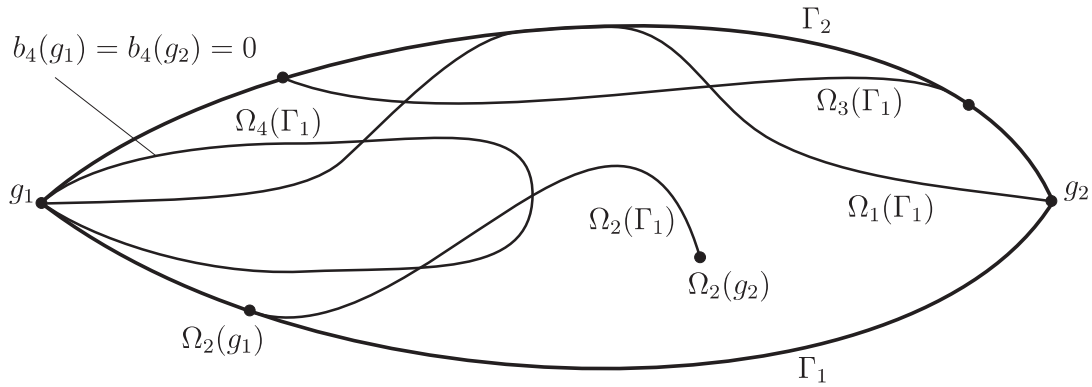

Рис. 24.1. Нетрансверсальные нелокальные условия

1. $\Omega_1(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$, $\Omega_1(\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \subset G$, $\Omega_1(\Gamma_1 \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \subset G \cup \Gamma_2$ и $\Omega_1(y)$ есть композиция операторов сдвига аргумента, поворота и гомотетии при $y \in \overline{\Gamma_1} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$;

2. существуют такие числа $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$ и $\sigma > 0$, что $\Omega_2(\overline{\Gamma_1}) \subset \overline{G} \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$ и $\Omega_2(\overline{\Gamma_1} \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})) \subset \overline{G_\sigma}$; кроме того, $\Omega_2(g_1) \in \Gamma_1$ и $\Omega_2(g_2) \in G$;

3. $\Omega_3(\overline{\Gamma_1}) \subset G \cup \Gamma_2$ и $\Omega_3(\mathcal{K}) \subset \Gamma_2$;

4. $\Omega_4(\overline{\Gamma_1}) \subset G \cup \overline{\Gamma_2}$ и $\Omega_4(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

Пусть $b_1 \in C(\overline{\Gamma_1}) \cap C^\infty(\overline{\Gamma_1} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}))$, $b_2, b_3, b_4 \in C(\overline{\Gamma_1})$ и $b_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, 4$.

Пусть G_1 ограниченная область, $G_1 \subset G$, и $\Gamma \subset \overline{G}$ — кривая класса C^1. Введем непрерывные неотрицательные функции $c(y, \eta)$, $y \in \overline{\Gamma_1}$, $\eta \in \overline{G_1}$, и $d(y, \eta)$, $y \in \overline{\Gamma_1}$, $\eta \in \overline{\Gamma}$.

Рассмотрим следующие нелокальные условия:

$$u(y) - \sum_{j=1}^{4} b_j(y) u(\Omega_j(y)) - \int\limits_{G_1} c(y, \eta) u(\eta) d\eta - \int\limits_{\Gamma} d(y, \eta) u(\eta) d\Gamma_\eta = 0, \quad y \in \Gamma_1,$$
$$u(y) = 0, \quad y \in \overline{\Gamma_2}. \tag{24.52}$$

Пусть $Q \subset \overline{G}$ — произвольное борелевское множество; введем меры $\mu(y,\cdot)$, $y \in \partial G$:

$$\begin{aligned}
&\mu(y,Q) = \sum_{j=1}^{4} b_j(y)\chi_Q(\Omega_j(y)) + \int\limits_{G_1\cap Q} c(y,\eta)d\eta + \int\limits_{\Gamma\cap Q} d(y,\eta)u(\eta)d\Gamma_\eta, \quad y \in \Gamma_1,\\
&\mu(y,Q) = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y \in \overline{\Gamma_2}.
\end{aligned} \tag{24.53}$$

Пусть $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ определены, как выше. Предположим, что

$$\begin{gathered}
\mu(y,\overline{G}) = \sum_{j=1}^{4} b_j(y) + \int\limits_{G_1} c(y,\eta)\,d\eta + \int\limits_{\Gamma} d(y,\eta)\,d\Gamma_\eta \leqslant 1, \quad y \in \partial G,\\
\int\limits_{\Gamma\cap\mathcal{M}} d(y,\eta)d\Gamma_\eta < 1, \quad y \in \mathcal{M};\\
b_2(g_1) = 0 \text{ или } \mu(\Omega_2(g_1),\overline{G}) = 0, \quad b_2(g_2) = 0;\\
b_4(g_j) = 0; \quad c(g_j,\cdot) = 0; \quad d(g_j,\cdot) = 0.
\end{gathered} \tag{24.54}$$

Полагая $b(y) = 1 - \mu(y,\overline{G})$, мы можем переписать (24.52) в виде (ср. (24.9))

$$b(y)u(y) + \int\limits_{\overline{G}} [u(y) - u(\eta)]\mu(y,d\eta) = 0, \quad y \in \partial G.$$

Введем срезающую функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с носителем в $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$, равную единице на $\mathcal{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K})$ и такую, что $0 \leqslant \zeta(y) \leqslant 1$ при $y \in \mathbb{R}^2$. Пусть $y \in \overline{\Gamma_1}$, а $Q \subset \overline{G}$ — произвольное борелевское множество; обозначим

$$\begin{gathered}
\delta(y,Q) = \zeta(y)b_1(y)\chi_Q(\Omega_1(y)), \qquad \alpha(y,Q) = b_2(y)\chi_Q(\Omega_2(y)),\\
\beta^1(y,Q) = \bigl(1-\zeta(y)\bigr)b_1(y)\chi_Q(\Omega_1(y)) + \sum_{j=3,4} b_j(y)\chi_Q(\Omega_j(y)),\\
\beta^2(y,Q) = \int\limits_{G_1\cap Q} c(y,\eta)d\eta + \int\limits_{\Gamma\cap Q} d(y,\eta)u(\eta)d\Gamma_\eta.
\end{gathered} \tag{24.55}$$

Непосредственно проверяется, что эти меры удовлетворяют условиям 6.3, 23.2, 24.2–24.8.

25. Неограниченные возмущения диффузионных процессов

В этом параграфе мы докажем существование полугруппы Феллера, генератор которой есть неограниченное в $C(\overline{G})$ возмущение эллиптического оператора.

25.1. Предположения о неограниченных возмущениях и нелокальных операторах

Рассмотрим те же нелокальные условия, что в § 24 (см. (24.9), (24.10) или (24.13)). Пусть $\mathcal{N} \subset \partial G$ и $\mathcal{M} = \partial G \setminus \mathcal{N}$ — те же множества, что в § 24. Зафиксируем натуральное l и вещественное a такие, что

$$l \geqslant 2, \qquad a = l + 1 - \delta,$$

где $\delta \in (0, 1)$ то же, что в п. 23.4.

Замечание 25.1. В силу теоремы 23.2 и следствия 23.3 операторы

$$\mathbf{S}_q : \mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G) \to H_a^{l+2}(G), \qquad \mathbf{S}_q : \mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G) \to H_{\mathcal{N},a}^{l+2}(G)$$

ограничены в соответствующих нормах $\|\!| \cdot |\!\|$ равномерно по q при $q \geqslant q_1$, где $q_1 > 0$ достаточно большое число (указанные пространства определены в п. 5.3).

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathbf{P}_1 : H_a^{l+2}(G) \to H_{a-1}^l(G)$, удовлетворяющий следующему условию.

Условие 25.1. 1. *Если функция $u \in H_a^{l+2}(G)$ достигает положительного максимума в точке $y^0 \in G$, то $\mathbf{P}_1 u(y^0) \leqslant 0$.*

2. *Если $u \in C(\overline{G}) \cap H_a^{l+2}(G)$, то функция $\mathbf{P}_1 u$ ограничена в области G.*

3. *Для всех достаточно малых $\varrho > 0$ справедливо представление*

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{1\varrho}^1 + \mathbf{P}_{1\varrho}^2;$$

здесь операторы $\mathbf{P}_{1\varrho}^1, \mathbf{P}_{1\varrho}^2 : H_a^{l+2}(G) \to H_{a-1}^l(G)$ таковы, что

- $\|\mathbf{P}_{1\varrho}^1 u\|_{H_{a-1}^l(G)} \leqslant c(\varrho)\|u\|_{H_a^{l+2}(G)}$, *где $c(\varrho) > 0$ не зависит от u и $c(\varrho) \to 0$ при $\varrho \to 0$,*
- *оператор $\mathbf{P}_{1\varrho}^2$ компактный.*

Заметим, что $\mathrm{D}(\mathbf{P}_1) \subset C^l(\overline{G} \setminus \mathcal{K}) \subset C^2(G)$ и $\mathcal{R}(\mathbf{P}_1) \subset C^{l-2}(\overline{G} \setminus \mathcal{K}) \subset C(G)$ в силу соотношения $l \geqslant 2$ и теоремы вложения Соболева. Более того, если $u \in C(\overline{G}) \cap H_a^{l+2}(G)$, то функция $\mathbf{P}_1 u$ ограничена в области G, но необязательно непрерывна на $\overline{G}$.

Рассмотрим пример оператора $\mathbf{P}_1$.

Пример 25.1. 1. Пусть $l \geqslant 2$, $0 < \delta < 1$ и $a = l + 1 - \delta$ те же, что и выше. Пусть F — пространство с σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и борелевской мерой π. Рассмотрим вектор-функцию $z(y, \eta)$ со значениями в $\mathbb{R}^2$ и скалярную неотрицательную функцию $m(y, \eta)$, где $y \in \overline{G}$ и $\eta \in F$.

При описании движения со «скачками» частицы в области G функция $z(y, \eta)$ характеризует *направление скачка* и *длину скачка*, а функция $m(y, \eta)$ — *плотность скачка*.

Предположим, что $z(\cdot, \eta), m(\cdot, \eta) \in C^l(\overline{G})$ для любого фиксированного $\eta \in F$ и функции $D_y^\alpha z(y, \eta)$ и $D_y^\alpha m(y, \eta)$ ограничены и π-измеримы по переменной η при $|\alpha| \leqslant l$, $y \in \overline{G}$.

Пусть функция $z(y, \eta)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$y + \theta z(y, \eta) \in \overline{G} \qquad \forall y \in \overline{G},\ \eta \in F,\ \theta \in [0, 1], \tag{25.1}$$

$$|D_y^\alpha z(y, \eta)| \leqslant Z(\eta) \qquad \forall y \in \overline{G},\ \eta \in F,\ |\alpha| \leqslant l, \tag{25.2}$$

$$\int\limits_{Z \leqslant \varrho} Z^2(\eta) \pi(d\eta) \leqslant c_1(\varrho), \qquad \int\limits_{Z > \varrho} \pi(d\eta) \leqslant c_2(\varrho), \tag{25.3}$$

где $Z(\eta)$ — неотрицательная π-измеримая ограниченная функция, $c_1(\varrho), c_2(\varrho) > 0$ и $c_1(\varrho) \to 0$ при $\varrho \to 0$.

В частности, условие (25.1) означает, что скачки за пределы $\overline{G}$ невозможны. Условие (25.3) характеризует поведение меры π по отношению к малым скачкам и большим скачкам.

Для доказательства оценок в весовых пространствах мы также предположим, что

$$c|y - y'| \leqslant |(y - y') + \theta(z(y, \eta) - z(y', \eta))| \leqslant C|y - y'|,$$
$$y, y' \in \overline{G},\ \eta \in F,\ \theta \in [0, 1], \tag{25.4}$$

где $c, C > 0$. Используя неравенства (25.4), нетрудно показать, что замена переменных $Y : y \mapsto y + \theta z(y, \eta)$ есть диффеоморфизм класса C^1 (и даже класса C^l, так как $z(\cdot, \eta) \in C^l(\overline{G})$ при любом $\eta \in F$), отображающий $\overline{G}$ на $Y(\overline{G}) \subset \overline{G}$ при любых $\eta \in F$ и $\theta \in [0, 1]$ и

$$c^2 \leqslant J_{\eta,\theta}(y) \leqslant C^2, \qquad y \in G,\ \eta \in F,\ \theta \in [0, 1]. \tag{25.5}$$

где $J_{\eta,\theta}(y)$ — модуль якобиана этой замены переменных.

Теперь наложим некоторые ограничения на размер, амплитуду и плотность скачков вблизи множества $\mathcal{K}$ и вне $\mathcal{K}$. Для любого $\varrho > 0$ положим

$$G_\varrho = G \cap \mathcal{O}_\varrho(\mathcal{K}), \qquad G'_\varrho = G \setminus \overline{G_\varrho}.$$

Зафиксируем достаточно малые числа $\varrho_1 > \varrho_2 > 0$. Для $y \in G'_{\varrho_1}$ предположим, что

$$y + \theta z(y,\eta) \in G'_{\varrho_2} \qquad \forall y \in G'_{\varrho_1},\ \eta \in F,\ \theta \in [0,1]. \tag{25.6}$$

Чтобы описать функции $z(y,\eta)$ и $m(y,\eta)$ при $y \in G_{\varrho_1}$, зафиксируем произвольную точку g_j и предположим, что она совпадает с началом координат: $g_j = 0$. Пусть

$$y + \theta z(y,\eta) \in \overline{\mathcal{O}_{\tilde\chi r}(\mathcal{K})} \setminus \mathcal{O}_{\chi r}(\mathcal{K}) \qquad \forall y \in G \cap \mathcal{O}_{\varrho_1}(g_j),\ \eta \in F, \tag{25.7}$$

$$m(y,\eta) = M_j(\eta) r^{l+1-\delta} \mu_j(\omega) \qquad \forall y \in G \cap \mathcal{O}_{\varrho_1}(g_j),\ \eta \in F, \tag{25.8}$$

где ω, r — полярные координаты точки y, $\mu_j(\omega)$ — неотрицательная $l+2$ раза непрерывно дифференцируемая функция, $\tilde\chi \geqslant \chi > 0$, $M_j(\eta)$ — неотрицательная ограниченная π-измеримая функция.

Будем считать ϱ_1 настолько малым, чтобы область G совпадала с плоским углом в окрестности $\mathcal{O}_{\tilde\chi\varrho_1}(g_j)$, $j = 1,\dots,N$, и $\mathcal{O}_{\tilde\chi\varrho_1}(g_i) \cap \mathcal{O}_{\tilde\chi\varrho_1}(g_j) = \varnothing$, $i \neq j$.

Условие (25.6) означает, что частица, находящаяся «вдали» от множества $\mathcal{K}$ (т. е. вне G_{ϱ_1}), не может «перескочить» в малую окрестность множества $\mathcal{K}$ (т. е. в G_{ϱ_2}). Условие (25.7) означает, что если частица находится «вблизи» множества $\mathcal{K}$ (т. е. в G_{ϱ_1}), то она не может «перескочить» далеко от множества $\mathcal{K}$ (т. е. она остается в $G_{\tilde\chi\varrho_1}$); более того, в силу условия (25.8) плотность такого «скачка» стремится к нулю при стремлении y к множеству $\mathcal{K}$.

Зададим операторы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}^1_{1\varrho}$ и $\mathbf{P}^2_{1\varrho}$ на множестве $C_0^\infty(\overline{G} \setminus \mathcal{K})$ по формулам

$$\mathbf{P}_1 u(y) = \int\limits_F [u(y + z(y,\eta)) - u(y) - (\nabla u(y), z(y,\eta))] m(y,\eta)\pi(d\eta),$$

$$\mathbf{P}^1_{1\varrho} u(y) = \int\limits_{Z \leqslant \varrho} [u(y + z(y,\eta)) - u(y) - (\nabla u(y), z(y,\eta))] m(y,\eta)\pi(d\eta),$$

$$\mathbf{P}^2_{1\varrho} u(y) = \int\limits_{Z > \varrho} [u(y + z(y,\eta)) - u(y) - (\nabla u(y), z(y,\eta))] m(y,\eta)\pi(d\eta),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ (ср. [74, 81, 82, 103]). Ниже будет показано, что операторы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}^1_{1\varrho}, \mathbf{P}^2_{1\varrho} : H^{l+2}_{l+1-\delta}(G) \to H^l_{l-\delta}(G)$ с областью определения

$C_0^\infty(\overline{G}\setminus\mathcal{K})$ ограничены, и, следовательно, их можно продолжить по непрерывности на все пространство $H^{l+2}_{l+1-\delta}(G)$.

2. Покажем, что оператор $\mathbf{P}_1$ удовлетворяет условию 25.1.

2.1. Вначале докажем, что

$$\|\mathbf{P}^1_{1\varrho}u\|_{W^l(G)} \leqslant c(\varrho)\|u\|_{H^{l+2}_{l+1-\delta}(G)}, \tag{25.9}$$

где $c(\varrho)>0$ не зависит от u и $c(\varrho)\to 0$ при $\varrho\to 0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} U(y,\eta) &= u(y+z(y,\eta)) - u(y) - (\nabla u(y), z(y,\eta)) = \\ &= \int\limits_0^1 d\theta \int\limits_0^\theta \sum_{i,j=1}^2 u_{y_iy_j}(y+\theta' z(y,\eta)) z_i(y,\eta) z_j(y,\eta)\, d\theta' \end{aligned} \tag{25.10}$$

и запишем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}^1_{1\varrho}u\|^2_{W^l(G)} = &\sum_{|\alpha|\leqslant l} \int\limits_{G_{\varrho_1}} \left| \int\limits_{Z\leqslant\varrho} D^\alpha_y\big(U(y,\eta)m(y,\eta)\big)\pi(d\eta)\right|^2 dy + \\ &+ \sum_{|\alpha|\leqslant l} \int\limits_{G'_{\rho_1}} \left| \int\limits_{Z\leqslant\varrho} D^\alpha_y\big(U(y,\eta)m(y,\eta)\big)\pi(d\eta)\right|^2 dy. \end{aligned} \tag{25.11}$$

Используя неравенство Шварца, соотношения (25.2), явный вид функции $m(y,\eta)$ (см. (25.8)) и равенство (25.10), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\leqslant l} \int\limits_{G_{\varrho_1}} \left| \int\limits_{Z\leqslant\varrho} D^\alpha_y\big(U(y,\eta)m(y,\eta)\big)\pi(d\eta)\right|^2 dy \leqslant \\ &\leqslant c_1 \sum_{|\beta|\leqslant l+2} \int\limits_{G_{\varrho_1}} \rho^{2(|\beta|-\delta-1)} \int\limits_0^1 d\theta \int\limits_0^\theta d\theta' \int\limits_{Z\leqslant\varrho} |(D^\beta_y u)(y+\theta' z(y,\eta))|^2 Z^2(\eta)\pi(d\eta)\times \\ &\qquad\qquad \times \int\limits_{Z\leqslant\varrho} Z^2(\eta)\pi(d\eta), \end{aligned}$$

где $\rho(y)=\operatorname{dist}(y,\mathcal{K})$ и $c_1, c_2, \ldots > 0$ не зависят от u и ϱ. В силу (25.1), (25.4) и (25.5), мы можем сделать замену переменных $Y = y+\theta' z(y,\eta)$; тогда, поль-

зуясь (25.7), из последнего неравенства получим

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int\limits_{G_{\varrho_1}}\left|\int\limits_{Z\leqslant\varrho}D_y^\alpha\big(U(y,\eta)m(y,\eta)\big)\pi(d\eta)\right|^2dy\leqslant$$

$$\leqslant c_2\|u\|^2_{H^{l+2}_{l+1-\delta}(G_{\tilde\chi\varrho_1})}\left(\int\limits_{Z\leqslant\varrho}Z^2(\eta)\pi(d\eta)\right)^2. \quad (25.12)$$

Аналогично, используя условие (25.6), получаем

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int\limits_{G'_{\varrho_1}}\left|\int\limits_{Z\leqslant\varrho}D_y^\alpha\big(U(y,\eta)m(y,\eta)\big)\pi(d\eta)\right|^2dy\leqslant$$

$$\leqslant c_3\|u\|^2_{W^{l+2}(G'_{\varrho_2})}\left(\int\limits_{Z\leqslant\varrho}Z^2(\eta)\pi(d\eta)\right)^2\leqslant c_4\|u\|^2_{H^{l+2}_{l+1-\delta}(G'_{\varrho_2})}\left(\int\limits_{Z\leqslant\varrho}Z^2(\eta)\pi(d\eta)\right)^2. \quad (25.13)$$

Соотношения (25.11)–(25.13) и первое неравенство в (25.3) дают (25.9).

2.2. Разделив область G на две части G_{ϱ_1} и G'_{ϱ_1} и используя оценку

$$\big|D^\alpha U(y,\eta)\big|\leqslant c_5\left(\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\big|(D_y^\beta u)(y+z(y,\eta))\big|+\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|+1}\big|D_y^\beta u(y)\big|\right)$$

и второе неравенство в (25.3), убеждаемся в том, что

$$\|\mathbf{P}^2_{1\varrho}u\|_{W^{l+1}(G)}\leqslant\hat c(\varrho)\|u\|_{H^{l+2}_{l+1-\delta}(G)}, \quad (25.14)$$

где $\hat c(\varrho)>0$ не зависит от u.

Из оценок (25.9) и (25.14) и теоремы вложения Соболева (напомним: $l\geqslant 2$) вытекает, что функция $\mathbf{P}_1u=\mathbf{P}^1_{1\varrho}u+\mathbf{P}^2_{1\varrho}u$ непрерывна на $\overline{G}$; следовательно, она ограничена на $\overline{G}$. Таким образом, часть 2 в условии 25.1 выполнена.

Выполнение части 3 в условии 25.1 вытекает из оценок (25.9) и (25.14), ограниченности оператора вложения $W^l(G)\subset H^l_{l-\delta}(G)$ (см. часть 1 леммы 5.2) и компактности оператора вложения $W^{l+1}(G)\subset W^l(G)$.

Выполнение части 1 в условии 25.1 следует из неотрицательности функции $m(y,\eta)$ и меры π.

Пусть $\mathbf{B}_{\alpha i}$, $\mathbf{B}_{\beta i}$ и т. д. — операторы, определенные посредством мер $\alpha_i(y,\cdot)$ и $\beta_i(y,\cdot)$ (см. § 24). В этом параграфе, наряду с условиями 23.1, 23.2, 24.2–24.6 и 25.1, рассмотрим следующие условия.

Условие 25.2. *Для* $u \in H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G)$ *и* $q \geqslant q_1$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{B}_{\alpha i} u\|_{H^{l+3/2}_a(\Gamma_i)} \leqslant c\|u\|_{H^{l+2}_a(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})}, \tag{25.15}$$

$$\|\mathbf{B}_{\alpha i} u\|_{H^{l+3/2}_a(\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})})} \leqslant c\|u\|_{H^{l+2}_a(G_\sigma)}, \tag{25.16}$$

где $q_1 > 0$ *достаточно велико,* $i = 1, \dots, N$, *числа* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *и* σ *те же, что в условии* 24.4 *и* $c > 0$ *не зависит от* u *и* q.

Отметим, что нормы в весовых пространствах $H^{l+2}_a(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$, $H^{l+3/2}_a(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})})$ и $H^{l+2}_a(G_\sigma)$ эквивалентны нормам в соответствующих пространствах Соболева, так как множества $G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})}$, $\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}$ и G_σ отделены от множества $\mathcal{K}$.

Условие 25.3. *Существует такое* $q_1 > 0$, *что для* $i = 1, \dots, N$ *и любого достаточно малого* $p > 0$ *справедливы следующие утверждения*:

1. *оператор* $\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i} : H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G \cap \mathcal{M}_p) \to H^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\Gamma_i)$ *ограничен в нормах* $\|\cdot\|$ *при* $q \geqslant q_1$ *и*
$$\|\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}\|_{H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G\cap\mathcal{M}_p)\to H^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\Gamma_i)} \to 0$$
равномерно по q *при* $p \to 0$;

2. *оператор* $\tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i} : H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G \setminus \overline{\mathcal{M}_{p/2}}) \to H^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\Gamma_i)$ *ограничен в нормах* $\|\cdot\|$ *равномерно по* q *при* $q \geqslant q_1$.

Условие 25.4. *Операторы* $\mathbf{B}^2_{\beta i} : H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G) \to H^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\Gamma_i)$, $i = 1, \dots, N$, *компактные.*

Условия 25.2, 25.3 и 25.4 являются аналогами в весовых пространствах условий 24.4, 24.7 и 24.8 соответственно.

25.2. Сведение на границу

Введем операторы

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_i\} : H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G),$$
$$\mathbf{B}_{\alpha\beta} = \{\mathbf{B}_{\alpha i} + \mathbf{B}_{\beta i}\} : H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G).$$

Используя оператор $\mathbf{S}_q$, определенный в п. 24.1, введем ограниченный оператор

$$\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q : \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G), \qquad q \geqslant q_1. \tag{25.17}$$

В силу замечания 25.1 оператор в (25.17) корректно определен.

Следующая лемма позволяет сводить нелокальные задачи в ограниченных областях к операторным уравнениям на границе.

Лемма 25.1. *Для достаточно большого* $q_1 > 0$ *существует ограниченный оператор* $(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)^{-1} : \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$, $q \geqslant q_1$.

Доказательство. 1. Рассмотрим ограниченные операторы $\hat{\mathbf{B}}^1_\beta = \{\hat{\mathbf{B}}^1_{\beta i}\}$, $\tilde{\mathbf{B}}^1_\beta = \{\tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i}\}$, $\mathbf{B}^2_\beta = \{\mathbf{B}^2_{\beta i}\}$ и $\mathbf{B}_\alpha = \{\mathbf{B}_{\alpha i}\}$, действующие из $H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G)$ в $\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$.

Докажем, что оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}_q : \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$ имеет ограниченный обратный.

Введем функцию $\zeta \in C^\infty(\overline{G})$ такую, что $0 \leqslant \zeta(y) \leqslant 1$, $\zeta(y) = 1$ при $y \in \overline{G_\sigma}$ и $\zeta(y) = 0$ при $y \notin G_{\sigma/2}$, где $\sigma > 0$ — число из условий 24.4 и 25.2.

Имеем

$$\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha\mathbf{S}_q = \mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q - \mathbf{B}_\alpha\zeta\mathbf{S}_q. \tag{25.18}$$

1a. Вначале покажем, что оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q$ имеет ограниченный обратный.

Положим $\Phi = \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\psi$. Из условия 25.2 и теоремы 23.2 вытекает, что

$$\|\Phi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_a(\partial G)} \leqslant k_1\|\psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_a(\partial G)}, \tag{25.19}$$

где $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от q и ψ.

Далее, $(1-\zeta)\mathbf{S}_q\psi = 0$ в $\overline{G_\sigma}$ для любой $\psi \in \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$. Следовательно, по условию 24.4

$$\operatorname{supp}\Phi = \operatorname{supp}\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\psi \subset \partial G \cap \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}. \tag{25.20}$$

Покажем, что

$$\|[\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q]^2\psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_a(\partial G)} \leqslant k_2 q^{-1/2}\|\psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_a(\partial G)}, \qquad q \geqslant q_1, \tag{25.21}$$

где $q_1 > 0$ достаточно велико. По условию 25.2

$$\|[\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q]^2\psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_a(\partial G)} = \|\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q\Phi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_a(\partial G)} \leqslant \|\mathbf{S}_q\Phi\|_{\mathcal{H}^{l+2}_a(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})}. \tag{25.22}$$

Используя локальную априорную оценку (следствие 23.1), соотношение

$$\mathbf{P}(y,D)\mathbf{S}_q\Phi - q\mathbf{S}_q\Phi = 0$$

и замечание 25.1, имеем

$$\|\mathbf{S}_q\Phi\|_{\mathcal{H}_a^{l+2}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})} \leqslant k_4\Bigg(\sum_{i=1}^{N}\|\mathbf{S}_q\Phi|_{\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})}}\|_{H_a^{l+3/2}(\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})})} + \\ + q^{-1/2}\|\mathbf{S}_q\Phi\|_{H_a^{l+2}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})})}\Bigg) \leqslant \\ \leqslant k_5\left(\sum_{i=1}^{N}\|\mathbf{S}_q\Phi|_{\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})}}\|_{H_a^{l+3/2}(\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})})} + q^{-1/2}\|\Phi\|_{\mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G)}\right). \tag{25.23}$$

Так как функции $\mathbf{S}_q\Phi|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i\mathbf{S}_q\Phi = \Phi_i$ равны нулю на $\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})}$ в силу (25.20), то

$$\|\mathbf{S}_q\Phi|_{\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})}}\|_{H_a^{l+3/2}(\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})})} = \\ = \|\mathbf{B}_i\mathbf{S}_q\Phi|_{\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})}}\|_{H_a^{l+3/2}(\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})})} \leqslant k_6\|\mathbf{S}_q\Phi\|_{H_a^{l+2}(G_1)},$$

где $\overline{G_1} \subset G$. Используя локальную априорную оценку (следствие 23.1), соотношения $\mathbf{P}(y,D)\mathbf{S}_q\Phi - q\mathbf{S}_q\Phi = 0$ и $\overline{G_1} \cap \partial G = \varnothing$ и замечание 25.1, получим

$$\|\mathbf{S}_q\Phi|_{\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})}}\|_{H_a^{l+3/2}(\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{O}_{(\varkappa_1+\varkappa_2)/2}(\mathcal{K})})} \leqslant k_7 q^{-1/2}\|\mathbf{S}_q\Phi\|_{H_a^{l+2}(G_2)} \leqslant \\ \leqslant k_8 q^{-1/2}\|\Phi\|_{\mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G)}, \tag{25.24}$$

где $\overline{G_1} \subset G_2$ и $\overline{G_2} \subset G$.

Неравенства (25.22)–(25.24) и (25.19) дают оценку (25.21). Отсюда и из оценки (24.26) в доказательстве леммы 24.6 получаем

$$\|[\mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q]^2\psi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G)} \leqslant k_9 q^{-1/2}\|\psi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G)}. \tag{25.25}$$

Из (25.25) вытекает, что существует ограниченный оператор

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q)^{-1} : \mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G) \to \mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G)$$

и

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha(1-\zeta)\mathbf{S}_q)^{-1}\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G)\to\mathcal{H}_{\mathcal{N},a}^{l+3/2}(\partial G)} \leqslant k_{10} \tag{25.26}$$

(ср. (24.27) и (24.28)).

1b. Теперь оценим норму оператора $\mathbf{B}_\alpha\zeta\mathbf{S}_q$. Используя условие 25.2, локальную априорную оценку (следствие 23.1), соотношение $\mathbf{P}(y,D)\mathbf{S}_q\psi - q\mathbf{S}_q\psi = 0$ и замечание 25.1, получим

$$\|\mathbf{B}_\alpha\zeta\mathbf{S}_q\psi\|_{\mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G)} \leqslant k_{11}\|\mathbf{S}_q\psi\|_{H_a^{l+2}(G_{\sigma/2})} \leqslant \\ \leqslant k_{12}q^{-1/2}\|\mathbf{S}_q\psi\|_{H_a^{l+2}(G_{\sigma/4})} \leqslant k_{13}q^{-1/2}\|\psi\|_{\mathcal{H}_a^{l+3/2}(\partial G)}.$$

Отсюда и из неравенства (24.29) в доказательстве леммы 24.6 имеем

$$\|\mathbf{B}_\alpha \zeta \mathbf{S}_q \psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)} \leqslant k_{14} q^{-1/2} \|\psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)}.$$

Следовательно, учитывая (25.26), видим, что существует ограниченный оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha \mathbf{S}_q)^{-1} : \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$ и

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha \mathbf{S}_q)^{-1}\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)} \leqslant k_{15} \tag{25.27}$$

(ср. (24.30) и (24.31)).

2. Докажем, что оператор $\mathbf{I} - (\mathbf{B}_\alpha + \hat{\mathbf{B}}^1_\beta + \tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q : \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$ имеет ограниченный обратный.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Используя условие 25.3 (часть 1) и замечание 25.1, имеем

$$\|\hat{\mathbf{B}}^1_\beta \mathbf{S}_q \psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)} \leqslant k_{16} \varepsilon \|\mathbf{S}_q \psi\|_{\mathcal{H}^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G)} \leqslant k_{17} \varepsilon \|\psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)} \tag{25.28}$$

для достаточно малого $p > 0$ (напомним, что p участвует в определении оператора $\hat{\mathbf{B}}^1_\beta$), где $k_{16}, k_{17}, \ldots > 0$ не зависят от ψ, q и ε.

Теперь зафиксируем p. По условию 25.3 (часть 2)

$$\|\tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i} \mathbf{S}_q \psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\Gamma_i)} \leqslant k_{18} \|\mathbf{S}_q \psi\|_{\mathcal{H}^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G \setminus \mathcal{M}_{p/2})}. \tag{25.29}$$

Используя локальную априорную оценку (следствие 23.1), соотношения

$$\mathbf{P}(y, D)\mathbf{S}_q \psi - q \mathbf{S}_q \psi = 0, \qquad \mathbf{S}_q \psi|_{\partial G \setminus \mathcal{O}_{p/4}(\mathcal{M})} = 0$$

и замечание 25.1, получим

$$\|\mathbf{S}_q \psi\|_{\mathcal{H}^{l+2}_a(G \setminus \mathcal{M}_{p/2})} \leqslant k_{19} q^{-1/2} \|\mathbf{S}_q \psi\|_{\mathcal{H}^{l+2}_a(G \setminus \mathcal{M}_{p/4})} \leqslant k_{20} q^{-1/2} \|\psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_a(\partial G)}. \tag{25.30}$$

С другой стороны, из леммы 24.1 вытекает

$$\|\mathbf{S}_q \psi\|_{C(\overline{G} \setminus \mathcal{M}_{p/2})} \leqslant c_2 q^{-1} \|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)} \tag{25.31}$$

(ср. (24.32)). Объединяя (25.29)–(25.31), имеем

$$\|\tilde{\mathbf{B}}^1_{\beta i} \mathbf{S}_q \psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\Gamma_i)} \leqslant k_{21} q^{-1/2} \|\psi\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)}. \tag{25.32}$$

Неравенства (25.28) и (25.32) показывают, что величина

$$\|(\hat{\mathbf{B}}^1_\beta + \tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q\|_{\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)}$$

может быть сделана сколь угодно малой, если мы вначале выберем достаточно малое $p > 0$, а затем достаточно большое $q > 0$. Следовательно, учитывая (25.27), видим, что существует ограниченный оператор

$$[\mathbf{I} - (\mathbf{B}_\alpha + \hat{\mathbf{B}}^1_\beta + \tilde{\mathbf{B}}^1_\beta)\mathbf{S}_q]^{-1} : \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G).$$

3. Осталось доказать, что оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q : \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$ также имеет ограниченный обратный. Из условия 25.4 и замечания 25.1 вытекает, что оператор $\mathbf{B}^2_\beta\mathbf{S}_q$ компактный. Применяя теорему 16.4 в [38] (о компактный возмущениях фредгольмовых операторов), видим, что оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q$ также фредгольмов и $\operatorname{ind}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q) = 0$. Из п. 3 в доказательстве леммы 24.6 следует, что $\dim\ker(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q) = 0$, и, значит, оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q$ имеет ограниченный обратный. □

25.3. Существование полугрупп Феллера

Всюду в этом пункте считаем выполненными условия 23.1, 23.2, 24.2–24.6 и 25.1–25.4. Мы докажем, что описанные выше неограниченные возмущения эллиптического оператора с нелокальными краевыми условиями являются генераторами полугрупп Феллера.

Лемма 25.2. *Если функция $u \in H^{l+2}_a(G)$ достигает положительного максимума в точке $y^0 \in G$, то $\mathbf{P}(y, D)u(y^0) + \mathbf{P}_1 u(y^0) \leqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $u \in H^{l+2}_a(G)$ достигает положительного максимума в точке $y^0 \in G$. Так как $\mathbf{P}(y, D)u \in H^l_a(G) \subset C(G)$, то из принципа максимума 24.1 имеем $\mathbf{P}(y, D)u(y^0) \leqslant 0$. Отсюда и из условия 25.1 (часть 1) получаем $\mathbf{P}(y, D)u(y^0) + \mathbf{P}_1 u(y^0) \leqslant 0$. □

Лемма 25.3. *Пусть функция $u \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G)$ достигает положительного максимума в точке $y^0 \in \overline{G}$. Тогда существует такая точка $y^1 \in G$, что $u(y^1) = u(y^0)$ и $\mathbf{P}(y, D)u(y^1) + \mathbf{P}_1 u(y^1) \leqslant 0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 24.4, в которой следует заменить ссылки на лемму 24.3 ссылками на лемму 25.2. □

Следствие 25.1. *Пусть $u \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G)$. Положим*

$$f_0(y) = qu(y) - \mathbf{P}(y, D)u(y) - \mathbf{P}_1 u(y), \qquad y \in G,$$

где $q > 0$. Тогда существует такая точка $y^1 \in G$, что

$$\|u\|_{C(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{q}\,|f_0(y^1)|. \tag{25.33}$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 24.1, в котором следует заменить ссылку на лемму 24.4 ссылкой на лемму 25.3. □

Сводя нелокальные задачи на границу и пользуясь леммой 25.1, докажем, что рассматриваемые нелокальные задачи разрешимы в пространствах непрерывных функций для достаточно широкого класса правых частей.

Лемма 25.4. *Пусть $q \geqslant q_1$, где q_1 то же, что в лемме 25.1, и пусть $f_0 \in H^l_{a-1}(G)$. Тогда задача*

$$qu(y) - \mathbf{P}(y, D)u(y) = f_0(y), \qquad y \in G, \tag{25.34}$$

$$\begin{aligned} u(y) - \mathbf{B}_i u(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u(y) = 0, \qquad & y \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, N, \\ u(y) = 0, \qquad & y \in \mathcal{K}, \end{aligned} \tag{25.35}$$

допускает единственное решение $u \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$qv(y) - \mathbf{P}(y, D)v(y) = f_0(y), \qquad y \in G, \tag{25.36}$$

$$v(y) - \mathbf{B}_i v(y) = 0, \qquad y \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, N. \tag{25.37}$$

Аналогично доказательству леммы 24.7, используя теорему 23.2 и асимптотические формулы для решений нелокальных задач, можно показать, что задача (25.36), (25.37) имеет единственное решение $v \in H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G)$.

Положим $w = u - v$. Очевидно, неизвестная функция w принадлежит пространству $H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G)$ тогда и только тогда, когда $u \in H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G)$, и при этом является решением задачи

$$\begin{aligned} qw - \mathbf{P}(y, D)w = 0, \qquad & y \in G, \\ w(y) - \mathbf{B}_i w(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} w(y) - \mathbf{B}_{\beta i} w(y) = \mathbf{B}_{\alpha i} v(y) + \mathbf{B}_{\beta i} v(y), \quad & y \in \Gamma_i,\ i = 1, \ldots, N, \\ w(y) = 0, \qquad & y \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Пользуясь замечанием 25.1 и тем фактом, что оператор $\mathbf{B}_{\alpha\beta} : H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G) \to \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$ ограничен, видим, что эта задача эквивалентна операторному уравнению $\psi - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q\psi = \mathbf{B}_{\alpha\beta}v$ относительно неизвестной функции $\psi \in \mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$. Из леммы 25.1 вытекает, что это уравнение имеет единственное решение $\psi \in$

$\mathcal{H}^{l+3/2}_{\mathcal{N},a}(\partial G)$. Следовательно, задача (25.34), (25.35) также имеет единственное решение

$$u = v + w = v + \mathbf{S}_q\psi = v + \mathbf{S}_q(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)^{-1}\mathbf{B}_{\alpha\beta}v \in H^{l+2}_{\mathcal{N},a}(G).$$

Так как u удовлетворяет нелокальному условию (25.35), то $u \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G)$. $\square$

Отметим, что решение u задачи (25.34), (25.35) удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^{l+2}_a(G)} \leqslant c\|f_0\|_{H^l_{a-1}(G)}, \tag{25.38}$$

где $c > 0$ не зависит от u и f. Это вытекает из теоремы 23.2 и ограниченности оператора вложения $H^l_{a-1}(G) \subset H^l_a(G)$.

Используя лемму 25.5 и предположения о неограниченных возмущениях (см. условие 25.1), докажем, что возмущенная задача также разрешима в пространстве непрерывных функций для достаточно широкого класса правых частей.

Лемма 25.5. *Пусть $q \geqslant q_1$, где q_1 достаточно велико, и пусть $f_0 \in H^l_{a-1}(G)$. Тогда задача*

$$qu - (\mathbf{P}(y,D) + \mathbf{P}_1)u = f_0(y), \qquad y \in G, \tag{25.39}$$

$$\begin{gathered} u(y) - \mathbf{B}_i u(y) - \mathbf{B}_{\alpha i}u(y) - \mathbf{B}_{\beta i}u(y) = 0, \quad y \in \Gamma_i, \ i = 1, \dots, N, \\ u(y) = 0, \quad y \in \mathcal{K}, \end{gathered} \tag{25.40}$$

имеет единственно решение $u \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G)$.

Доказательство. Обозначим через I ограниченный оператор, действующий из $H^{l+2}_a(G)$ в $H^l_{a-1}(G)$ по формуле $Iu = u$. Рассмотрим оператор $qI - \mathbf{P}(y,D)$ как оператор, действующий из $H^{l+2}_a(G)$ в $H^l_{a-1}(G)$ с областью определения

$$\mathrm{D}(qI - \mathbf{P}(y,D)) = \{u \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G) : qu - \mathbf{P}(y,D)u \in H^l_{a-1}(G)\}.$$

В силу леммы 25.4 и неравенства (25.38) существует ограниченный оператор $(qI - \mathbf{P}(y,D))^{-1} : H^l_{a-1}(G) \to H^{l+2}_a(G)$. В частности, это означает, что оператор $qI - \mathbf{P}(y,D)$ фредгольмов и $\operatorname{ind}(qI - \mathbf{P}(y,D)) = 0$.

Введем оператор $qI - \mathbf{P}(y,D) - \mathbf{P}_1 : H^{l+2}_a(G) \to H^l_{a-1}(G)$ с областью определения $\mathrm{D}(qI - \mathbf{P}(y,D) - \mathbf{P}_1) = \mathrm{D}(qI - \mathbf{P}(y,D))$. Запишем этот оператор в виде

$$qI - \mathbf{P}(y,D) - \mathbf{P}_1 = [I - (\mathbf{P}^1_{1\varrho} + \mathbf{P}^2_{1\varrho})(qI - \mathbf{P}(y,D))^{-1}](qI - \mathbf{P}(y,D)). \tag{25.41}$$

Из условия 25.1 (часть 3) вытекает, что если $\varrho = \varrho(q) > 0$ достаточно мало, то оператор

$$I - \mathbf{P}^1_{1\varrho}(qI - \mathbf{P}(y, D))^{-1} : H^l_{a-1}(G) \to H^l_{a-1}(G)$$

есть изоморфизм, а оператор

$$\mathbf{P}^2_{1\varrho}(qI - \mathbf{P}(y, D))^{-1} : H^l_{a-1}(G) \to H^l_{a-1}(G)$$

компактный. Следовательно, в силу результатов из [38, § 16] и теоремы 12.2 в [38] оператор $qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1 : H^{l+2}_a(G) \to H^l_{a-1}(G)$ фредгольмов и $\operatorname{ind}(qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1) = 0$.

Если $u \in \ker(qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1)$, то $u \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G)$ и

$$(qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1)u = 0.$$

Значит, $u = 0$ по следствию 25.1. Таким образом, $\dim\ker(qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1) = 0$, и оператор $qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1$ имеет ограниченный обратный. Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\mathcal{R}((qI - \mathbf{P}(y, D) - \mathbf{P}_1)^{-1}) = \mathrm{D}(qI - \mathbf{P}(y, D)) \subset C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G).$$

□

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$, заданный формулой

$$\mathbf{P}_B u = \mathbf{P}(y, D)u + \mathbf{P}_1 u,$$
$$u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) = \{u \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G) : \mathbf{P}(y, D)u + \mathbf{P}_1 u \in C_B(\overline{G})\}.$$

Отметим, что $\mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C^2(G) \cap C_B(\overline{G})$ в силу соотношения $l \geqslant 2$ и теоремы вложения Соболева.

Докажем, что область определения нелокального оператора плотна в $C_B(\overline{G})$ (одно из предположений в теореме Хилле—Иосиды).

Лемма 25.6. *Множество* $\mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ *плотно в* $C_B(\overline{G})$.

Доказательство. 1. Пусть $u \in C_B(\overline{G})$. Так как $C_B(\overline{G}) \subset C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ в силу (24.14), то для любых $\varepsilon > 0$ и $q \geqslant q_1$ существует такая функция $u_1 \in C^\infty(\overline{G}) \cap C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$, что

$$\|u - u_1\|_{C(\overline{G})} \leqslant \min(\varepsilon, \varepsilon/(2c_1 k_q)), \tag{25.42}$$

где $k_q = \|(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)^{-1}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G) \to \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)}$.

Положим

$$\begin{aligned} &f_0(y) \equiv qu_1 - \mathbf{P}(y,D)u_1, && y \in G, \\ &\psi_i(y) \equiv u_1(y) - \mathbf{B}_i u_1(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u_1(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u_1(y), && y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots,N. \end{aligned} \tag{25.43}$$

Так как $u_1 \in C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$, то $\{\psi_i\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$. Используя соотношение

$$u(y) - \mathbf{B}_i u(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u(y) = 0, \qquad y \in \Gamma_i,$$

неравенство (25.42) и лемму 24.5, получим

$$\|\{\psi_i\}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)} \leqslant \|u - u_1\|_{C(\overline{G})} + \|(\mathbf{B} + \mathbf{B}_{\alpha\beta})(u - u_1)\|_{C_{\mathcal{N}}(\partial G)} \leqslant \varepsilon/(c_1 k_q). \tag{25.44}$$

Рассмотрим вспомогательную нелокальную задачу

$$\begin{aligned} qu_2 - \mathbf{P}(y,D)u_2 &= f_0(y), && y \in G, \\ u_2(y) - \mathbf{B}_i u_2(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u_2(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u_2(y) &= 0, && y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots,N, \\ u_2(y) &= 0, && y \in \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{25.45}$$

Так как $f_0 \in C^\infty(\overline{G}) \subset H^l_{a-1}(G)$, то по лемме 25.4 задача (25.45) имеет единственное решение $u_2 \in C_B(\overline{G}) \cap H^{l+2}_a(G)$.

Используя (25.43), (25.45) и соотношения $u_1(y) = u_2(y) = 0$, $y \in \mathcal{K}$, видим, что функция $w_1 = u_1 - u_2$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} qw_1 - \mathbf{P}(y,D)w_1 &= 0, && y \in G, \\ w_1(y) - \mathbf{B}_i w_1(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} w_1(y) - \mathbf{B}_{\beta i} w_1(y) &= \psi_i(y), && y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots,N, \\ w_1(y) &= 0, && y \in \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{25.46}$$

В силу условия 24.6 задача (25.46) эквивалентна операторному уравнению $\varphi - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q\varphi = \psi$ в $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$, где $w_1 = \mathbf{S}_q\varphi$. Согласно лемме 24.6 это уравнение имеет единственное решение $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)$. Следовательно, пользуясь теоремой 23.3 и неравенством (25.44), получаем

$$\|w_1\|_{C(\overline{G})} \leqslant c_1 \|(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{\alpha\beta}\mathbf{S}_q)^{-1}\| \cdot \|\{\psi_i\}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{N}}(\partial G)} \leqslant c_1 k_q \varepsilon/(c_1 k_q) = \varepsilon. \tag{25.47}$$

2. Наконец, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \lambda u_3 - \mathbf{P}(y,D)u_3 - \mathbf{P}_1 u_3 &= \lambda u_2, && y \in G, \\ u_3(y) - \mathbf{B}_i u_3(y) - \mathbf{B}_{\alpha i} u_3(y) - \mathbf{B}_{\beta i} u_3(y) &= 0, && y \in \Gamma_i,\ i = 1,\dots,N, \\ u_3(y) &= 0, && y \in \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{25.48}$$

Так как $u_2 \in (C_B(\overline{G}) \cap H_a^{l+2}(G)) \subset (C_B(\overline{G}) \cap H_{a-1}^{l}(G))$, то по лемме 25.5 задача (25.48) имеет при достаточно больших λ единственное решение $u_3 \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$.

Обозначим $w_2 = u_2 - u_3 \in C_B(\overline{G}) \cap H_a^{l+2}(G)$. Из (25.45) и (25.48) следует, что

$$\lambda w_2 - \mathbf{P}(y, D)w_2 - \mathbf{P}_1 w_2 = -\mathbf{P}(y, D)u_2 - \mathbf{P}_1 u_2 = f_0 - qu_2 - \mathbf{P}_1 u_2.$$

Применяя следствие 25.1, имеем

$$\|w_2\|_{C(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\|f_0\|_{C(\overline{G})} + q\|u_2\|_{C(\overline{G})} + \sup_{y\in G}|\mathbf{P}_1 u_2(y)|\right).$$

По условию 25.1 (часть 2) величина $\sup\limits_{y\in G}|\mathbf{P}_1 u_2(y)|$ конечна. Таким образом, выбирая достаточно большое λ, получим

$$\|w_2\|_{C(\overline{G})} \leqslant \varepsilon. \tag{25.49}$$

Из неравенств (25.42), (25.47) и (25.49) вытекает

$$\|u - u_3\|_{C(\overline{G})} \leqslant \|u - u_1\|_{C(\overline{G})} + \|u_1 - u_2\|_{C(\overline{G})} + \|u_2 - u_3\|_{C(\overline{G})} \leqslant 3\varepsilon.$$

□

Проверим выполнение остальных гипотез теоремы Хилле—Иосиды.

Лемма 25.7. 1. *Оператор* $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ *допускает замыкание* $\overline{\mathbf{P}_B}$.

2. *Пусть* q_1 *достаточно велико. Тогда для любого* $q \geqslant q_1$ *оператор* $qI - \overline{\mathbf{P}_B} : \mathrm{D}(\overline{\mathbf{P}_B}) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ *имеет ограниченный обратный* $(qI - \overline{\mathbf{P}_B})^{-1} : C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ *и*
$$\|(qI - \overline{\mathbf{P}_B})^{-1}\| \leqslant 1/q.$$

3. *Оператор* $(qI - \overline{\mathbf{P}_B})^{-1}$ *неотрицательный.*

Доказательство. 1. Вначале рассмотрим вспомогательный оператор

$$\mathbf{P} : \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset C_B(\overline{G}) \to C(\overline{G}),$$

заданный формулой

$$\mathbf{P}u = \mathbf{P}(y, D)u + \mathbf{P}_1 u,$$
$$u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}) = \{u \in C_B(\overline{G}) \cap H_a^{l+2}(G) : \mathbf{P}(y, D)u + \mathbf{P}_1 u \in C(\overline{G})\}.$$

Покажем, что $\mathbf{P}$ замыкаем. Рассмотрим произвольную последовательность

$$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{D}(\mathbf{P})$$

такую, что $u_n \to 0$ и $\mathbf{P}u_n \to v$ в $C(\overline{G})$, где $v \in C(\overline{G})$. Предположим, что $v \neq 0$. Тогда найдется точка $y^0 \in G$ и ее окрестность $U \subset G$ такие, что

$$\mathbf{P}u_n(y) > \varepsilon, \qquad y \in U, \tag{25.50}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $h \in C_0^{\infty}(G)$ такую, что $h(y^0) = 1$ и $h(y) = 0$ при $y \in \overline{G} \setminus U$. Введем функции

$$\hat{u}_n(y) = u_n(y) + \frac{\varepsilon h(y)}{1 + \sup\limits_{y' \in G} |\mathbf{P}h(y')|}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Имеем

$$\begin{cases} \hat{u}_n(y^0) = u_n(y^0) + \dfrac{\varepsilon}{1 + \sup\limits_{y' \in G} |\mathbf{P}h(y')|} \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2 + 2\sup\limits_{y' \in G} |\mathbf{P}h(y')|}, \\ \hat{u}_n(y) = u_n(y), \qquad y \in \overline{G} \setminus U, \end{cases}$$

при всех достаточно больших n. Следовательно, при достаточно больших n каждая из функций $\hat{u}_n$ достигает положительного максимума в некоторой точке $\hat{y}^n \in U$, и по лемме 25.2 $\mathbf{P}\hat{u}_n(\hat{y}^n) \leqslant 0$.

Однако в силу неравенства (25.50) имеем

$$\mathbf{P}\hat{u}_n(\hat{y}^n) = \mathbf{P}u_n(\hat{y}^n) + \varepsilon \frac{\mathbf{P}h(\hat{y}^n)}{1 + \sup\limits_{y' \in G} |\mathbf{P}h(y')|} > \mathbf{P}u_n(\hat{y}^n) - \varepsilon > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $v = 0$ и, значит, оператор $\mathbf{P}$ замыкаем.

2. Так как $C^l(\overline{G}) \subset H^l_{a-1}(G)$, то в силу леммы 25.5 $C^l(\overline{G}) \subset \mathcal{R}(qI - \mathbf{P})$. Значит, образ $\mathcal{R}(qI - \mathbf{P})$ плотен в $C(\overline{G})$.

С другой стороны, согласно следствию 25.1

$$\|u\|_{C_B(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{q} \|(qI - \overline{\mathbf{P}})u\|_{C(\overline{G})} \tag{25.51}$$

для любой $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$. Отсюда, из замкнутости оператора $qI - \overline{\mathbf{P}}$ и плотности $\mathcal{R}(qI - \mathbf{P})$ в $C(\overline{G})$ вытекает, что существует ограниченный оператор $(qI - \overline{\mathbf{P}})^{-1} : C(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ и для любой $u \in \mathrm{D}(\overline{\mathbf{P}})$ выполнена оценка (25.51).

3. Докажем, что оператор $(qI - \overline{\mathbf{P}})^{-1}$ неотрицателен. Вначале возьмем произвольную функцию $f \in C(\overline{G})$ такую, что $f(y) > 0$, $y \in \overline{G}$. Так как образ

$\mathcal{R}(qI-\mathbf{P})$ плотен в $C(\overline{G})$, то найдется такая последовательность $f_n \in \mathcal{R}(qI-\mathbf{P})$, что $f_n(y) > 0$, $y \in \overline{G}$, и $f_n \to f$ в $C(\overline{G})$. Следовательно, используя лемму 25.3, получаем

$$(qI - \overline{\mathbf{P}})^{-1} f = \lim_{n\to\infty} (qI - \mathbf{P})^{-1} f_n.$$

Если $f \in C(\overline{G})$ и $f(y) \geqslant 0$, $y \in \overline{G}$, то существует такая последовательность $F_n \in C(\overline{G})$, что $F_n(y) > 0$, $y \in \overline{G}$, и $F_n \to f$ в $C(\overline{G})$. Значит, $(qI - \overline{\mathbf{P}})^{-1} f \geqslant 0$ для любой $f \in C(\overline{G})$ такой, что $f(y) \geqslant 0$, $y \in \overline{G}$.

4. Теперь рассмотрим оператор $\mathbf{P}_B$. Так как $\mathbf{P}_B \subset \mathbf{P}$, то $\mathbf{P}_B$ замыкаем (т. е. утверждение 1 доказано).

Поскольку $\mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \cap H_a^{l+2}(G)$ и $\mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ плотна в $C_B(\overline{G})$ по лемме 25.6, то множество $C_B(\overline{G}) \cap H_a^{l+2}(G)$ также плотно в $C_B(\overline{G})$. Поэтому в силу леммы 25.5 образ $\mathcal{R}(qI - \mathbf{P}_B)$ плотен в $C_B(\overline{G})$.

С другой стороны, согласно следствию 25.1

$$\|u\|_{C_B(\overline{G})} \leqslant \frac{1}{q} \|(qI - \overline{\mathbf{P}}_B)u\|_{C(\overline{G})} \quad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B).$$

Отсюда, из замкнутости оператора $qI - \overline{\mathbf{P}_B}$ и плотности $\mathcal{R}(qI - \mathbf{P}_B)$ в $C_B(\overline{G})$ получаем утверждение 2.

3. Утверждение 3 вытекает из неотрицательности $(qI - \overline{\mathbf{P}})^{-1}$ и соотношения $(qI - \overline{\mathbf{P}_B})^{-1} \subset (qI - \overline{\mathbf{P}})^{-1}$. □

Из лемм 25.6 и 25.7 и теоремы Хилле—Иосиды (теорема 23.1) получаем основной результат этого параграфа.

Теорема 25.1. *Оператор* $\overline{\mathbf{P}_B} : \mathrm{D}(\overline{\mathbf{P}_B}) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ — *генератор полугруппы Феллера.*

В следующем пункте приведем пример нелокальных операторов, удовлетворяющих условиям этого пункта.

25.4. Пример

Пусть $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{K}$, где Γ_1 и Γ_2 — кривые класса C^∞, открытые в топологии ∂G, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ и $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \mathcal{K}$; множество $\mathcal{K}$ состоит из двух точек g_1 и g_2. Обозначим через Ω_j, $j = 1, \ldots, 4$, невырожденные преобразования класса C^{l+2}, определенные в некоторой окрестности $\overline{\Gamma_1}$ и удовлетворяющие следующим условиям (см. рис. 25.1):

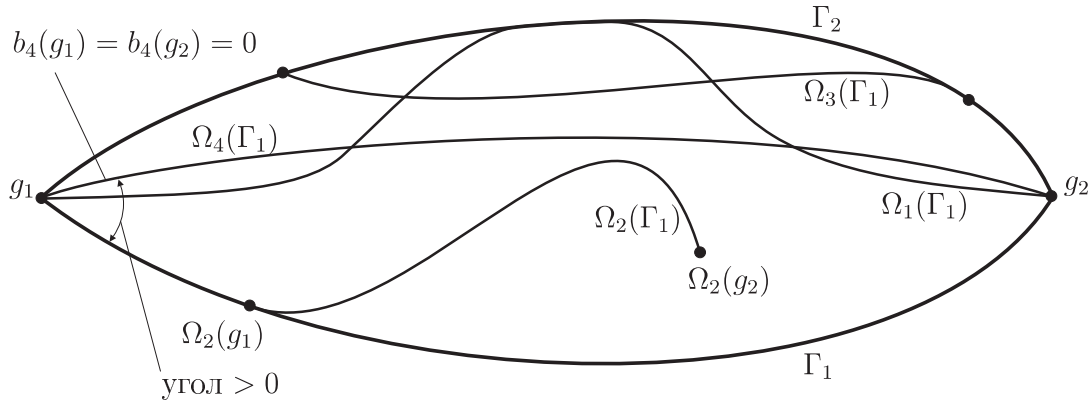

Рис. 25.1. Нетрансверсальные нелокальные условия

1. $\Omega_1(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, $\Omega_1(\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \subset G$, $\Omega_1(\Gamma_1 \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \subset G \cup \Gamma_2$ и $\Omega_1(y)$ есть композиция сдвига аргумента, поворота и гомотетии при $y \in \overline{\Gamma_1} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$;

2. существуют числа такие $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$ и $\sigma > 0$, что $\Omega_2(\overline{\Gamma_1}) \subset \overline{G} \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$ и $\Omega_2(\overline{\Gamma_1} \setminus \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})) \subset \overline{G_\sigma}$; кроме того, $\Omega_2(g_1) \in \Gamma_1$ и $\Omega_2(g_2) \in G$;

3. $\Omega_3(\overline{\Gamma_1}) \subset G \cup \Gamma_2$ и $\Omega_3(\mathcal{K}) \subset \Gamma_2$;

4. $\Omega_4(\overline{\Gamma_1}) \subset G \cup \overline{\Gamma_2}$ и $\Omega_4(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$; угол между лучами, касательными к Γ_1 и $\Omega_4(\Gamma_1)$ в точке g_j, ненулевой.

Введем функции $b_j \in C^{l+2}(\overline{\Gamma_1})$, $b_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, 4$. Пусть G_1 — ограниченная область, $G_1 \subset G$, и $\Gamma \subset \overline{G}$ — кривая класса C^1, и пусть $c(y,\eta)$ и $d(y,\eta)$ — неотрицательные функции, $D_y^\alpha c(y,\eta) \in C(\overline{G} \times \overline{G_1})$, $D_y^\alpha d(y,\eta) \in C(\overline{G} \times \overline{\Gamma})$, $|\alpha| \leqslant l+2$.

Рассмотрим следующие нелокальные краевые условия:

$$u(y) - \sum_{j=1}^{4} b_j(y) u(\Omega_j(y)) - \int_{G_1} c(y,\eta) u(\eta) d\eta - \int_{\Gamma} d(y,\eta) u(\eta) d\Gamma_\eta = 0, \quad y \in \Gamma_1,$$

$$u(y) = 0, \quad y \in \overline{\Gamma_2}.$$

Пусть $Q \subset \overline{G}$ — произвольное борелевское множество; введем меры $\mu_i(y,\cdot)$:

$$\mu_1(y,Q) = \sum_{j=1}^{4} b_j(y) \chi_Q(\Omega_j(y)) + \int_{G_1 \cap Q} c(y,\eta) d\eta + \int_{\Gamma \cap Q} d(y,\eta) u(\eta) d\Gamma_\eta, \quad y \in \Gamma_1,$$

$$\mu_2(y,Q) = 0, \qquad y \in \Gamma_2.$$

Определим множества $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ так же, как и выше. Предположим, что

$$\mu_1(y,\overline{G}) \leqslant 1, \ y \in \Gamma_1; \qquad \int_{\Gamma \cap \mathcal{M}} d(y,\eta) d\Gamma_\eta < 1, \ y \in \mathcal{M};$$

$$b_2(g_1) = 0 \text{ или } \mu(\Omega_2(g_1), \overline{G}) = 0, \ b_2(g_2) = 0; \ b_4(g_j) = 0; \ c(g_j,\cdot) = 0; \ d(g_j,\cdot) = 0.$$

Введем срезающую функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с носителем в $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$, равную единице на $\mathcal{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K})$ и такую, что $0 \leqslant \zeta(y) \leqslant 1$, $y \in \mathbb{R}^2$. Пусть $y \in \overline{\Gamma_1}$, и пусть $Q \subset \overline{G}$ — произвольное борелевское множество; тогда меры

$$\delta(y,Q) = \zeta(y)b_1(y)\chi_Q(\Omega_1(y)), \qquad \alpha(y,Q) = b_2(y)\chi_Q(\Omega_2(y)),$$
$$\beta^1(y,Q) = \big(1-\zeta(y)\big)b_1(y)\chi_Q(\Omega_1(y)) + \sum_{j=3,4} b_j(y)\chi_Q(\Omega_j(y)),$$
$$\beta^2(y,Q) = \int_{G_1\cap Q} c(y,\eta)d\eta + \int_{\Gamma\cap Q} d(y,\eta)u(\eta)d\Gamma_\eta.$$

удовлетворяют условиям 6.3, 23.2, 24.2–24.6 и 25.2–25.4.

26. Несуществование полугрупп Феллера

26.1. Оператор Лапласа в весовых пространствах

В этом параграфе будут построены примеры, в которых замыкание оператора, соответствующего нелокальной задаче, не будет генератором полугруппы Феллера.

Предварительно выведем в пространстве $H^l_a(\mathbb{R}^2)$ асимптотику решений уравнения

$$\Delta u = f(y), \qquad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \tag{26.1}$$

Записывая уравнение (26.1) в полярных координатах и формально применяя преобразование Меллина по переменной r, получим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{d^2\tilde{u}(\omega,\lambda)}{d\omega^2} - \lambda^2\tilde{u}(\omega,\lambda) = \tilde{F}(\omega,\lambda), \qquad 0<\omega<2\pi,$$
$$\tilde{u}(0,\lambda) = \tilde{u}(2\pi,\lambda), \quad \frac{d\tilde{u}(0,\lambda)}{d\omega} = \frac{d\tilde{u}(2\pi,\lambda)}{d\omega},$$

где $\tilde{F}(\omega,\lambda)$ — преобразование Меллина функции $r^2 f(\omega,r)$, а λ — комплексный параметр.

Рассмотрим соответствующую задачу на собственные значения

$$\begin{gathered}\varphi''(\omega) - \lambda^2\varphi(\omega) = 0, \qquad 0<\omega<2\pi,\\ \varphi(0) = \varphi(2\pi), \qquad \varphi'(0) = \varphi'(2\pi).\end{gathered} \tag{26.2}$$

Собственными значениями являются числа $\lambda_s = si$, $s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Собственному значению $\lambda_0 = 0$ отвечает собственный вектор $\varphi_0(\omega) \equiv 1$; кроме того существует присоединенный вектор $\hat{\varphi}_0(\omega) \equiv 0$. Собственным значениям λ_s,

$s = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отвечают собственные векторы $\varphi_s(\omega) = \cos s\omega$ и $\psi_s(\omega) = \sin s\omega$; присоединенных векторов при $s \neq 0$ нет.

Из теоремы 5.1 в [13] получаем следующий результат.

Лемма 26.1. *Пусть $f \in H^0_a(\mathbb{R}^2) \cap H^0_{a'}(\mathbb{R}^2)$. Предположим, что число a' нецелое и $a' \neq a$, а $\mathcal{S}$ обозначает множество целых чисел, лежащих в интервале $\big(\min(a, a'), \max(a, a')\big)$. Если u — решение задачи* (26.1)*, принадлежащее пространству $H^2_a(\mathbb{R}^2)$, то*

$$u = \begin{cases} c_0 + \hat{c}_0 \ln r + \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S} \setminus \{0\}} r^s (c_s \cos s\omega + d_s \sin s\omega) + u', & \text{если} \quad 0 \in \mathcal{S}, \\ \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S}} r^s (c_s \cos s\omega + d_s \sin s\omega) + u', & \text{если} \quad 0 \notin \mathcal{S}, \end{cases}$$

где c_s, d_s, $s \in \mathcal{S}$, и $\hat{c}_0$ — некоторые константы, а u' — решение задачи (26.1)*, принадлежащее пространству $H^2_{a'}(\mathbb{R}^2)$.*

26.2. «Скачки» с ненулевой вероятностью за пределы окрестности точек завершения процесса

Постановка нелокальной задачи

В этом примере покажем, что условие 24.6 существенно.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{K}$, где Γ_1 и Γ_2 открытые и связные в топологии ∂G кривые класса C^∞ такие, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ и $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2} = \mathcal{K}$; множество $\mathcal{K}$ состоит из двух точек g_1 и g_2. Предположим, что в некоторой окрестности точек g_i, $i = 1, 2$, область G совпадает с плоским углом раствора π.

Рассмотрим задачу (см. рис. 26.1)

$$\Delta u(y) = f_0(y), \qquad y \in G, \tag{26.3}$$

$$u(y) - b_1(y) u(\Omega_1(y)) = 0, \qquad y \in \Gamma_1, \tag{26.4}$$

$$u(y) = 0, \qquad y \in \overline{\Gamma_2}, \tag{26.5}$$

где функция $b_1 \in C^\infty(\overline{\Gamma_1})$ такова, что

1. $0 \leqslant b_1(y) \leqslant 1$,
2. $b_1(y) = b_1^* > 0$ при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$,
3. $b_1(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_{2\varepsilon}(g_1)$,

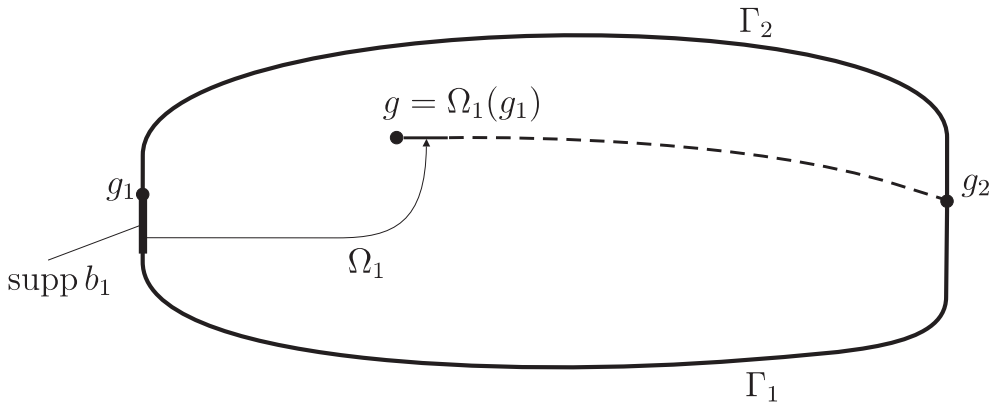

Рис. 26.1. Задача (26.3)–(26.5)

а Ω_1 — гладкое невырожденное преобразование, заданное в некоторой окрестности кривой $\overline{\Gamma_1}$, причем

1. $\Omega_1(\Gamma_1) \subset G$, $\Omega_1(g_1) \in G$, $\Omega_1(g_2) = g_2$,
2. $\Omega_1(y)$ при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$ есть композиция поворота вокруг точки g_1 и сдвига на некоторый вектор.

Положим $g = \Omega_1(g_1)$. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что

$$\mathcal{O}_\varepsilon(g_1) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2) = \varnothing, \qquad \mathcal{O}_\varepsilon(g) \cap \partial G = \varnothing, \qquad \mathcal{O}_\varepsilon(g) \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) = \varnothing, \quad j = 1, 2.$$

Введем меру $\alpha(y, \cdot)$, $y \in \partial G$, такую, что для любого борелевского множества $Q \subset \overline{G}$

$$\begin{aligned} \alpha(y, Q) &= b_1(y)\chi_Q(\Omega_1(y)), \quad && y \in \Gamma_1, \\ \alpha(y, Q) &= 0, && y \in \overline{\Gamma_2}, \end{aligned}$$

Тогда краевые условия (26.4), (26.5) можно записать в виде

$$b(y)u(y) + \int\limits_{\overline{G}} [u(y) - u(\eta)]\alpha(y, d\eta) = 0, \qquad y \in \partial G,$$

где $b(y) = 1 - \alpha(y, \overline{G})$ (ср. (24.9)). Очевидно, $\overline{\Gamma_2} \subset \mathcal{N}$, $\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g_2)} \cap \Gamma_1 \subset \mathcal{N}$, и $\mathcal{M} \subset \Gamma_1 \setminus \overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g_2)}$.

Рассмотрим оператор

$$\mathbf{B}_{\alpha 1}u(y) = \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\alpha(y, d\eta) = b_1(y)u(\Omega_1(y)), \qquad y \in \Gamma_1.$$

Легко проверить, что условия 23.1, 23.2, 24.1–24.4, 24.7 и 24.8 выполнены (с $\mathbf{P}(y, D) = \Delta$, $\mathbf{P}_1 = 0$ и $\beta_i(y, \overline{G}) \equiv 0$). Покажем, что условие 24.6 нарушено.

Действительно, $\mathbf{B}_{\alpha 1}u \in C(\overline{\Gamma_1})$ для любой $u \in C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$, так как функция b_1 и преобразование Ω_1 непрерывны. Однако если $u \in C_{\mathcal{N}}(\overline{G})$ и $u(\Omega_1(g_1)) \neq 0$, то $\lim\limits_{y \to g_1} \mathbf{B}_{\alpha 1}u(y) = b_1^* u(\Omega_1(g_1)) \neq 0$, т. е. $\mathbf{B}_{\alpha 1}u \notin C_{\mathcal{N}}(\overline{\Gamma_1})$.

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$, заданный формулой

$$\mathbf{P}_B u = \Delta u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) = \{u \in C_B(\overline{G}) : \Delta u \in C_B(\overline{G})\}, \tag{26.6}$$

где $C_B(\overline{G})$ — множество функций из $C(\overline{G})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (26.4), (26.5).

Лемма 26.2. *Если $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$, то $u \in W^2(G')$ для любой области G' такой, что $\overline{G'} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}$.*

Доказательство. Положим

$$f = \Delta u. \tag{26.7}$$

Так как $f \in L_2(G)$, то из теоремы о внутренней гладкости (см., например, теорему 3.2 в [39, гл. 2]) вытекает, что $u \in W^2_{\mathrm{loc}}(G)$. Следовательно, остается доказать, что $u \in W^2(G \cap \mathcal{O}_R(y^0))$, где y^0 — произвольная точка на Γ_j, $j = 1, 2$, $R = R(y^0)$ и $\overline{\mathcal{O}_R(y^0)} \cap \mathcal{K} = \varnothing$.

Рассмотрим область G_R с гладкой границей ∂G_R такую, что

$$G \cap \mathcal{O}_R(y^0) \subset G_R \subset G.$$

Если $y^0 \in \Gamma_1 \cap \mathcal{O}_R(y^0)$, то рассмотрим такую функцию $\psi \in W^{3/2}(\partial G_R)$, что $\psi(y) = b_1(y)u(\Omega_1(y))$ при $y \in \Gamma_1 \cap \mathcal{O}_R(y^0)$. Если $y^0 \in \Gamma_2 \cap \mathcal{O}_R(y^0)$, то рассмотрим такую функцию $\psi \in W^{3/2}(\partial G_R)$, что $\psi(y) = 0$ при $y \in \Gamma_2 \cap \mathcal{O}_R(y^0)$.

Пусть $v \in W^2(G_R) \subset C(\overline{G_R})$ — решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta v &= f(y), \quad y \in G_R, \\ v|_{\partial G_R} &= \psi(y), \quad y \in \partial G_R. \end{aligned} \tag{26.8}$$

Из (26.7) и (26.8) вытекает, что функция $w = u - v \in C(\overline{G_R})$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0, \quad y \in G \cap \mathcal{O}_R(y^0), \\ w(y) &= 0, \quad y \in \partial G \cap \mathcal{O}_R(y^0). \end{aligned} \tag{26.9}$$

Применяя теорему о внутренней гладкости (см., например, теорему 3.2 в [39, гл. 2]) к уравнению Лапласа в (26.9), видим, что $w \in C^\infty(G \cap \mathcal{O}_R(y^0)) \cap$

$C(\overline{G \cap \mathcal{O}_R(y^0)})$. Далее, применяя лемму 6.18 в [11] к задаче (26.9), получаем $w \in C^2(\overline{G \cap B_{R/2}(y^0)})$. Следовательно,

$$u = w + v \in W^2(G \cap B_{R/2}(y^0)).$$

Так как $y^0 \in \Gamma_j$ произвольно, лемма доказана. □

Лемма 26.3. *Оператор* $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ *допускает замыкание* $\overline{\mathbf{P}_B}$.

Доказательство. Оператор $\mathbf{P}_B$ есть сужение оператора $\mathbf{P} : C(\overline{G}) \to C(\overline{G})$, заданного формулой

$$\mathbf{P}u = \Delta u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}) = \{u \in C(\overline{G}) : \Delta u \in C(\overline{G})\}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что оператор $\mathbf{P}$ допускает замыкание. Очевидно, $C^2(\overline{G}) \subset \mathrm{D}(\mathbf{P})$; значит, множество $\mathrm{D}(\mathbf{P})$ плотно в $C(\overline{G})$. Более того, по принципу максимума 24.1 $\mathbf{P}u(y^0) \leqslant 0$, если $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$ достигает положительного максимума в точке y^0. Отсюда и из теоремы 9.3.3 в [102] вытекает, что оператор $\mathbf{P}$ допускает замыкание. □

В этом пункте мы докажем следующий результат.

Теорема 26.1. *Пусть* $\overline{\mathbf{P}_B} : \mathrm{D}(\overline{\mathbf{P}_B}) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ — *замыкание оператора* (26.6). *Тогда* $\overline{\mathbf{P}_B}$ *не является генератором полугруппы Феллера.*

В силу теоремы Хилле—Иосиды (теоремы 23.1) достаточно показать, что для некоторого $q > 0$ образ $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B} - q\mathbf{I})$ не совпадает с $C_B(\overline{G})$.

Доказательство теоремы 26.1

Для доказательства теоремы 26.1 получим асимптотику решения $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ задачи (26.3)–(26.5).

Рассмотрим следующую модельную задачу с комплексным параметром λ, соответствующую точке g_1:

$$\varphi''(\omega) - \lambda^2\varphi(\omega) = 0, \qquad 0 < \omega < \pi, \tag{26.10}$$

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \tag{26.11}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g_1 такие, что $(0, r) \in \Gamma_1$ и $(\pi, r) \in \Gamma_2$ при $0 < r < \varepsilon$. Собственные значения этой задачи имеют вид $\lambda_{1,k} =$

ki, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, а соответствующие собственные векторы — $\varphi_{1,k} = \sin k\omega$. Присоединенный векторов нет.

Так как $b_1(y) = 0$ вблизи точки g_2, то точке g_2 соответствует такая же модельная задача.

В этом примере будем использовать следующие весовые пространства:

$$H_a^l(G) = H_a^l(G, \mathcal{K} \cup \{g\}),$$

$$H_a^l(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)) = H_a^l(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j), \{g_j\}), \quad H_a^l(\mathcal{O}_\varepsilon(g)) = H_a^l(\mathcal{O}_\varepsilon(g), \{g\}),$$

а также соответствующие пространства следов. Подчеркнем, что пространство $H_a^l(G)$ (в отличие пространств из предыдущих параграфов) состоит из функций, которые могут иметь степенные особенности не только вблизи множества $\mathcal{K}$, но и вблизи точки g.

Зафиксируем такое число δ, что

$$0 < \delta < 1. \tag{26.12}$$

Лемма 26.4. *Пусть* $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$. *Тогда* $u \in H_{1-\delta}^2(G)$.

Доказательство. Из леммы 26.2 следует, что $u \in W^2(G')$ для любой области G' такой, что $\overline{G'} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}$. Так как $u(g) = u(g_1)/b_1^* = 0$, то по лемме 5.2 $u \in H_{1-\delta}^2(\mathcal{O}_\varepsilon(g))$. Следовательно, используя (26.4), (26.5) и тот факт, что преобразование Ω_1 — гладкое и невырожденное, получаем

$$\Delta u \in C(\overline{G}) \subset H_{1-\delta}^0(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)), \tag{26.13}$$

$$u|_{\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} \in H_{1-\delta}^{3/2}(\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)), \qquad u|_{\Gamma_2 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = 0. \tag{26.14}$$

Используя (26.13), (26.14) и соотношение $u \in C(\overline{G}) \subset H_{-1+\delta}^0(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$, из леммы 14.2 выводим

$$u \in H_{1+\delta}^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)). \tag{26.15}$$

Согласно (26.12) полоса $-\delta \leqslant \operatorname{Im} \lambda \leqslant \delta$ не содержит собственных значений $\lambda_{1,k}$ задачи (26.10), (26.11). Следовательно, из соотношений (26.13)–(26.15) и теоремы 2.2 в [13] получим $u \in H_{1-\delta}^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$.

Аналогично доказывается, что $u \in H_{1-\delta}^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2))$. □

Введем ограниченный оператор $\mathbf{L}_a(q) : H_a^2(G) \to \mathcal{H}_a^0(G, \partial G)$ по формуле

$$\mathbf{L}_a(q)u = \{\Delta u - qu,\ u|_{\Gamma_1} - b_1(y)u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1},\ u|_{\Gamma_2}\}, \qquad q \geqslant 0.$$

Обозначим также $\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_a(0)$.

Лемма 26.5. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta}(q) = 0$.

Доказательство. Вначале положим $q = 0$ и докажем, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta} = 0$. Пусть $u \in \ker \mathbf{L}_{1-\delta}$. Без ограничения общности можем считать, что функция u вещественнозначна. Из леммы 26.1 получаем следующую асимптотику функции u вблизи точки g:

$$u(y) = r(c_1 \cos\omega + d_1 \sin\omega) + v(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \tag{26.16}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g такие, что $(0, r) \in \Omega(\Gamma_1)$ при $0 < r < \varepsilon$, c_1 и d_1 — некоторые константы и $v \in H^2_{-\delta}(\mathcal{O}_\varepsilon(g))$. В частности, из (26.16) и теоремы вложения Соболева вытекает, что $u \in C(\overline{G} \setminus \mathcal{K})$. Используя соотношения (26.3)–(26.5) и (26.16), получаем

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ u|_{\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = b_1^* c_1 r + w(r), \qquad u|_{\Gamma_2 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = 0, \end{gathered} \tag{26.17}$$

где $w \in H^{3/2}_{-\delta}(\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$.

Следовательно, применяя лемму 4.3 в [13] и теорему 2.2 в [13], видим, что

$$u(y) = r\psi(\omega) + v(y), \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \tag{26.18}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g_1, $\psi \in C^\infty([0, \pi])$ и $v \in H^2_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)) \subset W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$. Таким образом, учитывая теорему вложения Соболева, имеем $u \in C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)})$.

Аналогично можно показать, что $u \in C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2)})$. Следовательно, $u \in C(\overline{G})$, и мы можем применить принцип максимума 24.1, который дает $u = 0$, т. е. $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta} = 0$.

По теореме 3.4 в [59] оператор $\mathbf{L}_{1-\delta}(q)$ фредгольмов при любом q. С другой стороны, размерность ядра фредгольмова оператора не возрастает при малых возмущениях (см. [38, § 16]), поэтому $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta}(q) = 0$ при всех достаточно малых $q > 0$. □

Лемма 26.6. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) \leqslant 1$.

Доказательство. 1. Вначале положим $q = 0$ и докажем, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 1$. Пусть $u \in \ker \mathbf{L}_{1+\delta}$. Без ограничения общности предположим, что функция u вещественнозначная. Из леммы 26.1 получаем следующую асимптотику функции u вблизи точки g:

$$u(y) = c_0 + \hat{c}_0 \ln r + r(c_1 \cos\omega + d_1 \sin\omega) + v(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \tag{26.19}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g такие, что $(0,r) \in \Omega_1(\Gamma_1)$ при $0 < r < \varepsilon$, c_0, $\hat{c}_0$, c_1 и d_1 — некоторые константы и $v \in H^2_{-\delta}(\mathcal{O}_\varepsilon(g))$. Пользуясь соотношениями (26.3)–(26.5) и (26.19), получим

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ u|_{\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = b_1^*(c_0 + \hat{c}_0 \ln r + c_1 r) + w(r), \qquad u|_{\Gamma_2 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = 0, \end{gathered} \tag{26.20}$$

где $w \in H^{3/2}_{-\delta}(\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$.

Следовательно, применяя лемму 4.3 в [13] и теорему 2.2 в [13], видим, что

$$u(y) = c_0 b_1^* \varphi(\omega) + \hat{c}_0 b_1^* \ln r \hat{\varphi}(\omega) + r\psi(\omega) + v(y), \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \tag{26.21}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g_1 такие, что $(0,r) \in \Gamma_1$ при $0 < r < \varepsilon$, $\varphi, \hat{\varphi}, \psi \in C^\infty([0,\pi])$, функции φ и $\hat{\varphi}$ не зависят от $u, v, c_0, \hat{c}_0$ и $v \in H^2_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)) \subset W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$. В частности, $\varphi(\omega)$ — это функция, зависящая только от полярного угла ω и являющаяся решением задачи

$$\begin{gathered} \Delta_y \varphi = 0, \qquad r > 0,\ 0 < \omega < \pi, \\ \varphi(0) = 1, \qquad \varphi(\pi) = 0, \end{gathered}$$

т. е. $\varphi(\omega)$ имеет вид

$$\varphi(\omega) = 1 - \omega/\pi. \tag{26.22}$$

Рассмотрим поведение функции u вблизи точки g_2. Имеем

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2), \\ u|_{\Gamma_2 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = 0, \qquad u|_{\Gamma_2 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = 0. \end{gathered} \tag{26.23}$$

Следовательно, применяя теорему 2.2 в [13], получим

$$u(y) = cr \sin\omega + v(y), \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2), \tag{26.24}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g_2 и $v \in H^2_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2)) \subset W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2))$. Таким образом, $u \in W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2))$.

Из соотношений (26.19), (26.21) и (26.24) вытекает, что любая функция $u \in \ker \mathbf{L}_{1+\delta}$ может быть записана в виде

$$u(y) = c_0 u_0(y) + \hat{c}_0 \hat{u}_0(y) + U(y), \qquad y \in G, \tag{26.25}$$

где $u_0, \hat{u}_0 \in C^\infty(\overline{G} \setminus \{g_1, g\})$ таковы, что[4]

$$u_0(y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \\ b_1^* \varphi(\omega), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ 0, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_2), \end{cases} \qquad \hat{u}_0(y) = \begin{cases} \ln r, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \\ b_1^* \ln r \hat{\varphi}(\omega), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ 0, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_2), \end{cases} \tag{26.26}$$

[4]Считаем, что в каждой ε-окрестности в (26.26) задана своя система полярных координат ω, r такая, что точка $r = 0$ соответствует центру окрестности.

$U \in W^2(G) \subset C(\overline{G})$ и $U(g_1) = U(g_2) = U(g) = 0$. Отсюда и из леммы леммы 5.2 (часть 2), в частности, вытекает, что $U \in H^2_{1-\delta}(G)$.

Из представления (26.25) и леммы 26.5 следует, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 2$.

2. Докажем, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 1$. Предположим противное: пусть существуют две линейно независимые функции $v_1, v_2 \in \ker \mathbf{L}_{1+\delta}$. Так как каждая из этих функций представима в виде (26.25), то некоторая их нетривиальная линейная комбинация (которую мы обозначим через u) имеет вид

$$u(y) = u_0(y) + U(y). \tag{26.27}$$

Соотношения (26.22), (26.26) и (26.27) дают $u \in C(\overline{G} \setminus \{g_1\})$ и

$$M = \sup_{y \in \overline{G} \setminus \{g_1\}} |u(y)| < \infty.$$

Покажем, что $M = 0$. Для этого рассмотрим последовательность $\{y^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{G} \setminus \{g_1\}$ такую, что

$$u(y^n) \to M, \qquad n \to \infty.$$

Так как последовательность $\{y^n\}$ ограничена, из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке y^0. Обозначим эту подпоследовательность снова через $\{y^n\}$, т. е.

$$y^n \to y^0, \qquad n \to \infty.$$

Если $y^0 \in G$, то в силу непрерывности u в области G имеем $|u(y^0)| = M$. Следовательно, по принципу максимума 24.1 имеем $u \equiv \mathrm{const}$, что невозможно, так как $\varphi(\omega) \not\equiv \mathrm{const}$.

Пусть $y^0 \in \Gamma_2 \cup \{g_2\}$. Используя непрерывность u на $\Gamma_2 \cup \{g_2\}$ и краевое условие (26.5), получаем

$$0 = |u(y^0)| = \lim_{n\to\infty} |u(y^n)| = M.$$

Если $y^0 \in \Gamma_1$, то в силу непрерывности u на Γ_1 и краевого условия (26.4), имеем

$$M = \lim_{n\to\infty} |u(y^n)| = |u(y^0)| = b_1^* |u(\Omega_1(y^0))|.$$

Следовательно, $|u(\Omega_1(y^0))| = M/b_1^* \geqslant M$. Это возможно только тогда, когда $b_1^* = 1$, но в этом случае $|u(\Omega_1(y^0))| = M$. Это противоречит тому, что $\Omega_1(y^0) \in G$.

Наконец рассмотрим случай, когда $y^0 = g_1$. Без ограничения общности считаем, что $y^n \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим полярные координаты точки y^n

через (ω^n, r^n). Пусть $x^n \in \Gamma_1$ — точка с координатами $(0, r^n)$. Из (26.26) и (26.22) вытекает, что

$$|u_0(x^n)| = |b_1^* \varphi(0)| \geqslant |b_1^* \varphi(\omega^n)| = |u_0(y^n)|.$$

Следовательно, учитывая, что $U \in C(\overline{G})$, $U(g_1) = 0$, функции u и u_0 непрерывны на $\overline{\Gamma_1}$, имеем

$$M \geqslant \lim_{n\to\infty} |u(x^n)| = \lim_{n\to\infty} |u_0(x^n)| \geqslant \lim_{n\to\infty} |u_0(y^n)| = \lim_{n\to\infty} |u(y^n)| = M.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} |u(x^n)| = M. \tag{26.28}$$

Используя тот факт, что $x^n \in \Gamma_1$, непрерывность Ω_1, непрерывность функции u в области G и соотношения relations (26.4) и (26.28), получим

$$|u(g)| = \lim_{n\to\infty} |u(\Omega_1(x^n))| = \lim_{n\to\infty} |u(x^n)|/b_1^* = M/b_1^* \geqslant M,$$

что невозможно, так как $g \in G$.

Итак, мы доказали, что $u = 0$, т. е. функции v_1 и v_2 линейно зависимы, и $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 1$.

3. По теореме 3.4 в [59] оператор $\mathbf{L}_{1+\delta}(q)$ фредгольмов для любого q. С другой стороны, размерность ядра фредгольмова оператора не возрастает при малых возмущениях (см. [38, § 16]). Следовательно, $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) \leqslant 1$ для всех достаточно малых $q > 0$. □

Лемма 26.7. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) \geqslant 1$.

Доказательство. Полоса $-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \delta$ не содержит собственных значений модельной задачи (26.10), (26.11) и содержит единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$ модельной задачи A3'; при этом алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_0 = 0$ равна 2. Следовательно, по теореме 4.1 в [84] $\operatorname{ind} \mathbf{L}_{1+\delta}(q) = \operatorname{ind} \mathbf{L}_{1-\delta}(q) + 2$, т. е.

$$\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1+\delta}(q)) = \dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta}(q) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) + 2.$$

Отсюда и из лемм 26.5 и 26.6 получаем

$$\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1+\delta}(q)) - \dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) + 2 \geqslant 1.$$

□

Далее зафиксируем такое число $q > 0$, для которого $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) \geqslant 1$. Рассмотрим множество

$$R^0_{1-\delta}(G) = \{f_0 \in H^0_{1-\delta}(G) : (f_0, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))\}.$$

Очевидно, $R^0_{1-\delta}(G)$ — замкнутое подпространство в $H^0_{1-\delta}(G)$, поскольку образ $\mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{H}^0_{1-\delta}(G, \partial G)$.

Лемма 26.8. $\operatorname{codim} R^0_{1-\delta}(G) \geqslant 1$.

Доказательство. Предположим противное: пусть

$$R^0_{1-\delta}(G) = H^0_{1-\delta}(G). \tag{26.29}$$

Покажем, что в этом случае

$$\mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) = \mathcal{H}^0_{1-\delta}(G, \partial G). \tag{26.30}$$

Рассмотрим произвольную функцию $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}^0_{1-\delta}(G, \partial G)$. По лемме 11.1 существует такая функция $v \in H^2_{1-\delta}(G)$, что $v|_{\Gamma_j} = f_j$, $j = 1, 2$, и носитель функции v содержится в сколь угодно малой окрестности ∂G. Пусть эта окрестность настолько мала, что $b_1(y)v(\Omega_1(y)) = 0$, $y \in \Gamma_1$. Тогда функция v удовлетворяет нелокальным условиям

$$v|_{\Gamma_1} - b_1(y)u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1} = f_1, \qquad v|_{\Gamma_2} = f_2. \tag{26.31}$$

С другой стороны, из соотношения (26.29) вытекает существование такой функции $w \in H^2_{1-\delta}(G)$, что

$$\Delta w - qw = f_0 - (\Delta v - qv), \tag{26.32}$$

$$w|_{\Gamma_1} - b_1(y)w(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1} = 0, \qquad w|_{\Gamma_2} = 0. \tag{26.33}$$

Из (26.31)–(26.33) получим $\mathbf{L}_{1-\delta}(q)u = f$, где $u = v + w \in H^2_{1-\delta}(G)$. Таким образом, выполнено соотношение (26.30), что противоречит лемме 26.7. □

Теперь, используя теорему Хилле—Иосиды (теорему 23.1) и леммы 26.4 и 26.8, докажем теорему 26.1.

Доказательство теоремы 26.1. 1. Предположим противное: пусть $\overline{\mathbf{P}_B}$ — генератор полугруппы Феллера. Тогда по теореме Хилле—Иосиды (теореме 23.1) $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B - q\mathbf{I}}) = \mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B} - q\mathbf{I}) = C_B(\overline{G})$. Следовательно, $\overline{\mathcal{R}(\mathbf{P}_B - q\mathbf{I})} = C_B(\overline{G})$. В

силу леммы 26.4 это означает, что любую функцию из $C_B(\overline{G})$ можно аппроксимировать функциями из $R^0_{1-\delta}(G) \cap C_B(\overline{G})$.

2. Покажем, что в этом случае

$$R^0_{1-\delta}(G) = H^0_{1-\delta}(G) \tag{26.34}$$

(что будет противоречить лемме 26.8). Для этого выберем произвольную функцию $f_0 \in H^0_{1-\delta}(G)$. Так как множество $C_0^\infty(\overline{G} \setminus (\mathcal{K} \cup \{g\}))$ плотно в $H^0_{1-\delta}(G)$, то для любого $\kappa > 0$ найдется такая функция $f_0' \in C_0^\infty(\overline{G} \setminus (\mathcal{K} \cup \{g\}))$, что

$$\|f_0 - f_0'\|_{H^0_{1-\delta}(G)} \leqslant \kappa. \tag{26.35}$$

Так как $f_0' \in L_2(G)$, то существует функция $f_0'' \in C^\infty(\overline{G})$, равная нулю вблизи $\partial G \cup \overline{\Omega_1(\Gamma_1)}$ и такая, что

$$\|f_0' - f_0''\|_{H^0_{1-\delta}(G)} \leqslant k_1 \|f_0' - f_0''\|_{L_2(G)} \leqslant \kappa, \tag{26.36}$$

где $k_1 > 0$ не зависит от f_0' и f_0''.

Так как $f_0'' \in C_B(\overline{G})$, то из части 1 доказательства вытекает существование такой функции $f_0''' \in R^0_{1-\delta}(G) \cap C_B(\overline{G})$, что

$$\|f_0'' - f_0'''\|_{H^0_{1-\delta}(G)} \leqslant k_2 \|f_0'' - f_0'''\|_{C(\overline{G})} \leqslant \kappa, \tag{26.37}$$

где $k_2 > 0$ не зависит от f_0'' и f_0'''.

Из соотношений (26.35)–(26.37) получаем

$$\|f_0 - f_0'''\|_{H^0_{1-\delta}(G)} \leqslant 3\kappa.$$

Следовательно, учитывая, что множество $R^0_{1-\delta}(G)$ замкнуто в $H^0_{1-\delta}(G)$, получим соотношение (26.34). Таким образом, пришли к противоречию с леммой 26.8. □

Замечание 26.1. Пусть $\widehat{\mathbf{P}}_B : C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ — сужение оператора $\overline{\mathbf{P}_B}$. Очевидно, $\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{P}}_B - q\mathbf{I}) \subset \mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B} - q\mathbf{I})$. Так как $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B} - q\mathbf{I})$ не совпадает с $C_B(\overline{G})$, то по доказанному $\mathcal{R}(\widehat{\mathbf{P}}_B - q\mathbf{I})$ также не совпадает с $C_B(\overline{G})$. Следовательно, по теореме Хилле—Иосиды (теореме 23.1) оператор $\widehat{\mathbf{P}}_B$ не будет генератором полугруппы Феллера.

26.3. «Скачки» из точек сопряжения, не являющихся точками завершения процесса

Постановка нелокальной задачи

В этом примере мы покажем, что условие 24.2 существенно.

Пусть G, g_1, g_2 и $\mathcal{K}$ те же, что в п. 26.2. Рассмотрим нелокальную задачу (см. рис. 26.2):

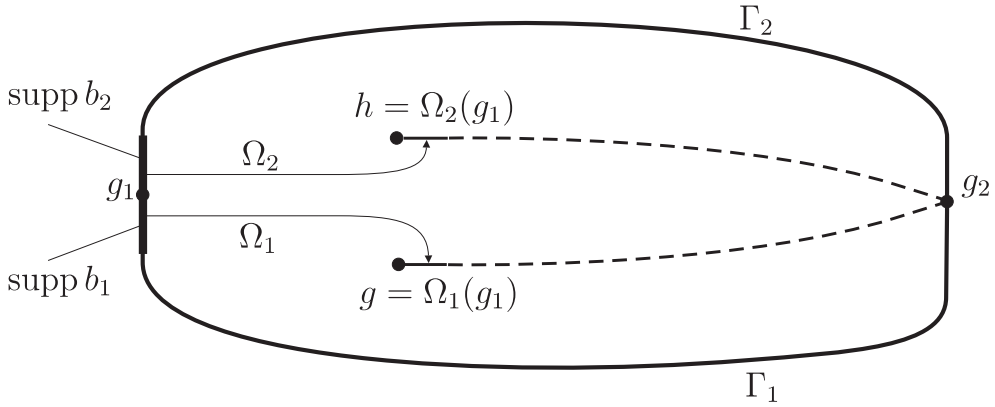

Рис. 26.2. Задача (26.38)–(26.40)

$$\Delta u(y) = f_0(y), \qquad y \in G, \tag{26.38}$$

$$u(y) - b_1(y)u(\Omega_1(y)) = 0, \qquad y \in \overline{\Gamma_1}, \tag{26.39}$$

$$u(y) - b_2(y)u(\Omega_2(y)) = 0, \qquad y \in \Gamma_2, \tag{26.40}$$

где $b_j \in C^\infty(\overline{\Gamma_j})$, $j = 1, 2$, таковы, что

1. $0 \leqslant b_j(y) \leqslant 1$,
2. $b_j(y) = b^* > 0$ при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$,
3. $b_j(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_{2\varepsilon}(g_1)$,

и Ω_j, $j = 1, 2,$ — гладкое невырожденное преобразование, заданное в окрестности кривой $\overline{\Gamma_j}$ так, что

1. $\Omega_j(\Gamma_j) \subset G$, $\Omega_j(g_1) \in G$, $\Omega_j(g_2) = g_2$, и $\Omega_1(g_1) \neq \Omega_2(g_1)$,
2. $\Omega_j(y)$ при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$ есть композиция поворота вокруг точки g_1 и сдвига на некоторый вектор.

Положим $g = \Omega_1(g_1)$ и $h = \Omega_2(g_1)$. По предположению $g, h \in G$ и $g \neq h$. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что 2ε-окрестности точек g_1, g_2, g, h не пересекаются друг с другом и

$$\mathcal{O}_{2\varepsilon}(g) \cap \partial G = \varnothing, \qquad \mathcal{O}_{2\varepsilon}(h) \cap \partial G = \varnothing.$$

Введем меры $\alpha(y, \cdot)$, $y \in \partial G$, следующим образом: для всякого борелевского множества $Q \subset \overline{G}$ положим

$$\alpha(y, Q) = b_1(y)\chi_Q(\Omega_1(y)), \quad y \in \overline{\Gamma_1},$$
$$\alpha(y, Q) = b_2(y)\chi_Q(\Omega_2(y)), \quad y \in \Gamma_2.$$

Тогда краевые условия (26.39), (26.40) можно записать в виде

$$b(y)u(y) + \int\limits_{\overline{G}} [u(y) - u(\eta)]\alpha(y, d\eta) = 0, \qquad y \in \partial G,$$

где $b(y) = 1 - \alpha(y, \overline{G})$.

Очевидно, $g_2 \in \mathcal{N}$, но $g_1 \notin \mathcal{N}$. Следовательно, условие 24.2 нарушено. Нетрудно проверить, что условия 23.1, 23.2, 24.1 и 24.3–24.8 выполнены (с $\mathbf{P}(y, D) = \Delta$, $\mathbf{P}_1 = 0$ и $\beta_i(y, \overline{G}) \equiv 0$).

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ заданный формулой

$$\mathbf{P}_B u = \Delta u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) = \{u \in C_B(\overline{G}) : \Delta u \in C_B(\overline{G})\}, \tag{26.41}$$

где $C_B(\overline{G})$ — множество функций из $C(\overline{G})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (26.39) и (26.40).

Следующие два результата доказываются аналогично леммам 26.2 и 26.3.

Лемма 26.9. *Если $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$, то $u \in W^2(G')$ для любой области G' такой, что $\overline{G'} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}$.*

Лемма 26.10. *Оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ допускает замыкание $\overline{\mathbf{P}_B}$.*

В этом пункте мы докажем следующий результат.

Теорема 26.2. *Пусть $\overline{\mathbf{P}_B} : \mathrm{D}(\overline{\mathbf{P}_B}) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ — замыкание оператора* (26.41). *Тогда $\overline{\mathbf{P}_B}$ не является генератором полугруппы Феллера.*

В силу теоремы Хилле—Иосиды (теоремы 23.1) достаточно показать, что при достаточно малом $q > 0$ образ $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B} - q\mathbf{I})$ не совпадает с $C_B(\overline{G})$.

Доказательство теоремы 26.2

В этом примере будем пользоваться весовыми пространствами

$$H_a^l(G) = H_a^l(G, \mathcal{K} \cup \{g, h\}), \quad H_a^l(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)) = H_a^l(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j), \{g_j\}),$$
$$H_a^l(\mathcal{O}_\varepsilon(g)) = H_a^l(\mathcal{O}_\varepsilon(g), \{g\}), \quad H_a^l(\mathcal{O}_\varepsilon(h)) = H_a^l(\mathcal{O}_\varepsilon(h), \{h\})$$

и соответствующими пространствами следов. Подчеркнем, что пространство $H_a^l(G)$ состоит из функций, которые могут иметь степенные особенности не только вблизи множества $\mathcal{K}$, но и вблизи точек g и h.

Для доказательства теоремы 26.2 получим асимптотику решений $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ задачи (26.38)–(26.40).

Зафиксируем такое число δ, что

$$0 < \delta < 1. \tag{26.42}$$

Лемма 26.11. *Пусть $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$. Тогда $u = cw_0 + w_1$, где c — некоторая константа, функция w_0 не зависит от u,*

$$w_0 \in C_B(\overline{G}) \cap C^\infty(\overline{G}), \qquad \Delta w_0(y) = 0, \quad y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K}) \cup \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(g) \cup \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(h)$$

и $w_1 \in C_B(\overline{G}) \cap H_{1-\delta}^2(G)$.

Доказательство. 1. Из леммы 26.9 вытекает, что $u \in W^2(G')$ для любой области G' такой, что $\overline{G'} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}$. Так как $u \in W^2(\mathcal{O}_\varepsilon(g))$, то по лемме 5.2 $u \in H_{1+\delta}^2(\mathcal{O}_\varepsilon(g))$. Так как $f_0 \in C(\overline{G}) \subset H_{-\delta}^0(\mathcal{O}_\varepsilon(g))$, то аналогично (26.19) получим

$$u(y) = c_g + \hat{c}_g \ln r + r(c_{g1} \cos\omega + d_{g1} \sin\omega) + v(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g),$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g такие, что $(0, r) \in \Omega_1(\Gamma_1)$ при $0 < r < \varepsilon$, c_g, $\hat{c}_g$, c_{g1} и d_{g1} — некоторые константы и $v \in H_{-\delta}^2(\mathcal{O}_\varepsilon(g))$. Используя теорему вложения Соболева, имеем

$$v \in H_{-\delta}^2(\mathcal{O}_\varepsilon(g)) \subset W^2(\mathcal{O}_\varepsilon(g)) \subset C(\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g)}), \qquad v(g) = 0.$$

Учитывая, что $u \in C(\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g)})$, видим, что $\hat{c}_g = 0$ и

$$u(y) = c_g + r(c_{g1} \cos\omega + d_{g1} \sin\omega) + v(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \tag{26.43}$$

$$u(g) = c_g. \tag{26.44}$$

Заменяя g на h, аналогичным образом получим

$$u(y) = c_h + r(c_{h1} \cos\omega + d_{h1} \sin\omega) + v(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(h), \tag{26.45}$$

$$u(h) = c_h, \tag{26.46}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке h такие, что $(0, r) \in \Omega_2(\Gamma_2)$ при $0 < r < \varepsilon$, c_h, c_{h1} и d_{h1} — некоторые константы и $v \in H^2_{-\delta}(\mathcal{O}_\varepsilon(h)) \subset W^2(\mathcal{O}_\varepsilon(g)) \subset C(\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g)})$.

Так как функция $u \in C(\overline{G})$ удовлетворяет нелокальным условиям (26.39), (26.40), то $u(g) = u(g_1)/b^* = u(h)$, т. е. $c_g = c_h$ в силу (26.44) и (26.46). Положим

$$c = c_g = c_h. \tag{26.47}$$

2. Используя (26.38)–(26.40), (26.43), (26.45), (26.47) и тот факт, что преобразования Ω_1 и Ω_2 гладкие и невырожденные, получим

$$\Delta(u - b^* c) = \Delta u \in C(\overline{G}) \subset H^0_{1-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)), \tag{26.48}$$

$$(u - b^* c)|_{\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} \in H^{3/2}_{1-\delta}(\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)), \qquad j = 1, 2. \tag{26.49}$$

Пользуясь (26.48), (26.49) и соотношением $u - b^* c \in C(\overline{G}) \subset H^0_{-1+\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$, из леммы 14.2 выводим, что

$$u - b^* c \in H^2_{1+\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)). \tag{26.50}$$

Согласно (26.42) полоса $-\delta \leqslant \operatorname{Im} \lambda \leqslant \delta$ не содержит собственных значений задачи (26.10), (26.11). Следовательно, из соотношений (26.48)–(26.50) и теоремы 2.2 в [13] получаем

$$u - b^* c \in H^2_{1-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)).$$

Так как $b_1(y) = b_2(y) = 0$ вблизи точки g_2, то $u \in H^2_{1-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2))$ (ср. доказательство леммы 26.4).

3. Введем срезающую функцию $\xi \in C^\infty([0, \infty))$ такую, что $\xi(r) = 1$ при $r < \varepsilon/2$ и $\operatorname{supp} \xi \subset [0, \varepsilon)$. Рассмотрим функцию $w_0 \in C^\infty(\overline{G})$, заданную формулой[5]

$$w_0(y) = \begin{cases} b^* \psi(r), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ \psi(r), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \\ \psi(r), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(h), \\ 0, & y \notin \mathcal{O}_\varepsilon(g_1) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(g) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(h), \end{cases} \tag{26.51}$$

и функцию $w_1 = u - c w_0$. Легко видеть, что w_0 и w_1 — искомые функции $\square$

[5]Считаем, что в каждой ε-окрестности в (26.51) задана своя система полярных координат ω, r такая, что точка $r = 0$ соответствует центру окрестности.

Введем ограниченный оператор $\mathbf{L}_a(q) : H^2_a(G) \to \mathcal{H}^0_a(G, \partial G)$ по формуле

$$\mathbf{L}_a(q)u = \{\Delta u - qu,\ u|_{\Gamma_1} - b_1(y)u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1},\ u|_{\Gamma_2}\}, \qquad q \geqslant 0.$$

Обозначим также $\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_a(0)$.

Лемма 26.12. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta}(q) = 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 26.5.

Лемма 26.13. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) \leqslant 2$.

Доказательство. 1. Вначале положим $q = 0$ и докажем, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 2$. Пусть $u \in \ker \mathbf{L}_{1+\delta}$. Без ограничения общности считаем, что функция u вещественнозначная.

Так же как в доказательстве леммы 26.11, имеем

$$u(y) = c_g + \hat{c}_g \ln r + r(c_{g1}\cos\omega + d_{g1}\sin\omega) + v(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \tag{26.52}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g такие, что $(0, r) \in \Omega_1(\Gamma_1)$ при $0 < r < \varepsilon$, c_g, $\hat{c}_g$, c_{g1} и d_{g1} — некоторые константы и $v \in H^2_{-\delta}(\mathcal{O}_\varepsilon(g))$.

Заменяя точку g точкой h, аналогично получаем

$$u(y) = c_h + \hat{c}_h \ln r + r(c_{h1}\cos\omega + d_{h1}\sin\omega) + v(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(h), \tag{26.53}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке h такие, что $(0, r) \in \Omega_2(\Gamma_2)$ при $0 < r < \varepsilon$, c_h, $\hat{c}_h$, c_{h1} и d_{h1} — некоторые константы и $v \in H^2_{-\delta}(\mathcal{O}_\varepsilon(h))$.

Пользуясь соотношениями (26.38)–(26.40), (26.52) и (26.53), получим

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ u|_{\Gamma_1 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = b^*(c_g + \hat{c}_g \ln r + c_{g1} r) + w_1(r), \\ u|_{\Gamma_2 \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = b^*(c_h + \hat{c}_h \ln r + c_{h1} r) + w_2(r), \end{gathered} \tag{26.54}$$

где $w_j \in H^{3/2}_{-\delta}(\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$.

Следовательно, применяя лемму 4.3 в [13] и теорему 2.2 в [13], видим, что

$$u(y) = c_g\varphi_g(\omega) + c_h\varphi_h(\omega) + \hat{c}_g \ln r\hat{\varphi}_g(\omega) + \hat{c}_h \ln r\hat{\varphi}_h(\omega) + r\psi(\omega) + v(y), \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \tag{26.55}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g_1 такие, что $(0, r) \in \Gamma_1$ при $0 < r < \varepsilon$, $\varphi_g, \varphi_h, \hat{\varphi}_g, \hat{\varphi}_h, \psi \in C^\infty([0, \pi])$, функции $\varphi_g, \varphi_h, \hat{\varphi}_g, \hat{\varphi}_h$ не зависят от

$u, v, c_g, c_h, \hat{c}_j, \hat{c}_h$ и $v \in H^2_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)) \subset W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$. В частности, $\varphi_g(\omega)$ — это функция, зависящая только от полярного угла ω и являющаяся решением задачи

$$\Delta_y \varphi_g = 0, \qquad r > 0,\ 0 < \omega < \pi,$$
$$\varphi_g(0) = 1, \qquad \varphi_g(\pi) = 0,$$

т. е. $\varphi_g(\omega)$ имеет вид

$$\varphi_g(\omega) = 1 - \omega/\pi. \tag{26.56}$$

Функция $\varphi_h(\omega)$ — это функция, зависящая только от полярного угла ω и являющаяся решением задачи

$$\Delta_y \varphi_h = 0, \qquad r > 0,\ 0 < \omega < \pi,$$
$$\varphi_h(0) = 0, \qquad \varphi_h(\pi) = 1,$$

т. е. $\varphi_h(\omega)$ имеет вид

$$\varphi_h(\omega) = \omega/\pi. \tag{26.57}$$

Аналогично доказательству леммы 26.6 имеем

$$u \in W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2)) \subset C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2)}).$$

Из соотношений (26.52), (26.53) и (26.55) вытекает, что любая функция $u \in \ker \mathbf{L}_{1+\delta}$ может быть записана в виде

$$u(y) = c_g u_g(y) + c_h u_h(y) + \hat{c}_g \hat{u}_g(y) + \hat{c}_h \hat{u}_h(y) + U(y), \qquad y \in G, \tag{26.58}$$

где $u_g, u_h, \hat{u}_g, \hat{u}_h \in C^\infty(\overline{G} \setminus \{g_1, g, h\})$,

$$u_g(y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \\ b^* \varphi_g(\omega), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ 0, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_2) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(h), \end{cases} \qquad u_h(y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(h), \\ b^* \varphi_h(\omega), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ 0, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_2) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(g), \end{cases}$$

$$\hat{u}_g(y) = \begin{cases} \ln r, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g), \\ b^* \ln r \hat{\varphi}_g(\omega), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ 0, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_2) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(h), \end{cases}$$

$$\hat{u}_h(y) = \begin{cases} \ln r, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(h), \\ b^* \ln r \hat{\varphi}_h(\omega), & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ 0, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_2) \cup \mathcal{O}_\varepsilon(g), \end{cases}$$

$U \in W^2(G) \subset C(\overline{G})$ и $U(g_1) = U(g_2) = U(g) = U(h) = 0$. Отсюда и из леммы 5.2 (часть 2), в частности, получаем $U \in H^2_{1-\delta}(G)$.

Из представления (26.58) и леммы 26.12 вытекает, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 4$.

2. Докажем, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 2$. Предположим противное: пусть существуют три линейно независимые функции $v_1, v_2, v_3 \in \ker \mathbf{L}_{1+\delta}$. Так как каждая из этих функций представима в виде (26.58), то некоторая их нетривиальная линейная комбинация (которую обозначим через u) имеет вид

$$u(y) = c_g u_g(y) + c_h u_h(y) + U(y). \tag{26.59}$$

Пользуясь (26.59), явным видом (26.56) и (26.57) функций φ_g и φ_h (описывающих поведение функций u_g и u_h вблизи точки g_1) и рассуждая так же, как в доказательстве леммы 26.6, получим $u = 0$. Следовательно, функции v_1, v_2, v_3 линейно зависимы, и $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 2$.

3. Аналогично доказательству леммы 26.6 можно показать, что

$$\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) \leqslant 2$$

для достаточно малых $q > 0$. □

Лемма 26.14. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) \geqslant 2$.

Доказательство. Полоса $-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \delta$ не содержит собственных значений модельной задачи (26.10), (26.11), содержит единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$ модельной задачи (26.2), соответствующей точке g и содержит единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$ той же модельной задачи (26.2), соответствующей точке h (напомним, что $g \neq h$). При этом алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_0 = 0$ в обоих случаях равна 2. Следовательно, по теореме 4.1 в [84] имеем $\operatorname{ind} \mathbf{L}_{1+\delta}(q) = \operatorname{ind} \mathbf{L}_{1-\delta}(q) + 4$, т. е.

$$\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1+\delta}(q)) = \dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta}(q) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) + 4.$$

Отсюда и из лемм 26.12 и 26.13 получим

$$\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1+\delta}(q)) - \dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) + 4 \geqslant 2.$$

□

Далее зафиксируем такое число $q > 0$, при котором $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) \geqslant 2$. Рассмотрим множество

$$R^0_{1-\delta}(G) = \{f_0 \in H^0_{1-\delta}(G) : (f_0, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))\}.$$

Очевидно, $R^0_{1-\delta}(G)$ — замкнутое подпространство в $H^0_{1-\delta}(G)$, поскольку образ $\mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{H}^0_{1-\delta}(G, \partial G)$.

Лемма 26.15. $\operatorname{codim} R^0_{1-\delta}(G) \geqslant 2$.

Доказательство. 1. В силу леммы 26.14 достаточно доказать, что

$$\operatorname{codim} R^0_{1-\delta}(G) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)).$$

Пусть $f_0 \in R^0_{1-\delta}(G)$, т. е. $f = (f_0, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))$. Это эквивалентно соотношениям

$$(f, F_l)_{\mathcal{H}^0_{1-\delta}(G,\partial G)} = 0, \qquad l = 1, \ldots, \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)), \tag{26.60}$$

где $F_l \in \mathcal{H}^0_{1-\delta}(G, \partial G)$ — линейно независимые функции из ортогонального дополнения к подпространству $\mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))$ в пространстве $\mathcal{H}^0_{1-\delta}(G, \partial G)$. Из (26.60) и теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве вытекает, что $\operatorname{codim} R^0_{1-\delta}(G) \leqslant \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))$.

2. Теперь докажем обратное неравенство. Пусть $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))$, т. е. $\mathbf{L}_{1-\delta}(q)u = f$ для некоторой функции $u \in H^2_{1-\delta}(G)$. Согласно лемме 11.1 существует такая функция $v \in H^2_{1-\delta}(G)$, что $v|_{\Gamma_j} = f_j$, $j = 1, 2$, носитель v содержится в сколь угодно малой окрестности $\mathcal{O}(\partial G)$ границы ∂G и

$$\|v\| \leqslant k\big(\|f_1\|_{H^{3/2}_{1-\delta}(\Gamma_1)} + \|f_2\|_{H^{3/2}_{1-\delta}(\Gamma_2)}\big), \tag{26.61}$$

где $k > 0$ зависит от окрестности $\mathcal{O}(\partial G)$, но не зависит от f_1 и f_2.

Предположим, что окрестность $\mathcal{O}(\partial G)$ такова, что $b_j(y)v(\Omega_j(y)) = 0$, $y \in \Gamma_j$. Тогда функция v удовлетворяет нелокальным условиям

$$v|_{\Gamma_j} - b_j(y)u(\Omega_j(y))_{\Gamma_j} = f_j, \qquad j = 1, 2.$$

Следовательно, функция $w = u - v \in H^2_{1-\delta}(G)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{L}_{1-\delta}(q)w = (f_0 - (\Delta v - qv), 0, 0). \tag{26.62}$$

Из (26.62) вытекает, что $f_0 - (\Delta v - qv) \in R^0_{1-\delta}(G)$. Это эквивалентно соотношениям

$$(f_0 - (\Delta v - qv), \Phi_l)_{H^0_{1-\delta}(G)} = 0, \qquad l = 1, \ldots, \operatorname{codim} R^0_{1-\delta}(G), \tag{26.63}$$

где $\Phi_l \in H^0_{1-\delta}(G)$ — линейно независимые функции из ортогонального дополнения к подпространству $R^0_{1-\delta}(G)$ в пространстве $H^0_{1-\delta}(G)$. Используя (26.61), (26.63) и теорему Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, получим $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) \leqslant \operatorname{codim} R^0_{1-\delta}(G)$. $\square$

Пользуясь теоремой Хилле—Иосиды (см. теорему 23.1) и леммами 26.11 и 26.15, докажем теорему 26.2.

Доказательство теоремы 26.2. 1. Предположим противное: пусть $\overline{\mathbf{P}_B}$ — генератор полугруппы Феллера. Тогда по теореме Хилле—Иосиды (теореме 23.1) $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B - q\mathbf{I}}) = \mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B} - q\mathbf{I}) = C_B(\overline{G})$. Следовательно, $\overline{\mathcal{R}(\mathbf{P}_B - q\mathbf{I})} = C_B(\overline{G})$. В силу леммы 26.11 это означает, что любую функцию из $C_B(\overline{G})$ можно аппроксимировать функциями из множества

$$\mathrm{Span}(R^0_{1-\delta}(G), \Delta w_0) \cap C_B(\overline{G}),$$

где w_0 — функция из леммы 26.12.

2. Аналогично доказательству теоремы 26.2 из части 1 доказательства этой теоремы получаем, что

$$\mathrm{Span}(R^0_{1-\delta}(G), \Delta w_0) = H^0_{1-\delta}(G), \tag{26.64}$$

откуда имеем $\operatorname{codim} R^0_{1-\delta}(G) \leqslant 1$. Это противоречит лемме 26.15. □

Замечание 26.2. Как и в п. 26.2, видим, что никакое сужение $\widehat{\mathbf{P}}_B : C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ оператора $\overline{\mathbf{P}_B}$ не будет генератором полугруппы Феллера.

26.4. «Скачки» с вероятностью единица внутри окрестности точек завершения процесса

Постановка нелокальной задачи

Покажем, что соотношение (23.3) в условии 23.2 существенно.

Пусть G, g_1, g_2 и $\mathcal{K}$ те же, что в п. 26.2. Рассмотрим нелокальную задачу (см. рис. 26.3)

$$\Delta u(y) = f_0(y), \qquad y \in G, \tag{26.65}$$

$$u(y) - b_j(y)u(\Omega_j(y)) = 0, \qquad y \in \Gamma_j,\ j = 1, 2, \tag{26.66}$$

$$u(y) = 0, \qquad y \in \mathcal{K}, \tag{26.67}$$

где функции $b_j \in C^\infty(\overline{\Gamma_j})$ таковы, что

1. $0 \leqslant b_j(y) \leqslant 1$,

2. $b_j(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$,

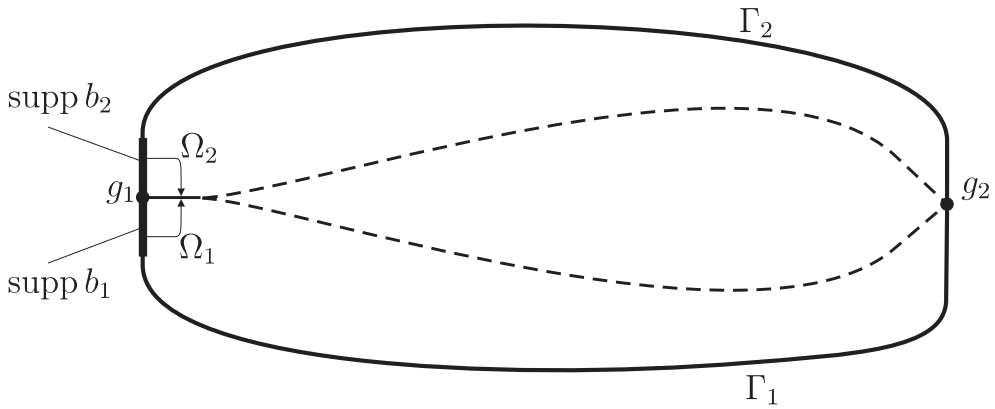

Рис. 26.3. Задача (26.65)–(26.67)

3. $b_j(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_{2\varepsilon}(g_1)$,

а Ω_j, $j = 1, 2,$ — гладкое невырожденное преобразование, заданное в окрестности кривой $\overline{\Gamma_j}$ и такое, что

1. $\Omega_j(\Gamma_j) \subset G$, $\Omega_j(g_1) = g_1$, $\Omega_j(g_2) = g_2$,
2. $\Omega_j(y)$ при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)$ есть поворот на угол $\pi/2$ внутрь области G.

Далее считаем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что

$$\mathcal{O}_{2\varepsilon}(g_1) \cap \mathcal{O}_{2\varepsilon}(g_2) = \varnothing.$$

Введем меры $\delta(y, \cdot)$, $y \in \partial G$, следующим образом: для любого борелевского множества $Q \subset \overline{G}$ положим

$$\begin{aligned} &\delta(y, Q) = b_j(y)\chi_Q(\Omega_j(y)), && y \in \Gamma_j,\ j = 1, 2, \\ &\delta(y, Q) = 0, && y \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Тогда краевые условия (26.66), (26.67) можно записать в виде

$$b(y)u(y) + \int\limits_{\overline{G}} [u(y) - u(\eta)]\delta(y, d\eta) = 0, \qquad y \in \partial G,$$

где $b(y) = 1 - \delta(y, \overline{G})$.

Легко проверить, что условия 23.1 и 24.1–24.8 выполнены (с $\mathbf{P}(y, D) = \Delta$, $\mathbf{P}_1 = 0$ и $\alpha_i(y, \overline{G}) \equiv \beta_i(y, \overline{G}) \equiv 0$). Очевидно, соотношение (23.3) в условии 23.2 не выполнено, так как $b_1(g_1) + b_2(g_1) = 2$.

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$, заданный формулой

$$\mathbf{P}_B u = \Delta u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) = \{u \in C_B(\overline{G}) : \Delta u \in C_B(\overline{G})\}, \tag{26.68}$$

где $C_B(\overline{G})$ — множество функций из $C(\overline{G})$, удовлетворяющих нелокальным условиям (26.66) и (26.67).

Аналогично леммам 26.2 и 26.3 доказываются следующие два результата.

Лемма 26.16. *Если $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$, то $u \in W^2(G')$ для любой области G' такой, что $\overline{G'} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}$.*

Лемма 26.17. *Оператор $\mathbf{P}_B : \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ допускает замыкание $\overline{\mathbf{P}_B}$.*

В этом пункте мы докажем следующий результат.

Теорема 26.3. *Пусть $\overline{\mathbf{P}_B} : \mathrm{D}(\overline{\mathbf{P}_B}) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ — замыкание оператора* (26.68). *Тогда $\overline{\mathbf{P}_B}$ не является генератором полугруппы Феллера.*

В силу теоремы Хилле—Иосиды (теоремы 23.1) достаточно показать, что для некоторого $q > 0$ образ $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{P}_B} - q\mathbf{I})$ не совпадает с $C_B(\overline{G})$.

Доказательство теоремы 26.3

Для доказательства теоремы 26.3получим асимптотику решения $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ задачи (26.65)–(26.67).

Рассмотрим модельную задачу с комплексным параметром λ, соответствующую точке g_1:

$$\varphi''(\omega) - \lambda^2\varphi(\omega) = 0, \qquad 0 < \omega < \pi, \tag{26.69}$$

$$\varphi(-\pi/2) - \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(\pi/2) - \varphi(0) = 0, \tag{26.70}$$

где ω, r — полярные координаты с центром в точке g_1 такие, что $(0, r) \in \Gamma_1$ и $(\pi, r) \in \Gamma_2$ при $0 < r < \varepsilon$. Собственные значения этой задачи имеют вид $\lambda_k = 2ki$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Далее нас будет интересовать лишь собственное значение $\lambda_0 = 0$. Соответствующий ему собственный вектор имеет вид $\varphi_0(\omega) \equiv 1$. Существует присоединенный вектор $\hat{\varphi}_0(\omega) \equiv 0$. Второго присоединенного вектора не существует.

Так как $b_1(y) = 0$ вблизи точки g_2, то точке g_2 соответствует задача (26.10), (26.11) (см. п. 26.2).

В этом параграфе, так же как и в §§ 23–25), будем пользоваться весовыми пространствами

$$H^l_a(G) = H^l_a(G, \mathcal{K}), \quad H^l_a(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)) = H^l_a(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j), \{g_j\})$$

и соответствующими пространствами следов.

Зафиксируем такое число δ, что

$$0 < \delta < 1. \tag{26.71}$$

Лемма 26.18. *Пусть* $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$. *Тогда* $u \in H^2_{1-\delta}(G)$.

Доказательство. Из леммы 26.16 следует, что $u \in W^2(G')$ для любой области G' такой, что $\overline{G'} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}$. Далее, используя (26.66) и (26.67), получаем

$$\Delta u \in C(\overline{G}) \subset H^0_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)), \tag{26.72}$$

$$u|_{\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} - u(\Omega_j(y))|_{\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{26.73}$$

Пользуясь (26.72), (26.73) и соотношением $u \in C(\overline{G}) \subset H^0_{-1+\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$, из леммы 14.2 выводим, что

$$u \in H^2_{1+\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)). \tag{26.74}$$

Согласно (26.71) полоса $-1-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \delta$ содержит единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$ задачи (26.69), (26.70). Следовательно, используя (26.72), (26.73) и теорему 2.2 в [13], получим

$$u(y) = c_0\varphi_0(\omega) + \hat{c}_0(\hat{\varphi}_0(\omega) + \varphi_0(\omega)\ln r) + v(y) = c_0 + \hat{c}\ln r + v(y), \quad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1),$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы и $v \in H^2_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$. Так как $H^2_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)) \subset W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$, то по теореме вложения Соболева $v \in C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)})$ и $v(g_1) = 0$. Отсюда и из соотношения $u \in C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)})$ имеем $\hat{c}_0 = 0$. Учитывая соотношение (26.67) и равенство $v(g_1) = 0$, получим

$$c_0 = u(g_1) - v(g_1) = 0.$$

Таким образом, $u \in H^2_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)) \subset H^2_{1-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1))$.

Как и в лемме 26.5, доказывается, что $u \in H^2_{1-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2))$. □

Введем ограниченный оператор $\mathbf{L}_a(q) : H^2_a(G) \to \mathcal{H}^0_a(G, \partial G)$ по формуле

$$\mathbf{L}_a(q)u = \{\Delta u - qu,\ u|_{\Gamma_1} - b_1(y)u(\Omega_1(y))|_{\Gamma_1},\ u|_{\Gamma_2}\}, \qquad q \geqslant 0.$$

Обозначим также $\mathbf{L}_a = \mathbf{L}_a(0)$.

Лемма 26.19. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta}(q) = 0$.

Доказательство. Вначале положим $q = 0$ и докажем, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta} = 0$. Пусть $u \in \ker \mathbf{L}_{1-\delta}$. Без ограничения общности считаем, что функция u вещественнозначная. Используя соотношения (26.65)–(26.67), получим

$$\Delta u = 0, \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1),$$
$$u|_{\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} - u(\Omega_j(y))|_{\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = 0, \qquad j = 1, 2.$$

Следовательно, повторяя рассуждения из доказательства леммы 26.4, получаем $u \in C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)})$. Как и в лемме 26.5 нетрудно показать, что $u \in C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2)})$. Тогда $u \in C(\overline{G})$, и в силу принципа максимума 24.1 $u = 0$, т. е. $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta} = 0$.

Аналогично лемме 26.5 доказывается, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta}(q) = 0$ для достаточно малых $q > 0$. □

Лемма 26.20. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) \leqslant 1$.

Доказательство. 1. Вначале докажем, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 2$. Пусть $u \in \ker \mathbf{L}_{1+\delta}$. Без ограничения общности предположим, что функция u вещественнозначная. Пользуясь соотношениями (26.65)–(26.67), получим

$$\Delta u = 0, \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \tag{26.75}$$
$$u|_{\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} - u(\Omega_j(y))|_{\Gamma_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)} = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{26.76}$$

В силу (26.71) полоса $-1 - \delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \delta$ содержит единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$ задачи (26.69), (26.70). Следовательно, используя (26.75), (26.76) и теорему 2.2 в [13], получим

$$u(y) = c_0\varphi_0(\omega) + \hat{c}_0(\hat{\varphi}_0(\omega) + \varphi_0(\omega)\ln r) + v(y) = c_0 + \hat{c}\ln r + v(y), \quad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \tag{26.77}$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы, $v \in H^2_{-\delta}(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)) \subset W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)) \subset C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)})$ и $v(g_1) = 0$.

Далее, так же как в доказательстве леммы 26.20, имеем $u \in W^2(G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_2)) \subset C(\overline{G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_1)})$. Следовательно, учитывая (26.77), видим, что

$$u(y) = c_0 u_0(y) + \hat{c}_0 \hat{u}_0(y) + U(y), \qquad y \in G, \tag{26.78}$$

где $u_0, \hat{u}_0 \in C^\infty(\overline{G} \setminus \{g_1\})$,

$$u_0(y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ 0, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_2), \end{cases} \qquad \hat{u}_0(y) = \begin{cases} \ln r, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_1), \\ 0, & y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_2), \end{cases}$$

$U \in W^2(G) \subset C(\overline{G})$ и $U(g_1) = U(g_2) = U(g) = 0$. Отсюда и из леммы 5.2 (часть 2), в частности, вытекает, что $U \in H^2_{1-\delta}(G)$.

Из представления (26.78) и леммы 26.19 получаем $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 2$.

2. Докажем, что $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 1$. Предположим противное: пусть существуют две линейно независимые функции $v_1, v_2 \in \ker \mathbf{L}_{1+\delta}$. Так как каждая из этих функций представима в виде (26.78), то некоторая их нетривиальная линейная комбинация (которую мы обозначим через u) имеет вид

$$u(y) = u_0(y) + U(y), \tag{26.79}$$

т. е. $u \in C(\overline{G})$. Используя принцип максимума 24.1, имеем $u(y) \equiv 0$. Следовательно, функции v_1 и v_2 линейно зависимы, и $\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta} \leqslant 1$.

3. Аналогично доказательству леммы 26.6 можно показать, что

$$\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) \leqslant 1$$

для достаточно малых $q > 0$. □

Лемма 26.21. *Пусть* $q > 0$ *достаточно мало*; *тогда* $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) \geqslant 1$.

Доказательство. Полоса $-\delta \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \delta$ не содержит собственных значений модельной задачи (26.10), (26.11) (см. п. 26.2), соответствующей точке g_2, и содержит единственное собственное значение $\lambda_0 = 0$ модельной задачи (26.69), (26.70); при этом алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_0 = 0$ равна 2. Следовательно, по теореме 4.1 в [84] $\operatorname{ind} \mathbf{L}_{1+\delta}(q) = \operatorname{ind} \mathbf{L}_{1-\delta}(q) + 2$, т. е.

$$\dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1+\delta}(q)) = \dim\ker \mathbf{L}_{1-\delta}(q) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) + 2.$$

Отсюда и из лемм 26.19 и 26.20 получаем

$$\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1+\delta}(q)) - \dim\ker \mathbf{L}_{1+\delta}(q) + 2 \geqslant 1.$$

□

Зафиксируем число $q > 0$, для которого $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q)) \geqslant 1$. Рассмотрим множество

$$R^0_{1-\delta}(G) = \{f_0 \in H^0_{1-\delta}(G) : (f_0, 0, 0) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))\}.$$

Очевидно, $R^0_{1-\delta}(G)$ — замкнутое подпространство в $H^0_{1-\delta}(G)$, поскольку образ $\mathcal{R}(\mathbf{L}_{1-\delta}(q))$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{H}^0_{1-\delta}(G, \partial G)$.

Следующий результат доказывается аналогично лемме 26.8 (вместо леммы 26.7 следует использовать лемму 26.21).

Лемма 26.22. $\operatorname{codim} R^0_{1-\delta}(G) \geqslant 1$.

Теперь, повторяя доказательство теоремы 26.1 и пользуясь леммами 26.18 и 26.22 вместо лемм 26.4 и 26.8 соответственно, получи заключение теоремы 26.3.

Замечание 26.3. Как и в п. 26.2, видим, что никакое сужение $\widehat{\mathbf{P}}_B : C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ оператора $\overline{\mathbf{P}_B}$ не будет генератором полугруппы Феллера.

Литература

[1] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Успехи матем. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.

[2] *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.

[3] *Бицадзе А. В.* К теории нелокальных краевых задач// Докл. АН СССР. — 1984. — *277*, № 1. — С. 17–19.

[4] *Бицадзе А. В.* Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций// Докл. АН СССР. — 1985. — *280*, № 3. — С. 521–524.

[5] *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.

[6] *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов// Теор. вероятн. и ее применения. — 1959. — *4*, № 2. — С. 172–185.

[7] *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений// Труды Моск. матем. общ. — 1952. — *1*. — С. 187–246.

[8] *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// Матем. сб. — 1965. — *68*, № 3. — С. 373–416.

[9] *Галахов Е. И.* О достаточных условиях существования полугрупп Феллера// Матем. заметки. — 1996. — *60*, № 3. — С. 442–444.

[10] *Галахов Е. И., Скубачевский А. Л.* О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями// Матем. сб. — 1998. — *189*. — С. 45–78.

[11] *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения второго порядка. — М.: Наука, 1989.

[12] *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше// Матем. сб. — 1971. — *84* (*126*), № 4. — С. 607–629.

[13] *Гуревич П. Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах// Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2003. — *23*. — С. 93–126.

[14] *Гуревич П. Л.* Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения// Известия РАН. Сер. матем. — 2003. — *67*, № 6. — С. 81–120.

[15] *Гуревич П. Л.* О гладкости обобщенных решений нелокальных эллиптических задач на плоскости// — Докл. АН. — 2004. — *398*, № 3. — С. 295–299.

[16] *Гуревич П. Л.* Обобщенные решения нелокальных эллиптических задач// Матем. заметки. — 2005. — *77*, № 5. — С. 665–682.

[17] *Гуревич П. Л.* Об устойчивости индекса неограниченных нелокальных операторов в пространствах Соболева// Труды МИАН. — 2006. — *255*. — С. 116–135.

[18] *Гуревич П. Л.* О неустойчивости индекса некоторых нелокальных эллиптических задач// Труды семинара им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26*. С. 179-–194.

[19] *Гуревич П. Л.* Неограниченные возмущения двумерных диффузионных процессов с нелокальными краевыми условиями// Докл. АН. — 2007. — *417*, № 4.

[20] *Гуревич П. Л.* О существовании полугруппы Феллера с атомарной мерой в нелокальном краевом условии// Труды МИАН. — 2008. — *260*. С. 164–179.

[21] *Гуревич П. Л.* Ограниченные возмущения двумерных диффузионных процессов с нелокальными условиями вблизи границы// Матем. заметки. — 2008. — *83*, № 2. — 181–198.

[22] *Гуревич П. Л.* О несуществовании полугрупп Феллера в нетрансверсальном случае// Успехи матем. наук. — 2008. — *63*, № 3. — С. 159-160.

[23] *Гуревич П. Л., Скубачевский А. Л.* О фредгольмовой и однозначной разрешимости нелокальных эллиптических задач в многомерных областях// Труды Моск. матем. общ. — 2007. — *68*. — С. 288–373.

[24] *Гуревич П. Л., Егер В., Скубачевский А. Л.* О существовании периодических решений некоторых нелинейных задач термоконтроля// Докл. АН. — 2008. — *418*, № 2. — С. 151–154.

[25] *Гущин А. К.* Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений// Матем. сб. — 2002. — *193*, № 5. — С. 17–36.

[26] *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка// Матем. сб. — 1994. — *185*, № 1. — С. 121–160.

[27] *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения// Матем. сб. — 1995. — *186*, № . 2. — С. 37–58.

[28] *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* О нелокальных граничных задачах для эллиптических уравнений// Матем. исслед. — 1971. — *6*, № 2 (20). — С. 63–73.

[29] *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка// Дифференц. уравнения. — 1986. — *22*, № 12. — С. 2059–2071.

[30] *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода// Дифференц. уравнения. — 1988. — *24*, № 5. — С. 795–804.

[31] *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках// Матем. модел. — 1990. — *2*, № 8. — С. 139–156.

[32] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

[33] *Кишкис К. Ю.* Об индексе задачи Бицадзе—Самарского для гармонических функций// Дифференц. уравнения. — 1988. — *24*, № 1. — С. 105–110.

[34] *Кишкис К. Ю.* К теории нелокальных задач для уравнения Лапласа// Дифференц. уравнения. — 1989. — *25*, № 1. — С. 59–64.

[35] *Ковалева О. А., Скубачевский А. Л.* Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом// Матем. заметки. — 2000. — *67*, № 6. — С. 882–898.

[36] *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками// Тр. Моск. матем. общ. — 1967. — *16*. — С. 209–292.

[37] *Кондратьев В. А.* Особенности решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в окрестности ребра// Дифференц. уравнения. — 1977. — *13*, № 11. — С. 2026–2032.

[38] *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.

[39] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

[40] *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* L_p–оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами// Труды Моск. матем. общ. — 1978. — *37*. — С. 49–93.

[41] *Митидиери Э.*, *Похожаев С. И.* Теоремы типа Лиувилля для некоторых нелинейных нелокальных задач// Докл. АН. — 2004. — *399*, № 6. — С. 732–736.

[42] *Моисеев Е. И.* О спектральных характеристиках одной нелокальной краевой задачи// Дифференц. уравнения. — 1994. — *30*, № 5. — С. 864–872.

[43] *Моисеев Е. И.* Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций одной нелокальной краевой задачи// Дифференц. уравнения. — 1994. — *30*, № 12. — С. 2082–2093.

[44] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962.

[45] *Мустафин М. А.* Суммируемость методом Абеля рядов по корневым векторам нелокальных эллиптических задач// Дифференц. уравнения.— 1990. — *26*, № 1. — С. 167-168.

[46] *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.

[47] *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикладная механика. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.

[48] *Панеях Б. П.* О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов// Матем. заметки. — 1984. — *35*, № 3. — С. 425–434.

[49] *Подъяпольский В. В.* Полнота и базисность по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи// Дифференц. уравнения. — 1999. — *35*, № 4. — С 568–569.

[50] *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* О главном члене спектральной асимптотики нелокальных эллиптических задач. — Тезисы конференции, посвященной 75-летию Л. Д. Кудрявцева, 1998. — С. 157.

[51] *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по фукнциональному анализу. — М.: Иностранная литература, 1954.

[52] *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Об одном классе общих нелокальных эллиптических задач// Докл. АН СССР. — 1970. — *192*, № 3. — С. 511–513.

[53] *Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г.* Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем// Сиб. матем. журн. — 1972. — *13*, № 1. — С. 165–181.

[54] *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифференц. уравнения. — 1980. — *16*, № 11. — С. 1925–1935.

[55] *Скубачевский А. Л.* О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах// Дифференц. уравнения. — 1982. — *18*, № 9. — С. 1590–1599.

[56] *Скубачевский А. Л.* Нелокальные эллиптические задачи с параметром// Матем. сб. — 1983. — *121* (*163*), № 2 (6). — С. 201–210.

[57] *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи А. В. Бицадзе, А. А. Самарского// Докл. АН СССР. — 1984. — *278*, № 4. — С. 813–816.

[58] *Скубачевский А. Л.* Разрешимость эллиптических задач с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского// Дифференц. уравнения. — 1985. — *21*, № 4. — С. 701–706.

[59] *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы// Матем. сб. — 1986. — *129* (*171*), № 2. — С. 279–302.

[60] *Скубачевский А. Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов// Докл. Акад. наук СССР. — 1989. — *307*. — 287–292.

[61] *Скубачевский А. Л.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых нелокальных краевых задач// Дифференц. уравнения. — 1989. — *25*, № 1. — С. 127–136.

[62] *Скубачевский А. Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах// Дифференц. уравнения. — 1990. — *26*, № 1. — С. 120–131.

[63] *Скубачевский А. Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач// Дифференц. уравнения. — 1991. — *27*, № 1. — С. 128–139.

[64] *Скубачевский А. Л.* О полугруппах Феллера для многомерных диффузионных процессов// Докл. АН. — 1995. — *341*, № 2. — С. 173–176.

[65] *Скубачевский А. Л.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптических систем в бесконечных углах// Докл. АН. — 2007. — *412*, № 3. — С. 317–320.

[66] *Солдатов А. П.* Задача Бицадзе—Самарского для функций, аналитических по Дуглису// Дифференц. уравнения. — *41*, № 3. — 2005. — 396–407.

[67] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.

[68] *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Петроград. 1917.

[69] *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями// Вестн. МГУ. Сер. матем. и мех. — 1982. — № 6. — С. 12–21.

[70] *Amann H.* Feedback stabilization of linear and semilinear parabolic systems// In: Proceedings of "Trends in Semigroup Theory and Applications," Trieste, Sept. 28 — Oct. 2, 1987. — Lect. Notes Pure Appl. Math. — 1989. — *116*. — C. 21–57.

[71] *Antonevich A., Lebedev A.* Functional Differential Equations: I. C^*-theory — Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math. — *70*. — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1994.

[72] *Beals R.* Nonlocal elliptic boundary value problems// Bull. Amer. Math. Soc. — 1964. — *70*, № 5. — P. 693–696.

[73] *Browder F.* Non-local elliptic boundary value problems// Amer. J. Math. — 1964. — *86*. — P. 735–750.

[74] *Bensoussan A., Lions J.-L.* Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities. — Paris: Gauthier-Villars, 1984.

[75] *Bony J. M., Courrege P., Priouret P.* Semi-groups de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1968. — *18*. — P. 369–521.

[76] *Carleman T.* Sur la théorie des equations integrales et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. — *1*. — P. 138–151.

[77] *Colli P., Grasselli M., Sprekels J.* Automatic control via thermostats of a hyperbolic Stefan problem with memory// Appl. Math. Optim. — 1999. — *39*. — P. 229–255.

[78] *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations// Ann. Math. — 1952. — *55*. — P. 468–519.

[79] *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 1–30.

[80] *Galakhov E. I.* Multidimensional diffusion processes with nonlocal conditions// Funct. Differ. Equ. — 2001. — *8*, № 1-2. — P. 225–238.

[81] *Galakhov E. I., Skubachevskii. A. L.* On Feller semigroups generated by elliptic operators with integro-differential boundary conditions// J. Differential Equations. — 2001. — *176*. — P. 315–355.

[82] *Garroni M. G., Menaldi J. L.* Second order elliptic integro-differential problems. — London—New York—Washington, D.C.: Chapman & Hall/CRC, 2002.

[83] *Gurevich P. L.* Nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles and the Green formula// *In* Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Math. Inst. Univ. Giessen, Germany. — 2001. — *247*. — P. 1–74.

[84] *Gurevich P. L.* Asymptotics of solutions for nonlocal elliptic problems in plane bounded domains// Funct. Diff. Equ. — 2003. — *10*, № 1-2. — P. 175–214.

[85] *Gurevich P. L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, I// Russ. J. Math. Phys. — 2003. — *10*, № 4. — P. 436–466.

[86] *Gurevich P. L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, II// Russ. J. Math. Phys. — 2004. — *11*, № 1. — P. 1–44.

[87] *Gurevich P. L.* The consistency conditions and the smoothness of generalized solutions of nonlocal elliptic problems// Adv. Differential Equations. — 2006. — *11*, № 3. — P. 305–360.

[88] *Gurevich P. L.* Smoothness of generalized solutions for higher-order elliptic equations with nonlocal boundary conditions// J. Differential Equations. — 2008. — *245*. — P. 1323–1355.

[89] *Ishikawa Y.* A remark on the existence of a diffusion process with non-local boundary conditions// J. Math. Soc. Japan. — 1990. — *42*. — P. 171–184.

[90] *Krall A. M.* The development of general differential and general differential-boundary systems// Rocky Mountain J. of Math. — 1975. — *5*. — P. 493–542.

[91] *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 4. — P. 491–500.

[92] *Picone M.* Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine// Academia nazionale dei Lincei. Atti dei convegni. — 1932. — *15*. — P. 942–948.

[93] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. — Dordrecht—Boston—London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

[94] *Sato K., Ueno T.* Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary// J. Math. Kyoto Univ. — 1965. — *4*. — P. 529–605.

[95] *Schechter M.* Nonlocal elliptic boundary value problems// Ann. Scuola Super. Pisa, Ser. 3. — 1966. — *20*, № 2. — P. 421–441.

[96] *Shamin R. V.* Nonlocal parabolic problems with the support of nonlocal terms inside a domain// Funct. Differ. Equ. — 2003. — *10*, № 1-2. — P. 307–314.

[97] *Skubachevskii A. L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems// J. Math. Anal. Appl. — 1991. — *160*, № 2. — P. 323–341.

[98] *Skubachevskii A. L.* Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes// Russian J. Mathematical Physics. — 1995. — *3*. — P. 327–360.

[99] *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

[100] *Skubachevskii A. L.* Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem// Russ. J. Math. Phys. — 2001. — *8*. — P. 365–374.

[101] *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodinamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen// Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). Vol. III. — Roma: Reale Accad. Lincei, 1909. — P. 116–124.

[102] *Taira K.* Diffusion processes and partial differential equations. — New York—London: Academic Press, 1988.

[103] *Taira K.* On the exiestense of Feller semigroups with boundary conditions// Mem. Amer. Math. Soc. — 1992. — *99*, № 475. — P. 1–65.

[104] *Taira K.* Semigroups, boundary value problems and Markov processes. — Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[105] *Watanabe S.* Construction of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions by means of Poisson point processes of Brownian excursions// In: Probability Theory, 255–271. — Banach Center Publications. — *5*. — Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1979.