П. Л. Гуревич*

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ПЛОСКИХ УГЛАХ**

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из первых нелокальные эллиптические задачи начал изучать T. Carleman [1]. С работой [1] связаны исследования нелокальных эллиптических задач со сдвигами, отображающими границу области на себя. В работе [2] А. В. Бицадзе и А. А. Самарский рассмотрели уравнение Лапласа в области $G \subset \mathbb{R}^n$ с краевыми условиями, связывающими значения искомой функции на многообразии $\Upsilon_1 \subset \partial G$ со значениями на некотором многообразии, лежащем внутри области G; на множестве $\partial G \setminus \Upsilon_1$ ставится условие Дирихле. С такой постановкой связано дальнейшее изучение нелокальных задач со сдвигами, отображающими границу внутрь области. Подробный перечень работ, посвященных нелокальным эллиптическим задачам, содержится в [3].

При изучении нелокальных эллиптических задач этого типа наибольшие трудности возникают в случае пересечения носителя нелокальных данных с границей [4—8]. Это приводит к появлению степенных особенностей у решений вблизи некоторого множества $\mathcal{K}$, и, следовательно, возникает вопрос об асимптотике решения вблизи этого множества. Асимптотические формулы для решений нелокальных эллиптических задач в плоских областях впервые были получены в работе А. Л. Скубачевского [5]. Они позволяют доказать ряд принципиально новых свойств (по сравнению с «локальными» эллиптическими задачами как в областях с угловыми точками [9, 10], так и в областях

**Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-01030), Министерства образования РФ (грант № Е00-1.0-195), а также гранта INTAS YSF 2002-008.

с гладкой границей). Например, гладкость обобщенных решений нелокальных эллиптических задач может нарушаться как в окрестности вершины малого угла, так и вблизи гладкой границы даже при сколь угодно малых коэффициентах в нелокальных членах [5, 11].

В настоящей работе исследуется асимптотика решений нелокальных эллиптических краевых задач в плоских углах и в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Такие задачи возникают в качестве модельных при изучении асимптотики решений нелокальных эллиптических задач в ограниченных областях вблизи множества $\mathcal{K}$. Получены явные формулы для коэффициентов в асимптотических формулах в терминах собственных и присоединенных векторов сопряженных нелокальных операторов (действующих в пространствах распределений), а также формально сопряженных относительно формулы Грина нелокальных задач. Ранее сопряженные нелокальные задачи рассматривались в [12, 13].

Отметим, что часть утверждений доказывается аналогично результатам работ [14, 15]. В этих случаях мы ограничимся краткими схемами доказательств.

В § 2 рассматривается постановка нелокальной эллиптической задачи в угле и выводится общий вид асимптотики решений. В § 3 изучаются сопряженные нелокальные задачи и асимптотика их решений. Результаты § 3 применяются в § 4 к вычислению коэффициентов в асимптотике решений исходной нелокальной задачи. Наконец, § 5 посвящен исследованию асимптотики решений «локальных» эллиптических задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Такие задачи возникают наряду с нелокальными задачами в угле при изучении нелокальных задач в ограниченных областях (см. [5, 7]).

Статья содержит приложение А, в котором установлены две вспомогательные леммы о гладкости решений нелокальных и сопряженных к ним задач в одномерном случае. Эти леммы используются для доказательства гладкости собственных и присоединенных векторов нелокальных задач.

§ 2. ПОСТАНОВКА НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В УГЛЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ

1. Рассмотрим плоский угол $K = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ b_1 < \omega < b_2\}$ со сторонами $\gamma_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \omega = b_\sigma\}$ $(\sigma = 1, 2)$. Здесь (ω, r) — полярные координаты точки y; $-\pi < b_1 < b_2 < \pi$.

Обозначим через $\mathcal{P}(D_y)$, $B_{\sigma\mu}(D_y)$ и $B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)$ однородные дифференциальные операторы с постоянными комплексными коэффициентами порядков $2m$, $m_{\sigma\mu} \leqslant 2m-1$ и $m_{\sigma\mu} \leqslant 2m-1$ соответственно ($\sigma = 1, 2$; $\mu = 1, \dots, m$). Будем предполагать, что оператор $\mathcal{P}(D_y)$ собственно эллиптичен и система операторов $\{B_{\sigma\mu}(D_y)\}_{\mu=1}^m$ является нормальной и накрывает $\mathcal{P}(D_y)$ на γ_σ (см. [16, гл. 2]). На операторы $B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)$ (играющие в дальнейшем роль нелокальных) никаких условий, кроме ограничения на порядок, не накладывается.

Рассмотрим в плоском угле K нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{P}(D_y)u = f(y) \quad (y \in K), \tag{2.1}$$

$$\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D_y)u \equiv B_{\sigma\mu}(D_y)u(y)\big|_{\gamma_\sigma} + (B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)u)(\mathcal{G}_\sigma y)\big|_{\gamma_\sigma} = g_{\sigma\mu}(y)$$
$$(y \in \gamma_\sigma), \quad \sigma = 1, 2;\ \mu = 1, \dots, m. \tag{2.2}$$

Запись $(B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)u)(\mathcal{G}_\sigma y)$ означает, что выражение $(B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_{y'})u)(y')$ берется при значении аргумента $y' = \mathcal{G}_\sigma y$; $\mathcal{G}_\sigma$ — оператор поворота на угол ω_σ и растяжения в β_σ раз в плоскости $\{y\}$ так, что $b_1 < b_1 + \omega_1 = b_2 + \omega_2 = b < b_2$, $0 < \beta_\sigma$.

Для любого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ обозначим через $C_0^\infty(G)$ множество бесконечно дифференцируемых в $\bar{G}$ функций с компактными носителями из G. Введем пространство $H_a^l(K)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{K} \setminus \{0\})$ по норме $\|w\|_{H_a^l(K)} = \Big(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant l} \int\limits_K r^{2(a-l+|\alpha|)} \times |D_y^\alpha w(y)|^2\,dy\Big)^{1/2}$, где $a \in \mathbb{R}$, $l \geqslant 0$ — целое. Через $H_a^{l-1/2}(\gamma')$ при $l \geqslant 1$ обозначим пространство следов на луче $\gamma' = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \omega = b'\}$ $(b_1 \leqslant b' \leqslant b_2)$ с нормой $\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\gamma')} = \inf \|w\|_{H_a^l(K)}$ $(w \in H_a^l(K)$: $w\big|_{\gamma'} = \psi)$.

Введем соответствующий нелокальной задаче (2.1), (2.2) ограниченный оператор

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{P}(D_y), \mathcal{B}_{\sigma\mu}(D_y)\} \colon H_a^{l+2m}(K) \to$$
$$\to H_a^l(K, \gamma) = H_a^l(K) \times \prod_{\sigma=1,2} \prod_{\mu=1}^m H_a^{l+2m-m_{\sigma\mu}-1/2}(\gamma_\sigma).$$

2. Запишем операторы $\mathcal{P}(D_y)$, $B_{\sigma\mu}(D_y)$, $B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)$ в полярных координатах:

$$\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(\omega, D_\omega, rD_r), \quad B_{\sigma\mu}(D_y) = r^{-m_{\sigma\mu}}\tilde{B}_{\sigma\mu}(\omega, D_\omega, rD_r),$$
$$B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y) = r^{-m_{\sigma\mu}}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\omega, D_\omega, rD_r),$$

где $D_\omega = -i\frac{\partial}{\partial\omega}$, $D_r = -i\frac{\partial}{\partial r}$.

Будем обозначать через $\tilde{w}(\lambda)$ преобразование Меллина функции $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$:

$$\tilde{w}(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_0^\infty r^{-i\lambda-1} w(r)\, dr.$$

Положим $\{f, g_{\sigma\mu}\} = 0$ в (2.1) и (2.2) и сделаем формально преобразование Меллина. В результате получим

$$\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\tilde{u}(\omega,\lambda) = 0 \quad (b_1 < \omega < b_2), \tag{2.3}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{u}(\omega,\lambda) \equiv \tilde{B}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{u}(\omega,\lambda)\big|_{\omega=b_\sigma} + \\ + \beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{u}(\omega+\omega_\sigma,\lambda)\big|_{\omega=b_\sigma} = 0. \tag{2.4}$$

Здесь и далее мы для краткости опускаем аргументы ω и D_ω в дифференциальных операторах. Эта задача является обыкновенным дифференциальным уравнением (2.3) с нелокальными условиями (2.4), связывающими значения решения $\tilde{u}$ и его производных в точке $\omega = b_\sigma$ со значениями решения $\tilde{u}$ и его производных во внутренней точке $\omega = b$ интервала (b_1, b_2). Асимптотика решений нелокальной задачи (2.1), (2.2) в угле K будет описана в терминах собственных чисел и отвечающих им жордановых цепочек задачи (2.3), (2.4).

Рассмотрим оператор-функцию

$$\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = \{\tilde{\mathcal{P}}(\lambda), \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)\} \colon W^{l+2m}(b_1,b_2) \to W^l[b_1,b_2] = W^l(b_1,b_2) \times \mathbb{C}^{2m},$$

соответствующую нелокальной задаче (2.3), (2.4). Здесь $W^l(\cdot) = W_2^l(\cdot)$ — пространства Соболева порядка $l \geqslant 0$ (при $l = 0$ полагаем $W^0(\cdot) = L_2(\cdot)$).

Напомним теперь некоторые известные определения и факты (см. [17]). Голоморфная в точке λ_0 вектор-функция $\varphi(\lambda)$ со значениями в $W^{l+2m}(b_1,b_2)$, такая, что $\varphi(\lambda_0) \neq 0$, называется *корневой функцией* оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ в точке λ_0, если вектор-функция $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi(\lambda)$ обращается в этой точке в нуль. Если $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ имеет хотя бы одну корневую функцию в точке λ_0, то λ_0 называется *собственным числом* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Кратность нуля вектор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi(\lambda)$ в точке λ_0 называется *кратностью корневой функции* $\varphi(\lambda)$, а вектор $\varphi^{(0)} = \varphi(\lambda_0)$ — *собственным вектором*, отвечающим числу λ_0. Пусть $\varphi(\lambda)$ — корневая функция в точке λ_0 кратности $\varkappa$ и $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^j \varphi^{(j)}$. Тогда векторы $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(\varkappa-1)}$ называются *присоединенными к собственному вектору* φ_0, а упорядоченный набор $\varphi^{(0)}, \ldots, \varphi^{(\varkappa-1)}$ —

жордановой цепочкой, отвечающей числу λ_0. *Рангом* собственного вектора $\varphi^{(0)}$ ($\operatorname{rank}\varphi^{(0)}$) называется максимальная из кратностей всех корневых функций, таких, что $\varphi(\lambda_0)=\varphi^{(0)}$.

Замечание 2.1. Собственный и присоединенные векторы $\varphi^{(0)},\dots,\varphi^{(\varkappa-1)}$ оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, отвечающие собственному числу λ_0, удовлетворяют равенствам

$$\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}\partial_\lambda^q\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)\varphi^{(\nu-q)}=0,\quad \nu=0,\dots,\varkappa-1. \tag{2.5}$$

Здесь и далее ∂_λ^q обозначает производную по λ порядка q.

Из равенств (2.5) и леммы A.1 следует, что собственные и присоединенные векторы оператора $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ являются бесконечно гладкими функциями на отрезке $[b_1,b_2]$.

Из леммы 2.1 работы [6] следует, что все собственные числа оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ изолированы; при этом $\dim\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)<\infty$ для любого собственного числа λ_0 и ранги всех собственных векторов конечны. Пусть $J=\dim\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)$ и $\varphi^{(0,1)},\dots,\varphi^{(0,J)}$ — такая система линейно независимых собственных векторов, что $\operatorname{rank}\varphi^{(0,1)}$ — максимальный из рангов всех собственных векторов, отвечающих числу λ_0, а $\operatorname{rank}\varphi^{(0,j)}$ $(j=2,\dots,J)$ — максимальный из рангов собственных векторов из какого-нибудь прямого дополнения в $\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)$ к линейной оболочке векторов $\varphi^{(0,1)},\dots,\ \varphi^{(0,j-1)}$. Числа $\varkappa_j=\operatorname{rank}\varphi^{(0,j)}$ называют *частными кратностями* собственного числа λ_0, а сумму $\varkappa_1+\ldots+\varkappa_J$ — (*полной*) *кратностью* λ_0. Если для каждого $j=1,\dots,J$ векторы $\varphi^{(0,j)},\dots,\varphi^{(\varkappa_j-1,j)}$ образуют жорданову цепочку, то набор векторов $\{\varphi^{(0,j)},\dots,\varphi^{(\varkappa_j-1,j)}:\ j=1,\dots,J\}$ называется *канонической системой жордановых цепочек*, отвечающей собственному числу λ_0.

Пример 2.1. Положим $b_1=-\omega_0$, $b_2=\omega_0$. Рассмотрим в плоском угле $K=\{y\in\mathbb{R}^2\colon|\omega|<\omega_0\}$ $(0<\omega_0<\pi)$ со сторонами $\gamma_\sigma=\{y\in\mathbb{R}^2:\omega=(-1)^\sigma\omega_0\}$, $\sigma=1,2$, нелокальную задачу

$$\Delta u=f(y)\quad(y\in K), \tag{2.6}$$

$$u\big|_{\gamma_1}=0,\quad u\big|_{\gamma_2}+bu(\mathcal{G}_2y)\big|_{\gamma_2}=0, \tag{2.7}$$

где $b\in\mathbb{R}$, $\mathcal{G}_2$ — оператор поворота на угол $-\omega_0$. Задаче (2.6), (2.7) соответствует следующая модельная нелокальная задача на собственные значения:

$$\frac{d^2\varphi(\omega)}{d\omega^2} - \lambda^2\varphi(\omega) = 0 \quad (|\omega| < \omega_0), \tag{2.8}$$

$$\varphi(-\omega_0) = 0, \quad \varphi(\omega_0) + b\varphi(0) = 0. \tag{2.9}$$

Непосредственно доказывается (см. также [14, гл. 2]), что при $b = 0$ (т. е. если задача (2.6), (2.7) «локальная») собственные значения задачи (2.8), (2.9) имеют вид $\lambda_k = i\frac{\pi k}{2\omega_0}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; им соответствуют (с точностью до умножения на произвольную постоянную) собственные векторы $\varphi_k^{(0)}(\omega) = e^{i\frac{\pi k}{2\omega_0}\omega} - e^{-i\frac{\pi k}{2\omega_0}\omega}$. Присоединенных векторов при $b = 0$ нет, т. е. все собственные числа имеют кратность 1.

Покажем, что при $b \neq 0$ собственным значениям модельной задачи (2.8), (2.9) могут соответствовать жордановы цепочки длины больше чем 1.

I. Вначале рассмотрим случай $\lambda \neq 0$. Подставляя общее решение $\varphi(\omega) = c_1 e^{\lambda\omega} + c_2 e^{-\lambda\omega}$ уравнения (2.8) в нелокальные условия (2.9), получим

$$\begin{gathered} c_1 e^{-\lambda\omega_0} + c_2 e^{\lambda\omega_0} = 0, \\ (e^{\lambda\omega_0} + b)c_1 + (e^{-\lambda\omega_0} + b)c_2 = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Приравняем определитель $D(\lambda)$ системы (2.10) к нулю:

$$(e^{-\lambda\omega_0} - e^{\lambda\omega_0})(e^{\lambda\omega_0} + e^{-\lambda\omega_0} + b) = 0.$$

1) Пусть $e^{-\lambda\omega_0} - e^{\lambda\omega_0} = 0$. Отсюда получаем серию собственных значений

$$\lambda_{1k} = i\frac{\pi k}{\omega_0}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

им соответствуют собственные векторы

$$\varphi_{1k}^{(0)}(\omega) = e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} - e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega}.$$

Рассмотрим задачу на нахождение присоединенного вектора $\varphi_{1k}^{(1)}(\omega)$. Согласно (2.5) $\varphi_{1k}^{(1)}(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi_{1k}^{(1)}}{d\omega^2} + \frac{(\pi k)^2}{\omega_0^2}\varphi_{1k}^{(1)} - 2i\frac{\pi k}{\omega_0}\varphi_{1k}^{(0)} = 0 \quad (|\omega| < \omega_0)$$

и нелокальным условиям (2.9). Подставляя общее решение $\varphi(\omega) = c_1 e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} + c_2 e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} + \omega(e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} + e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega})$ последнего уравнения в нелокальные условия (2.9), получим

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 2\omega_0, \\ ((-1)^k + b)c_1 + ((-1)^k + b)c_2 = -2(-1)^k\omega_0. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Следовательно, присоединенный вектор $\varphi_{1k}^{(1)}(\omega)$ существует тогда и только тогда, когда

$$b = 2(-1)^{k+1}.$$

При этом можно положить

$$\varphi_{1k}^{(1)}(\omega) = (\omega + 2\omega_0)e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} + \omega e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega}.$$

Аналогично, используя (2.5), находим при $b = 2(-1)^{k+1}$ второй присоединенный вектор:

$$\varphi_{1k}^{(2)}(\omega) = \left(\frac{\omega^2}{2} + 2\omega_0\omega + 2\omega_0^2\right) e^{i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega} - \frac{\omega^2}{2}e^{-i\frac{\pi k}{\omega_0}\omega}.$$

Непосредственно доказывается, что третьего присоединенного вектора не существует.

2) Пусть

$$e^{\lambda\omega_0} + e^{-\lambda\omega_0} + b = 0. \tag{2.12}$$

Тогда имеем следующую серию собственных значений:

$$\lambda_{2n}^{\pm} = \frac{\ln\left(-\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2-4}}{2}\right)}{\omega_0} + i\frac{2\pi n}{\omega_0} \qquad \text{при } b < -2;$$

$$\lambda_{2n}^{\pm} = i\frac{\pm \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4-b^2}}{b} + 2\pi n}{\omega_0} \qquad \text{при } -2 < b < 0;$$

$$\lambda_{2n}^{\pm} = i\frac{\pm \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4-b^2}}{b} + (2n+1)\pi}{\omega_0} \qquad \text{при } 0 < b < 2;$$

$$\lambda_{2n}^{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2-4}}{2}\right)}{\omega_0} + i\frac{(2n+1)\pi}{\omega_0} \qquad \text{при } b > 2;$$

$n \in \mathbb{Z}$. Если $|b| = 2$, то мы получаем собственные значения из серии $\{\lambda_{1k}\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$, рассмотренной выше. Собственному значению $\lambda_{2n}^{\pm}$ соответствует собственный вектор

$$\varphi_{2n}^{(0)\pm}(\omega) = e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega} - e^{-2\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega}.$$

Покажем, что при $\lambda = \lambda_{2n}^{\pm}$ присоединенные векторы отсутствуют. Подставим общее решение $\varphi_{2n}^{(1)\pm}(\omega) = c_1 e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega} + c_2 e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega} + \omega(e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega} + e^{-2\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega})$ уравнения

$$\frac{d^2\varphi_{2n}^{(1)\pm}}{d\omega^2} - (\lambda_{2n}^{\pm})^2\varphi_{2n}^{(1)\pm} - 2\lambda_{2n}^{\pm}\varphi_{2n}^{(0)\pm} = 0 \quad (|\omega| < \omega_0)$$

в нелокальные условия (2.9). Имеем

$$
\begin{gathered}
e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}c_1 + e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}c_2 = 2\omega_0 e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0},\\
(e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + b)c_1 + (e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + b)c_2 = -\omega_0(e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e^{-3\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}).
\end{gathered}
\tag{2.13}
$$

Ранг матрицы системы (2.13) равен 1. Следовательно, система (2.13) разрешима тогда и только тогда, когда

$$
\begin{vmatrix} e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} & 2\omega_0 e^{-\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} \\ e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + b & -\omega_0(e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e^{-3\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0}) \end{vmatrix} = 0.
$$

Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$
3e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + e^{-3\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} + 2b = 0.
$$

Отсюда, учитывая (2.12), получаем, что либо $e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} = 1$, $b = -2$, либо $e^{\lambda_{2n}^{\pm}\omega_0} = -1$, $b = 2$. Однако мы рассматриваем случай $|b| \neq 2$. Следовательно, при $\lambda = \lambda_{2n}^{\pm}$ присоединенных векторов не существует.

II. Случай $\lambda = 0$ рассматривается аналогично. Оказывается, что $\lambda = 0$ есть собственное значение задачи (2.8), (2.9) тогда и только тогда, когда $b = -2$. При этом, если $b = -2$, собственному значению $\lambda = 0$ соответствует один собственный вектор $\varphi_0^{(0)}(\omega) = \omega + \omega_0$ и один присоединенный — $\varphi_0^{(1)}(\omega) = 0$.

Таким образом, показано, что задача (2.8), (2.9) имеет собственные значения кратности больше чем 1 тогда и только тогда, когда $|b| = 2$.

3. Следующий результат об изоморфизме следует из [6, § 2].

Теорема 2.1. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных чисел оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда нелокальная краевая задача* (2.1), (2.2) *имеет для любой правой части* $\{f, g_{\sigma\mu}\} \in H_a^l(K,\gamma)$ *единственное решение* $u \in H_a^{l+2m}(K)$, *представимое в виде сходящегося в среднем интеграла:*

$$
u(\omega, r) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty+ih}^{+\infty+ih} r^{i\lambda}\tilde{\mathcal{L}}^{-1}(\lambda)\{\tilde{F}(\omega,\lambda), \tilde{G}_{\sigma\mu}(\lambda)\}\,d\lambda.
$$

Здесь $h = a+1-l-2m$, $\tilde{F}(\omega,\lambda)$ *и* $\tilde{G}_{\sigma\mu}(\lambda)$ — *преобразования Меллина функций* $r^{2m}f(\omega,r)$ *и* $r^{m_{\sigma\mu}}g_{\sigma\mu}(r)$ *соответственно.*

Прежде чем сформулировать теорему об асимптотике решений задачи (2.1), (2.2), установим две леммы, описывающие решения однородной задачи.

Лемма 2.1. *Функция*

$$u(\omega,r)=r^{i\lambda_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\varphi^{(p-q)}(\omega), \tag{2.14}$$

где $\varphi^{(s)}\in W^{l+2m}(b_1,b_2)$, $s=0,\dots,\varkappa-1$, *является решением однородной задачи* (2.1), (2.2) *в том и только в том случае, если* λ_0 — *собственное число оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *а* $\varphi^{(0)},\dots,\varphi^{(\varkappa-1)}$ — *жорданова цепочка, отвечающая этому числу;* $p\leqslant\varkappa-1$.

Доказательство. Не указывая, как и ранее, зависимость дифференциальных операторов от ω и D_ω, запишем

$$\begin{gathered}\mathcal{P}(D_y)u=r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(rD_r)u=\\ =r^{-2m+i\lambda_0}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0+rD_r)\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\varphi^{(p-q)}=\\ =r^{-2m+i\lambda_0}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0)\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\varphi^{(p-q)}.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Аналогично

$$\begin{gathered}B_{\sigma\mu}(D_y)u=\\ =r^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu\tilde{B}_{\sigma\mu}(\lambda_0)\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\varphi^{(p-q)}.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Наконец, рассмотрим выражение $(B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)u)(\mathcal{G}y)$:

$$\begin{gathered}(B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)u)(\mathcal{G}y)=r^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0}\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0}\sum_{s=0}^{p}\frac{1}{s!}\partial_\lambda^s\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda_0)\times\\ \times\sum_{q=s}^{p}\frac{1}{(q-s)!}(i\ln r+i\ln\beta_\sigma)^{q-s}\varphi^{(p-q)}(\omega+\omega_\sigma).\end{gathered} \tag{2.17}$$

Раскладывая $(i\ln r+i\ln\beta_\sigma)^{q-s}$ по формуле бинома Ньютона и используя соотношение

$$\begin{gathered}\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0}\sum_{s=0}^{\nu}\frac{1}{s!(\nu-s)!}\partial_\lambda^s\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda_0)(i\ln\beta_\sigma)^{\nu-s}=\\ =\frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu(\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_0},\end{gathered}$$

из (2.17) получим

$$(B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(D_y)u)(\mathcal{G}y) = r^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda_0} \sum_{\nu=0}^{p} \frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu(\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda))\big|_{\lambda=\lambda_0} \times \\ \times \sum_{q=\nu}^{p} \frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\varphi^{(p-q)}(\omega+\omega_\sigma). \qquad (2.18)$$

Группируя в равенствах (2.15), (2.16), (2.18) слагаемые при одинаковых степенях $i\ln r$, видим, что функция u удовлетворяет однородной задаче (2.1), (2.2) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!}\partial_\lambda^h \tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)\varphi^{(k-h)} = 0, \quad k=0,\dots,p. \quad \square$$

Всякое решение вида (2.14) однородной задачи (2.1), (2.2) будем называть *степенным решением порядка* p, отвечающим собственному числу λ_0.

Повторяя доказательство леммы 1.3 работы [15], из леммы 2.1 получим следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{\varphi^{(0,j)},\dots,\varphi^{(\varkappa_j-1,j)} \colon j=1,\dots,J\}$ — *каноническая система жордановых цепочек оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *отвечающая собственному числу* λ_0. *Тогда функции*

$$u^{(k,j)}(\omega,r) = r^{i\lambda_0}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\varphi^{(k-q,j)}(\omega), \\ k=0,\dots,\varkappa_j-1, \quad j=1,\dots,J, \qquad (2.19)$$

образуют базис в пространстве степенных решений однородной задачи (2.1), (2.2), *отвечающих числу* λ_0.

Аналогично теореме 1.2 работы [15] при помощи теоремы 2.1 и леммы 2.2 доказывается следующее утверждение об асимптотическом представлении решений нелокальной задачи (2.1), (2.2).

Теорема 2.2. *Пусть* $\{f,g_{\sigma\mu}\}\in H_a^l(K,\gamma)\cap H_{a_1}^l(K,\gamma)$, где $a>a_1$, *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda=a_1+1-l-2m$, $\operatorname{Im}\lambda=a+1-l-2m$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Если* u — *решение задачи* (2.1), (2.2) *из пространства* $H_a^{l+2m}(K)$, *то*

$$u(\omega,r) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} c_n^{(k,j)}u_n^{(k,j)}(\omega,r) + u_1(\omega,r). \qquad (2.20)$$

Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — *собственные числа* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *лежащие в полосе* $a_1 + 1 - l - 2m < \operatorname{Im}\lambda < a + 1 - l - 2m$;

$$u_n^{(k,j)}(\omega, r) = r^{i\lambda_n} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(i \ln r)^q \varphi_n^{(k-q,j)}(\omega) \text{ —} \tag{2.21}$$

степенные (порядка k*) решения однородной задачи* (2.1), (2.2);

$$\{\varphi_n^{(0,j)}, \dots, \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} : j = 1, \dots, J_n\} \text{ —}$$

каноническая система жордановых цепочек оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *отвечающая собственному числу* λ_n, $n = 1, \dots, N$; $c_n^{(k,j)}$ — *некоторые постоянные;* u_1 — *решение задачи* (2.1), (2.2) *из пространства* $H_{a_1}^{l+2m}(K)$.

Замечание 2.2. Можно показать, что формула (2.20) верна и тогда, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ есть собственные числа оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Мы требуем, чтобы на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не было собственных чисел, так как это условие используется также при изучении асимптотики решений сопряженной задачи (теорема 4.2).

Замечание 2.3. Если выполнены условия теоремы 2.2 и полоса $a_1 + 1 - l - 2m \leqslant \operatorname{Im}\lambda < a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных чисел $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то решение u из теоремы 2.2 принадлежит пространству $H_{a_1}^{l+2m}(K)$.

Замечание 2.4. Теорема 2.2 обобщается на случай различных показателей дифференцируемости l и l_1. Пусть $\{f, g_{\sigma\mu}\} \in H_a^l(K, \gamma) \cap H_{a_1}^{l_1}(K, \gamma)$, $u \in H_a^{l+2m}(K)$ и прямые $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ и $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l_1 - 2m$ свободны от собственных чисел $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Тогда по теореме 2.2 имеет место формула (2.20), причем λ_n, $n = 1, \dots, N$, — собственные числа, заключенные между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ и $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l_1 - 2m$; $u_1 \in H_{a_1+l-l_1}^{l+2m}(K)$ — решение задачи (2.1), (2.2). Отсюда получаем $u_1 \in H_{a_1}^{l_1+2m}(K)$ (либо в силу непрерывности вложения $H_{a_1+l-l_1}^{l+2m}(K) \subset H_{a_1}^{l_1+2m}(K)$, если $l > l_1$, либо в силу теоремы 3.1 работы [12], если $l < l_1$). Далее для простоты будем считать, что $l = l_1$.

§ 3. СОПРЯЖЕННЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В УГЛЕ

1. Для вычисления постоянных $c_\nu^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.20) нам потребуются операторы, сопряженные с операторами нелокальных задач.

Обозначим $W^l[b_1,b_2]^* = W^l(b_1,b_2)^* \times \mathbb{C}^{2m}$. Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)\colon W^l[b_1,b_2]^* \to W^{l+2m}(b_1,b_2)^*$, сопряженный с оператором $\tilde{\mathcal{L}}(\bar\lambda)$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(b_1,b_2)\times\mathbb{C}^{2m}$. Оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$ действует на $\{\psi,\chi_{\sigma\mu}\}\in W^l[b_1,b_2]^*$ по формуле

$$\langle\varphi,\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)\{\psi,\chi_{\sigma\mu}\}\rangle = \langle\tilde{\mathcal{P}}(\bar\lambda)\varphi,\psi\rangle + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\bar\lambda)\varphi\cdot\overline{\chi_{\sigma\mu}}$$
$$\text{для всех } \varphi\in W^{l+2m}(b_1,b_2).$$

Здесь и далее $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает полуторалинейную форму на соответствующей паре сопряженных пространств.

Прежде всего сделаем одно замечание, аналогичное замечанию 2.1.

Замечание 3.1. Собственный и присоединенные векторы $\{\psi^{(0)},\chi_{\sigma\mu}^{(0)}\},\dots,\{\psi^{(\varkappa-1)},\chi_{\sigma\mu}^{(\varkappa-1)}\}$ оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, отвечающие собственному числу $\bar\lambda_0$, удовлетворяют равенствам

$$\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}\partial_\lambda^q\tilde{\mathcal{L}}^*(\bar\lambda_0)\{\psi^{(\nu-q)},\chi_{\sigma\mu}^{(\nu-q)}\} = 0,\quad \nu=0,\dots,\varkappa-1. \tag{3.1}$$

Из равенств (3.1) и леммы A.2 (см. приложение A) следует, что компоненты $\psi^{(0)},\dots,\psi^{(\varkappa-1)}$ собственного и присоединенных векторов оператора $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$ являются бесконечно гладкими функциями на отрезках $[b_1,b]$ и $[b,b_2]$.

Обозначим $H_a^l(K,\gamma)^* = H_a^l(K)^*\times\prod\limits_{\sigma=1,2}\prod\limits_{\mu=1}^{m}H_a^{l+2m-m_{\sigma\mu}-1/2}(\gamma_\sigma)^*$. Пусть $\mathcal{L}^*\colon H_a^l(K,\gamma)^*\to H_a^{l+2m}(K)^*$ — оператор, сопряженный с $\mathcal{L}$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(K)\times\prod\limits_{\sigma=1,2}\prod\limits_{\mu=1}^{m}L_2(\gamma_\sigma)$. Оператор $\mathcal{L}^*$ действует на $\{v,w_{\sigma\mu}\}\in$ $\in H_a^l(K,\gamma)^*$ по формуле

$$\langle u,\mathcal{L}^*\{v,w_{\sigma\mu}\}\rangle = \langle\mathcal{P}(D_y)u,v\rangle + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}\langle\mathcal{B}_{\sigma\mu}(D_y)u,w_{\sigma\mu}\rangle$$
$$\text{для всех } u\in H_a^{l+2m}(K). \tag{3.2}$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\mathcal{L}^*\{v,w_{\sigma\mu}\}=0. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. *Функция*

$$\{v, w_{\sigma\mu}\} = \Big\{ r^{i\bar\lambda_0+2m-2} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!} (i \ln r)^q \psi^{(p-q)},$$

$$r^{i\bar\lambda_0+m_{\sigma\mu}-1} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!} (i \ln r)^q \chi_{\sigma\mu}^{(p-q)} \Big\}, \tag{3.4}$$

где $\{\psi^{(s)}, \chi^{(s)}\} \in W^l[b_1, b_2]^*$, $s = 0, \dots \varkappa - 1$, *является решением однородного уравнения* (3.3) *в том и только в том случае, если* $\bar\lambda_0$ — *собственное число оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, *а* $\{\psi^{(0)}, \chi_{\sigma\mu}^{(0)}\}, \dots, \{\psi^{(\varkappa-1)}, \chi_{\sigma\mu}^{(\varkappa-1)}\}$ — *жорданова цепочка, отвечающая этому числу;* $p \leqslant \varkappa - 1$.

Доказательство. Согласно замечанию 3.1 функции $\psi^{(s)}$, $s = 0, \dots, p$, принадлежат $L_2(b_1, b_2)$; поэтому для любых $u \in C_0^\infty(\bar K \setminus \{0\})$ выполняется тождество

$$\langle u, \mathcal{L}^*\{v, w_{\sigma\mu}\}\rangle = \int_{b_1}^{b_2} \int_0^\infty r^{-1} \tilde{\mathcal{P}}(rD_r) u \cdot \overline{r^{i\bar\lambda_0} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!} (i \ln r)^q \psi^{(p-q)}}\, dr\, d\omega +$$

$$+ \int_0^\infty \sum_{\sigma=1,2} \sum_{\mu=1}^{m} r^{-1} \tilde B_{\sigma\mu}(rD_r) u\big|_{\omega=b_\sigma} \cdot \overline{r^{i\bar\lambda_0} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!} (i \ln r)^q \chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}}\, dr +$$

$$+ \int_0^\infty \sum_{\sigma=1,2} \sum_{\mu=1}^{m} r^{-1} \tilde B_{\sigma\mu}^{\mathcal{G}}(rD_r) u\big|_{\omega=b} \times$$

$$\times \overline{r^{i\bar\lambda_0} \beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}-i\bar\lambda_0} \sum_{q=0}^{p} \frac{1}{q!} (i \ln \beta_\sigma^{-1} + i \ln r)^q \chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}}\, dr \tag{3.5}$$

(если в последнем интеграле положить $r' = r\beta_\sigma^{-1}$, то получим в точности формулу (3.2)).

Обозначим через $\delta_{b'} = \delta_{b'}(\omega)$ дельта-функцию с носителем в точке b' ($b_1 \leqslant b' \leqslant b_2$). Пусть $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$, $\tilde B_{\sigma\mu}^*(\lambda)$ и $(\tilde B_{\sigma\mu}^{\mathcal{G}})^*(\lambda)$ — операторы, формально сопряженные с $\tilde{\mathcal{P}}(\bar\lambda)$, $\tilde B_{\sigma\mu}(\bar\lambda)$ и $\tilde B_{\sigma\mu}^{\mathcal{G}}(\bar\lambda)$ соответственно.

Заметим, что тождества вида

$$\int_{b_1}^{b_2} D_\omega \varphi \cdot \overline{\psi^{(p-q)}}\, d\omega = \langle \varphi, D_\omega \psi^{(p-q)} \rangle,$$

$$D_\omega\varphi\big|_{\omega=b'}\cdot\overline{\chi^{(p-q)}}=\langle\varphi, D_\omega(\chi^{(p-q)}\otimes\delta_{b'})\rangle$$

(для $\varphi\in W^l(b_1,b_2)$) порождают функционалы $D_\omega\psi^{(p-q)}$ и $D_\omega(\chi^{(p-q)}\otimes\delta_{b'})$ из пространства $W^l(b_1,b_2)^*$. Следовательно, интегрируя в (3.5) по частям (при фиксированных ω) и пользуясь соотношениями

$$\tilde{\mathcal{P}}^*(rD_r)\biggl(r^{i\bar\lambda_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi^{(p-q)}\biggr)=$$

$$=r^{i\bar\lambda_0}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu\tilde{\mathcal{P}}^*(\bar\lambda_0)\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\psi^{(p-q)},$$

$$\tilde B^*_{\sigma\mu}(rD_r)\biggl(r^{i\bar\lambda_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}\otimes\delta_{b_\sigma}\biggr)=$$

$$=r^{i\bar\lambda_0}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu\tilde B^*_{\sigma\mu}(\bar\lambda_0)\biggl(\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}\otimes\delta_{b_\sigma}\biggr),$$

$$(\tilde B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu})^*(rD_r)\biggl(r^{i\bar\lambda_0}\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}-i\bar\lambda_0}\sum_{q=0}^{p}\frac{1}{q!}(i\ln\beta_\sigma^{-1}+i\ln r)^q\chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}\otimes\delta_b\biggr)=$$

$$=r^{i\bar\lambda_0}\sum_{\nu=0}^{p}\frac{1}{\nu!}\partial_\lambda^\nu(\beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}-i\lambda}(\tilde B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu})^*(\lambda))\big|_{\lambda=\bar\lambda_0}\times$$

$$\times\biggl(\sum_{q=\nu}^{p}\frac{1}{(q-\nu)!}(i\ln r)^{q-\nu}\chi_{\sigma\mu}^{(p-q)}\otimes\delta_b\biggr)$$

(которые доказываются аналогично равенствам (2.15), (2.16), (2.18)), заключаем, что функция $\{v,w_{\sigma\mu}\}$ удовлетворяет однородному уравнению (3.3) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{h=0}^{k}\frac{1}{h!}\partial_\lambda^h\tilde{\mathcal{L}}^*(\bar\lambda_0)\{\psi^{(k-h)},\chi_{\sigma\mu}^{(k-h)}\}=0,\quad k=0,\dots,p$$

(ср. с доказательством леммы 2.1). □

Всякое решение вида (3.4) однородного уравнения (3.3) будем называть *степенным решением порядка* p, отвечающим собственному числу $\bar\lambda_0$.

2. В дальнейшем нам понадобится специальный выбор жордановых цепочек, удовлетворяющих условиям биортогональности и нормировки. Такие цепочки описываются в следующей лемме.

Лемма 3.2. *Пусть собственному числу λ_0 оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ отвечает каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\varphi^{(0,j)},\dots,\varphi^{(\varkappa_j-1,j)}\colon j=1,\dots,J\}.$$

Тогда существует такая каноническая система жордановых цепочек

$$\{\{\psi^{(0,j)},\chi_{\sigma\mu}^{(0,j)}\},\dots,\{\psi^{(\varkappa_j-1,j)},\chi_{\sigma\mu}^{(\varkappa_j-1,j)}\}\colon j=1,\dots,J\}$$

оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, отвечающая числу $\bar\lambda_0$, что выполняются соотношения

$$\sum_{p=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(\nu+k+1-p-q)!}\Big\{(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\psi^{(p,\zeta)})_{L_2(b_1,b_2)}+$$
$$+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},\chi_{\sigma\mu}^{(p,\zeta)})_{\mathbb{C}}\Big\}=\delta_{\xi,\zeta}\delta_{\varkappa_\xi-k-1,\nu},\quad(3.6)$$

где $\zeta,\xi=1,\dots,J$; $\nu=0,\dots,\varkappa_\zeta-1$; $k=0,\dots,\varkappa_\xi-1$; $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера.

Доказательство. В силу леммы 2.1 работы [6] λ_0 является нормальным числом оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, т. е. $\dim\ker\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0)<\infty$, $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda_0))<\infty$ и все точки некоторого проколотого круга $0<|\lambda-\lambda_0|<\rho$ (при достаточно малом ρ) являются регулярными для $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$; поэтому необходимый результат вытекает из леммы 2.1 работы [15]. □

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ В АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В УГЛЕ

1. В данном параграфе выводятся явные формулы для коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.20). Вначале мы вычислим коэффициенты при помощи степенных решений $\{v,w_{\sigma\mu}\}$ однородного уравнения (3.3), а затем получим представление коэффициентов в терминах формулы Грина.

Пусть $\bar\lambda_n$ — собственное число оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, и пусть

$$\{\{\psi_n^{(0,j)},\chi_{\sigma\mu,n}^{(0,j)}\},\dots,\{\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)},\chi_{\sigma\mu,n}^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\}\colon j=1,\dots,J_n\}\text{ —}$$

жордановы цепочки $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$, отвечающие числу $\bar\lambda_n$ и составляющие каноническую систему. Рассмотрим степенные решения (порядка ν)

уравнения (3.3):

$$\{v_n^{(\nu,j)}, w_{\sigma\mu,n}^{(\nu,j)}\} = \Big\{ r^{i\bar\lambda_n+2m-2} \sum_{q=0}^{\nu} \frac{1}{q!}(i\ln r)^q \psi_n^{(\nu-q,j)},$$
$$r^{i\bar\lambda_n+m_{\sigma\mu}-1} \sum_{q=0}^{\nu} \frac{1}{q!}(i\ln r)^q \chi_{\sigma\mu,n}^{(\nu-q,j)} \Big\}, \tag{4.1}$$

где $\nu = 0,\dots,\varkappa_{j,n}-1$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2; тогда коэффициенты $c_n^{(k,j)}$ из (2.20) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)} = (f, iv_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)})_{L_2(K)} + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(g_{\sigma\mu}, iw_{\sigma\mu,n}^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)})_{L_2(\gamma_\sigma)}, \tag{4.2}$$

где $\{v_n^{(\nu,j)}, w_{\sigma\mu,n}^{(\nu,j)}\}$ — вектор, определенный равенством (4.1), причем жордановы цепочки

$$\{\varphi_n^{(0,j)},\dots,\varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\colon j=1,\dots,J_n\},$$
$$\big\{\{\psi_n^{(0,j)},\chi_{\sigma\mu,n}^{(0,j)}\},\dots,\{\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)},\chi_{\sigma\mu,n}^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\}\colon j=1,\dots,J_n\big\},$$

фигурирующие в (2.21) и (4.1), подчинены условиям (3.6) биортогональности и нормировки.

Теорема 4.1 доказывается аналогично теореме 3.1 работы [15] при помощи лемм 3.1 и 3.2 данной работы.

Замечание 4.1. Согласно замечанию 3.1 функции $\psi_n^{(\nu,j)}$ принадлежат пространству $L_2(b_1,b_2)$. Отсюда и из равенств (4.1) и (4.2) вытекает, что если $\{f,g_{\sigma\mu}\}\in H_a^l(K,\gamma)\cap H_{a_1}^l(K,\gamma)$ и $a_1+1-l-2m < \operatorname{Im}\lambda_n < a+1-l-2m$, то имеет место оценка

$$|c_n^{(k,j)}| \leqslant c(\|\{f,g_{\sigma\mu}\}\|_{H_a^l(K,\gamma)} + \|\{f,g_{\sigma\mu}\}\|_{H_{a_1}^l(K,\gamma)}).$$

Из теорем 2.2, 4.1 и соображений двойственности получается следующий результат об асимптотике решений сопряженной задачи

$$\mathcal{L}^*\{v, w_{\sigma\mu}\} = \Psi. \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. *Пусть $\Psi \in H_a^{l+2m}(K)^* \cap H_{a_1}^{l+2m}(K)^*$, где $a > a_1$, и пусть прямые $\operatorname{Im}\lambda = a_1+1-l-2m$, $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ свободны от спектра оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Если $\{v, w_{\sigma\mu}\}$ — решение* *задачи (4.3) из пространства* $H^l_{a_1}(K,\gamma)^*$, *то*

$$\{v, w_{\sigma\mu}\} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} d_n^{(k,j)}\{v_n^{(k,j)}, w_{\sigma\mu,n}^{(k,j)}\} + \{V, W_{\sigma\mu}\}. \tag{4.4}$$

Здесь $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ *— собственные числа* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, *лежащие в полосе* $a_1+1-l-2m < \operatorname{Im}\lambda < a+1-l-2m$; $\{v_n^{(k,j)}, w_{\sigma\mu,n}^{(k,j)}\}$ *— векторы, определенные формулой* (4.1); $d_n^{(k,j)}$ *— некоторые постоянные;* $\{V, W_{\sigma\mu}\}$ *— решение задачи* (4.3) *из пространства* $H^l_a(K,\gamma)^*$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\{f, g_{\sigma\mu}\} \in C_0^\infty(\bar{K}\setminus\{0\}) \times \prod_{\sigma=1,2}\prod_{\mu=1}^{m} C_0^\infty(\gamma_\sigma).$$

Очевидно, $\{f, g_{\sigma\mu}\} \in H^l_a(K,\gamma)\cap H^l_{a_1}(K,\gamma)$.

Согласно теореме 2.1 работы [6] существует функция $u_1 \in H^{l+2m}_{a_1}(K)$, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}u_1 = \{f, g_{\sigma\mu}\}$. Отсюда и из (4.3) получаем

$$\langle\{f, g_{\sigma\mu}\}, \{v, w_{\sigma\mu}\}\rangle = \langle\mathcal{L}u_1, \{v, w_{\sigma\mu}\}\rangle = \langle u_1, \Psi\rangle. \tag{4.5}$$

Здесь первые и вторые скобки обозначают полуторалинейные формы на паре сопряженных пространств $H^l_{a_1}(K,\gamma)$, $H^l_{a_1}(K,\gamma)^*$, а третьи скобки — на паре $H^{l+2m}_{a_1}(K)$, $H^{l+2m}_{a_1}(K)^*$.

Далее, из теоремы 2.2 следует

$$\langle u_1, \Psi\rangle = \langle u, \Psi\rangle + \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} c_n^{(k,j)}\langle u_n^{(k,j)}, \Psi\rangle.$$

Здесь $u \in H^{l+2m}_a(K)$ — функция, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}u = \{f, g_{\sigma\mu}\}$; первые скобки в правой части равенства обозначают полуторалинейную форму на паре сопряженных пространств $H^{l+2m}_a(K)$, $H^{l+2m}_a(K)^*$, а вторые — действие функционала $\Psi \in H^{l+2m}_a(K)^* \cap H^{l+2m}_{a_1}(K)^*$ на функцию $u_n^{(k,j)}$. В силу теоремы 4.1 последнее равенство можно записать в виде

$$\langle u_1, \Psi\rangle = \langle u, \Psi\rangle +$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} \overline{d_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}}\langle\{f, g_{\sigma\mu}\}, \{v_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}, w_{\sigma\mu,n}^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}\}\rangle =$$

$$= \langle u, \Psi\rangle + \left\langle \{f, g_{\sigma\mu}\}, \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} d_n^{(k,j)}\{v_n^{(k,j)}, w_{\sigma\mu,n}^{(k,j)}\}\right\rangle. \tag{4.6}$$

Здесь $\overline{d_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)}} = -i\langle u_n^{(k,j)}, \Psi\rangle$.

Поскольку в силу теоремы 2.1 работы [6] оператор $\mathcal{L}^*$ есть изоморфизм из $H_a^l(K,\gamma)^*$ на $H_a^{l+2m}(K)^*$, существует функция $\{V, W_{\sigma\mu}\} \in H_a^l(K,\gamma)^*$, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}^*\{V, W_{\sigma\mu}\} = \Psi$. Отсюда, из (4.5) и (4.6) получаем

$$\left\langle \{f, g_{\sigma\mu}\}, \{v, w_{\sigma\mu}\} - \{V, W_{\sigma\mu}\} - \sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{J_n}\sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} d_n^{(k,j)}\{v_n^{(k,j)}, w_{\sigma\mu,n}^{(k,j)}\}\right\rangle = 0. \tag{4.7}$$

Теперь утверждение теоремы следует из (4.7) и произвольности выбора $\{f, g_{\sigma\mu}\} \in C_0^\infty(\bar K \setminus \{0\}) \times \prod\limits_{\sigma=1,2}\prod\limits_{\mu=1}^{m} C_0^\infty(\gamma_\sigma)$. □

Формула вида (4.4) используется при вычислении коэффициентов в асимптотике решений нелокальных задач в ограниченных областях.

2. Рассмотрим формулу Грина для нелокальных эллиптических задач. Для этого введем множество $\gamma = \{y \colon \varphi = b\}$, являющееся носителем нелокальных данных в задаче (2.1), (2.2). Обозначим $K_1 = \{y \colon b_1 < \varphi < b\}$, $K_2 = \{y \colon b < \varphi < b_2\}$. Для заданных в K функций $v(y)$ будем обозначать через $v_\sigma(y)$ их сужения на K_σ, $\sigma = 1, 2$. Будем говорить, что v принадлежит $\mathcal{C}^\infty(\bar K \setminus \{0\})$, если v_σ принадлежат $C^\infty(\bar K_\sigma \setminus \{0\})$, $\sigma = 1, 2$.

Описывая формулу Грина в угле K, для краткости не будем указывать зависимость дифференциальных операторов от D_y. Обозначим через $\mathcal{P}^*$ оператор, формально сопряженный с $\mathcal{P}$. Согласно теореме 4.1 работы [12] (см. также теорему 1 работы [13]) можно выбрать (не единственным образом): 1) систему нормальных на γ_σ операторов $\{B'_{\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ с постоянными коэффициентами и порядками $2m-1-m'_{\sigma\mu}$, дополняющую $\{B_{\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ до системы Дирихле*) порядка $2m$ на γ_σ; 2) систему $\{B_\mu, B'_\mu\}_{\mu=1}^m$, являющуюся системой Дирихле порядка $2m$ на γ, такую, что порядки операторов B_μ и B'_μ равны $2m-\mu$ и $m-\mu$ соответственно.

Если этот выбор сделан, то существуют дифференциальные операторы $C_{\sigma\mu}$, $C'_{\sigma\mu}$, T_ν и $T^{\mathcal{G}}_{\sigma\nu}$ ($\sigma = 1, 2$; $\mu = 1, \ldots, m$; $\nu = 1, \ldots, 2m$) с постоянными коэффициентами, обладающие следующими свойствами:

---

*) Определение системы Дирихле см. в [16, гл. 2, п. 2.2].

I. Порядки операторов $C_{\sigma\mu}$, $C'_{\sigma\mu}$, T_ν и $T^{\mathcal{G}}_{\sigma\nu}$ равны $m'_{\sigma\mu}$, $2m-1-m_{\sigma\mu}$, $\nu-1$ и $\nu-1$ соответственно. II. Система $\{C_{\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ накрывает оператор $\mathcal{P}^*$ на γ_σ и дополняет $\{C'_{\sigma\mu}\}_{\mu=1}^m$ до системы Дирихле порядка $2m$ на γ_σ, система $\{T_\nu\}_{\nu=1}^{2m}$ есть система Дирихле порядка $2m$ на γ. III. Для любых функций $u\in C_0^\infty(\bar K\setminus\{0\})$, $v\in\mathcal{C}^\infty(\bar K_\sigma\setminus\{0\})$ имеет место формула Грина

$$\begin{gathered}(\mathcal{P}u,v)_{L_2(K_\sigma)}+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^m\big(\mathcal{B}_{\sigma\mu}u,C'_{\sigma\mu}v_\sigma\big|_{\gamma_\sigma}\big)_{L_2(\gamma_\sigma)}+\\ +\sum_{\mu=1}^m\big(B_\mu u\big|_\gamma,\mathcal{T}_\mu v\big)_{L_2(\gamma)}=\sum_{\sigma=1,2}(u,\mathcal{P}^*v_\sigma)_{K_\sigma}+\\ +\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^m\big(B'_{\sigma\mu}u\big|_{\gamma_\sigma},C_{\sigma\mu}v_\sigma\big|_{\gamma_\sigma}\big)_{L_2(\gamma_\sigma)}+\sum_{\mu=1}^m\big(B'_\mu u\big|_\gamma,\mathcal{T}_{m+\mu}v\big)_{L_2(\gamma)}.\end{gathered}\tag{4.8}$$

Здесь

$$\mathcal{T}_\nu v\equiv T_\nu v_1\big|_\gamma-T_\nu v_2\big|_\gamma+\sum_{k=1,2}(T^{\mathcal{G}}_{k\nu}v_k)(\mathcal{G}_k^{-1}y)\big|_\gamma,$$

где $\mathcal{G}_k^{-1}$ — оператор поворота на угол $-\omega_k$ и растяжения в $1/\beta_k$ раз в плоскости $\{y\}$ ($k=1,2$; $\nu=1,\dots,2m$).

Из формулы (4.8) следует задача, формально сопряженная к задаче (2.1), (2.2):

$$\mathcal{P}^*(D_y)v_\sigma=f_\sigma(y)\quad(y\in K_\sigma;\ \sigma=1,2),\tag{4.9}$$

$$\mathcal{C}_{\sigma\mu}(D_y)v\equiv C_{\sigma\mu}(D_y)v_\sigma\big|_{\gamma_\sigma}=g_{\sigma\mu}(y)\quad(y\in\gamma_\sigma;\ \sigma=1,2;\ \mu=1,\dots,m),\tag{4.10}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{T}_\nu(D_y)v\equiv T_\nu(D_y)v_1\big|_\gamma-T_\nu(D_y)v_2\big|_\gamma+\\ +\sum_{k=1,2}(T^{\mathcal{G}}_{k\nu}(D_y)v_k)(\mathcal{G}_k^{-1}y)\big|_\gamma=h_\nu(y)\quad(y\in\gamma;\ \nu=1,\dots,2m).\end{gathered}\tag{4.11}$$

Задачу (4.9)—(4.11) будем называть *нелокальной задачей трансмиссии в плоском угле* K. Задачи вида (4.9)—(4.11) изучались в [12, 13].

Для заданных на интервале (b_1,b_2) функций $\tilde v(\omega)$ будем обозначать через $\tilde v_1(\omega)$ и $\tilde v_2(\omega)$ их сужения на интервалы (b_1,b) и (b,b_2) соответственно. Будем говорить, что $\tilde v$ принадлежит $\mathcal{C}^\infty([b_1,b_2])$, если $\tilde v_1$ принадлежат $C^\infty([b_1,b])$, $\tilde v_2$ принадлежат $C^\infty([b,b_2])$.

Запишем все дифференциальные операторы, фигурирующие в (4.8), в полярных координатах (опуская ω и D_ω): $\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(rD_r)$, $B_{\sigma\mu}(D_y) = r^{-m_{\sigma\mu}}\tilde{B}_{\sigma\mu}(rD_r)$ и т. п. Согласно теореме 4.3 работы [12] для любых функций $\tilde{u} \in C^\infty([b_1, b_2])$, $\tilde{v} \in \mathcal{C}^\infty([b_1, b_2])$ имеет место следующая формула Грина с параметром λ:

$$(\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)\tilde{u}, \tilde{v})_{L_2(b_1,b_2)} + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m} \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{u} \cdot \overline{\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\lambda')\tilde{v}_\sigma\big|_{\omega=b_\sigma}} +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \tilde{B}_\mu(\lambda)\tilde{u}\big|_{\omega=b} \cdot \overline{\tilde{\mathcal{T}}_\mu(\lambda')\tilde{v}} = (\tilde{u}, \tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda')\tilde{v}_1)_{L_2(b_1,b)} +$$
$$+ (\tilde{u}, \tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda')\tilde{v}_2)_{L_2(b,b_2)} + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m} \tilde{B}'_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{u}\big|_{\omega=b_\sigma} \cdot \overline{\tilde{C}_{\sigma\mu}(\lambda')\tilde{v}_\sigma\big|_{\omega=b_\sigma}} +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \tilde{B}'_\mu(\lambda)\tilde{u}\big|_{\omega=b} \cdot \overline{\tilde{\mathcal{T}}_{m+\mu}(\lambda')\tilde{v}}. \qquad (4.12)$$

Здесь $\lambda' = \bar{\lambda} - 2i(m-1)$;

$$\tilde{\mathcal{T}}_\nu(\lambda')\tilde{v} = \tilde{T}_\nu(\lambda')\tilde{v}_1(\omega)\big|_{\omega=b} - \tilde{T}_\nu(\lambda')\tilde{v}_2(\omega)\big|_{\omega=b} +$$
$$+ \sum_{k=1,2} \beta_k^{-i\lambda'+(\nu-1)} \tilde{T}^{\mathcal{G}}_{k\nu}(\lambda')\tilde{v}_k(\omega-\omega_k)\big|_{\omega=b}.$$

Из формулы (4.12) следует задача, формально сопряженная к задаче (2.3), (2.4):

$$\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\tilde{v}_1(\omega) = 0 \ \ (\omega \in (b_1, b)), \quad \tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\tilde{v}_2(\omega) = 0 \ \ (\omega \in (b, b_2)), \qquad (4.13)$$
$$\tilde{\mathcal{C}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{v}(\omega) \equiv \tilde{C}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{v}_\sigma(\omega)\big|_{\omega=\omega_\sigma} = 0 \ \ (\sigma = 1, 2;\ \mu = 1, \dots, m), \qquad (4.14)$$
$$\tilde{\mathcal{T}}_\nu(\lambda)\tilde{v}(\omega) \equiv \tilde{T}_\nu(\lambda)\tilde{v}_1(\omega)\big|_{\omega=b} - \tilde{T}_\nu(\lambda)\tilde{v}_2(\omega)\big|_{\omega=b} +$$
$$+ \sum_{k=1,2} \beta_k^{-i\lambda+(\nu-1)} \tilde{T}^{\mathcal{G}}_{k\nu}(\lambda)\tilde{v}_k(\omega-\omega_k)\big|_{\omega=b} = 0 \ \ (\nu = 1, \dots, 2m). \qquad (4.15)$$

Задачу (4.13)—(4.15) будем называть *нелокальной задачей трансмиссии на дуге* (b_1, b_2). Такие задачи рассматривались в [12, 13].

Заметим, что задача (4.13)—(4.15) получается также из задачи (4.9)—(4.11), если в последней положить $f_\sigma = 0$, $g_{\sigma\mu} = 0$, $h_\nu = 0$ и сделать формально преобразование Меллина.

Задаче (4.13)—(4.15) соответствует оператор-функция

$$\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)\colon W^{l+2m}(b_1, b) \oplus W^{l+2m}(b, b_2) \to$$
$$\to (W^l(b_1, b) \oplus W^l(b, b_2)) \times \mathbb{C}^{2m} \times \mathbb{C}^{2m},$$

действующая по формуле

$$\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)\tilde{v} = \{\tilde{z}, \tilde{\mathcal{C}}_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{v}, \tilde{\mathcal{T}}_\nu(\lambda)\tilde{v}\},$$

где $\tilde{z}(\omega)=\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\tilde{v}_1(\omega)$ при $\omega \in (b_1, b)$, $\tilde{z}(\omega)=\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\tilde{v}_2(\omega)$ при $\omega \in (b, b_2)$. Отметим, что мы не можем определить $\tilde{z}$ формулой $\tilde{z}(\omega) = \tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\tilde{v}(\omega)$ при $\omega \in (b_1, b_2)$, так как функция $\tilde{v} \in W^{l+2m}(b_1, b) \oplus W^{l+2m}(b, b_2)$ может иметь разрыв в точке $\omega = b$.

3. Установим связь между жордановыми цепочками оператор-функций $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$. Положим

$$\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{v} = \tilde{C}'_{\sigma\mu}(\lambda)\tilde{v}_\sigma(\omega)\big|_{\omega=b_\sigma}.$$

Повторяя доказательство предложения 2.5 работы [14, гл. 1], получим при помощи формулы Грина (4.12) и замечания 3.1 следующий результат.

Лемма 4.1. *Векторы* $\{\psi^{(0)}, \chi^{(0)}_{\sigma\mu}\}, \dots, \{\psi^{(\varkappa-1)}, \chi^{(\varkappa-1)}_{\sigma\mu}\}$ *образуют жорданову цепочку оператора* $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)$*, отвечающую собственному числу* $\bar{\lambda}_0$*, тогда и только тогда, когда векторы* $\psi^{(0)}, \dots, \psi^{(\varkappa-1)}$ *образуют жорданову цепочку оператора* $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$*, отвечающую собственному числу* $\bar{\lambda}_0 - 2i(m-1)$*, и векторы* $\psi^{(k)}$ *и* $\chi^{(k)}_{\sigma\mu}$ *связаны соотношением*

$$\chi^{(k)}_{\sigma\mu} = \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} \partial_\lambda^r \tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar{\lambda}_0 - 2i(m-1))\psi^{(k-r)}.$$

Комбинируя леммы 3.2 и 4.1, получаем следующее условие биортогональности и нормировки жордановых цепочек в терминах формулы Грина.

Лемма 4.2. *Пусть собственному числу* λ_0 *оператор-функции* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ *отвечает каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\varphi^{(0,j)}, \dots, \varphi^{(\varkappa_j-1,j)} \colon j = 1, \dots, J\}.$$

Тогда существует такая каноническая система жордановых цепочек

$$\{\psi^{(0,j)}, \dots, \psi^{(\varkappa_j-1,j)} \colon j = 1, \dots, J\}$$

оператор-функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$*, отвечающая числу* $\bar{\lambda}_0 - 2i(m-1)$*, что выполняются соотношения*

$$\sum_{p=0}^{\nu} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{(\nu+k+1-p-q)!} \Big\{ (\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q} \tilde{\mathcal{P}}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)}, \psi^{(p,\zeta)})_{L_2(b_1,b_2)} +$$

$$+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}\Big(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda_0)\varphi^{(q,\xi)},$$

$$\sum_{r=0}^{p}\frac{1}{r!}\partial_\lambda^r\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar\lambda_0-2i(m-1))\psi^{(p-r,\zeta)}\Big)_{\mathbb{C}}\Big\}=\delta_{\xi,\zeta}\delta_{\varkappa_\xi-k-1,\nu}. \qquad (4.16)$$

Положим

$$\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)v=C'_{\sigma\mu}(D_y)v_\sigma(y)|_{\gamma_\sigma}.$$

Сформулируем основной результат о представлении коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (2.20) в терминах формулы Грина.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2; тогда коэффициенты $c_n^{(k,j)}$ из (2.20) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)}=(f,iv_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)})_{L_2(K)}+$$
$$+\sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m}(g_{\sigma\mu},i\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)v_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)})_{L_2(\gamma_\sigma)}, \qquad (4.17)$$

где $v_n^{(\nu,j)}$ — степенное решение однородной задачи трансмиссии (4.9)—(4.11), *определяемое формулой*

$$v_n^{(\nu,j)}=r^{i\bar\lambda_n+2m-2}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)},$$

причем $\{\psi_n^{(0,j)},\dots,\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}: j=1,\dots,J_n\}$ — каноническая система жордановых цепочек оператор-функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$, отвечающая числу $\bar\lambda_n-2i(m-1)$, а цепочки $\{\varphi_n^{(0,j)},\dots,\varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}: j=1,\dots,J_n\}$ (фигурирующие в (2.21)) *и $\{\psi_n^{(0,j)},\dots,\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}: j=1,\dots,J_n\}$ подчинены условиям* (4.16) *биортогональности и нормировки.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2.1 показывается, что $v_n^{(\nu,j)}$ является решением однородной задачи (4.9)—(4.11) тогда и только тогда, когда $\psi_n^{(0,j)},\dots,\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}$ — жорданова цепочка оператор-функции $\tilde{\mathcal{M}}(\lambda)$, отвечающая числу $\bar\lambda_n-2i(m-1)$.

Далее, имеем

$$\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)v_n^{(\nu,j)}=$$
$$=r^{i\bar\lambda_n+m_{\sigma\mu}-1}\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar\lambda_n-2i(m-1)+rD_r)\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)}=$$

$$= r^{i\bar\lambda_n+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{s=0}^{\nu}\frac{1}{s!}\partial_\lambda^s\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar\lambda_n-2i(m-1))\sum_{q=s}^{\nu}\frac{1}{(q-s)!}(i\ln r)^{q-s}\psi_n^{(\nu-q,j)}.$$

Заменим в последней сумме q на $q+s$:

$$\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)v_n^{(\nu,j)} =$$
$$= r^{i\bar\lambda_n+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{s=0}^{\nu}\frac{1}{s!}\partial_\lambda^s\tilde{\mathcal{C}}'_{\sigma\mu}(\bar\lambda_n-2i(m-1))\sum_{q=0}^{\nu-s}\frac{1}{q!}(i\ln r)^{q}\psi_n^{(\nu-q-s,j)},$$

откуда, меняя порядок суммирования и применяя лемму 4.1, получаем

$$\mathcal{C}'_{\sigma\mu}(D_y)v_n^{(\nu,j)} = r^{i\bar\lambda_n+m_{\sigma\mu}-1}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\chi_{\sigma\mu,n}^{(\nu-q,j)}.$$

Осталось воспользоваться теоремой 4.1, леммой 4.2 и формулой (4.1). $\square$

4. В заключение параграфа рассмотрим асимптотику решений нелокальной задачи в угле со специальной правой частью. Соответствующие специальные правые части возникают при изучении асимптотики решений нелокальных задач в ограниченных областях. Пусть

$$F(\omega,r)=\sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q f^{(q)}(\omega),\quad G_{\sigma\mu}(r)=\sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q g_{\sigma\mu}^{(q)},$$
$$\{f^{(q)},g_{\sigma\mu}^{(q)}\}\in W^l(b_1,b_2)\times\mathbb{C}^{2m}.$$

Пусть Λ — некоторое комплексное число. Если Λ — собственное число оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то обозначим через $\varkappa(\Lambda)$ наибольшую из частных кратностей этого числа; в противном случае положим $\varkappa(\Lambda)=0$.

Лемма 4.3. *Для задачи* (2.1), (2.2) *с правой частью* $\{r^{i\Lambda-2m}F,$ $r^{i\Lambda-m_{\sigma\mu}}G_{\sigma\mu}\}$ *существует решение*

$$u(\omega,r)=r^{i\Lambda}\sum_{q=0}^{M+\varkappa(\Lambda)}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q u^{(q)}(\omega),\tag{4.18}$$

где $u^{(q)}\in W^{l+2m}(b_1,b_2)$. *Решение такого вида единственно, если* $\varkappa(\Lambda)=0$ (*т. е. если* Λ *не является собственным числом* $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$), *а при* $\varkappa(\Lambda)>0$ *решение* (4.18) *определено с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений* (2.19), *отвечающих числу* Λ.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1 работы [14, гл. 3].

Замечание 4.2. Результаты § 2—4 обобщаются на случай системы уравнений, а также на случай произвольного числа нелокальных членов с носителями на различных лучах.

§ 5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

1. При исследовании нелокальных эллиптических задач в плоских областях приходится рассматривать решения не во всей области G, а в $G \setminus \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — конечное множество точек, лежащих как на ∂G, так и строго внутри области G (см. [5, 7]). При этом в окрестности множества $\mathcal{K}$ решения могут иметь степенные особенности, что соответствует условиям согласования. Для исследования асимптотики решений таких задач наряду с результатами § 2—4 используются результаты настоящего параграфа.

Пусть $\mathcal{P}(D_y)$ — однородный собственно эллиптический дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами порядка $2m$.

Введем ограниченный оператор $\mathcal{P} = \mathcal{P}(D_y)\colon H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to H_a^l(\mathbb{R}^2)$. Будем изучать асимптотику решений $u \in H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$\mathcal{P}u = f^{*)}, \tag{5.1}$$

полагая, что $f \in H_a^l(\mathbb{R}^2) \cap H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)$.

Запишем оператор $\mathcal{P}(D_y)$ в полярных координатах: $\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m}\tilde{\mathcal{P}}(\omega, D_\omega, rD_r)$. Коэффициенты оператора $\tilde{\mathcal{P}}(\omega, D_\omega, rD_r)$ как функции ω принадлежат классу $C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$ 2π-периодических бесконечно дифференцируемых функций.

Введем ограниченный оператор

$$\tilde{\mathcal{P}}(\lambda) = \tilde{\mathcal{P}}(\omega, D_\omega, \lambda)\colon W_{2\pi}^{l+2m}(0, 2\pi) \to W_{2\pi}^l(0, 2\pi),$$

где $W_{2\pi}^l(0, 2\pi)$ есть замыкание множества $C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$ в $W^l(0, 2\pi)$.

Из [5, § 1] следует существование конечно-мероморфной оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(\lambda)$, такой, что ее полюса (совпадающие с собственными числами $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$), за исключением, быть может, конечного числа, расположены внутри двойного угла раствора меньше π, содержащего

*) Соотношение (5.1) есть операторная запись уравнения $\mathcal{P}(D_y)u(y) = f(y)$ $(y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

мнимую ось, и для λ, не являющегося ее полюсом, оператор $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(\lambda)$ является ограниченным обратным к оператору $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$. Если прямая $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не содержит полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}^{-1}(\lambda)$, (или, что то же самое, собственных чисел оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$), то в силу работы [5, §1] оператор $\mathcal{P}$ есть изоморфизм.

Используя указанные результаты и повторяя рассуждения работы [14, гл. 3], получим большую часть утверждений данного параграфа.

Теорема 5.1. *Пусть* $f \in H_a^l(\mathbb{R}^2) \cap H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)$, *где* $a > a_1$, *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l - 2m$, $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$. *Если* u *— решение задачи* (5.1) *из пространства* $H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$, *то*

$$u(\omega, r) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J_n} \sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} c_n^{(k,j)} u_n^{(k,j)}(\omega, r) + u_1(\omega, r). \tag{5.2}$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *— собственные числа* $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$, *лежащие в полосе* a_1+1- $-l-2m < \operatorname{Im}\lambda < a+1-l-2m$;

$$u_n^{(k,j)}(\omega, r) = r^{i\lambda_n} \sum_{q=0}^{k} \frac{1}{q!}(i \ln r)^q \varphi_n^{(k-q,j)}(\omega) \text{ —} \tag{5.3}$$

степенные (порядка k*) решения однородной задачи* (5.1);

$$\{\varphi_n^{(0,j)}, \ldots, \varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)} \colon j = 1, \ldots, J_n\} \text{ —}$$

каноническая система жордановых цепочек оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$, *отвечающая собственному числу* λ_n, $n = 1, \ldots, N$; $c_n^{(k,j)}$ *— некоторые постоянные;* u_1 *— решение задачи* (5.1) *из пространства* $H_{a_1}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$.

Замечание 5.1. Так же, как и в случае плоского угла, можно показать, что формула (5.2) верна и тогда, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda =$ $= a+1-l-2m$ есть собственные числа оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$. Мы требуем, чтобы на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не было собственных чисел, так как это условие используется и при получении асимптотики решений сопряженной задачи (см. теорему 5.3).

2. Далее выводятся явные формулы для коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (5.2). Вначале мы вычислим коэффициенты при помощи степенных решений однородного сопряженного уравнения, а затем получим представление коэффициентов в терминах формулы Грина.

Рассмотрим оператор $\mathcal{P}^* \colon H_a^l(\mathbb{R}^2)^* \to H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)^*$, сопряженный с $\mathcal{P}$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^2)$, и оператор $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)\colon W^l_{2\pi}(0,2\pi)^* \to W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)^*$, сопряженный с $\tilde{\mathcal{P}}(\bar\lambda)$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(0,2\pi)$.

Пусть $\bar\lambda_n$ — собственное число оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$ и пусть

$$\{\psi_n^{(0,j)},\dots,\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\colon j=1,\dots,J_n\} \text{ —}$$

жордановы цепочки оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$, отвечающие числу $\bar\lambda_n$ и составляющие каноническую систему. Используя эллиптичность оператора $\tilde{\mathcal{P}}^*(\omega,D_\omega,\lambda)$, метод замороженных коэффициентов, разложение функций $\psi_n^{(\nu,j)}$ в ряд Фурье*) по функциям $e^{ik\omega}/\sqrt{2\pi}$ и равенства типа (3.1), можно показать, что $\psi_n^{(\nu,j)}$ — 2π-периодические бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0,2\pi]$ функции.

Рассмотрим степенные решения (порядка ν)

$$v_n^{(\nu,j)} = r^{i\bar\lambda_n+2m-2}\sum_{q=0}^{\nu}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\psi_n^{(\nu-q,j)}, \quad \nu=0,\dots,\varkappa_{j,n}-1, \tag{5.4}$$

уравнения $\mathcal{P}^*v=0$, отвечающие собственному числу $\bar\lambda_n$ оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1; *тогда коэффициенты* $c_n^{(k,j)}$ *из* (5.2) *вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)} = (f, iv_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)})_{L_2(\mathbb{R}^2)}, \tag{5.5}$$

где $v_n^{(\nu,j)}$ *определены равенствами* (5.4), *причем жордановы цепочки* $\{\varphi_n^{(0,j)},\dots,\varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\colon j=1,\dots,J_n\}$ *и* $\{\psi_n^{(0,j)},\dots,\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\colon j = 1,\dots,J_n\}$, *фигурирующие в* (5.3) *и* (5.4), *подчинены условиям биортогональности и нормировки*

$$\sum_{p=0}^{\nu}\sum_{q=0}^{k}\frac{1}{(\nu+k+1-p-q)!}(\partial_\lambda^{\nu+k+1-p-q}\tilde{\mathcal{P}}(\lambda_n)\varphi^{(q,\xi)},\psi^{(p,\zeta)})_{L_2(0,2\pi)} = \delta_{\xi,\zeta}\delta_{\varkappa_{\xi,n}-k-1,\nu},$$

где $\zeta,\xi=1,\dots,J_n$; $\nu=0,\dots,\varkappa_{\zeta,n}-1$; $k=0,\dots,\varkappa_{\xi,n}-1$.

---

*) Возможность разложить распределение $\psi\in W^l_{2\pi}(0,2\pi)^*$ в ряд Фурье по функциям $e_k(\omega)=e^{ik\omega}/\sqrt{2\pi}$ оправдывается следующими равенствами: $\langle u,\psi\rangle = \left\langle \sum_k (u,e_k)_{L_2(0,2\pi)}e_k,\psi\right\rangle = \left(u,\sum_k \psi_k e_k\right)_{L_2(0,2\pi)}$, где $u\in W^l_{2\pi}(0,2\pi)$, $\psi_k=\overline{\langle e_k,\psi\rangle}$.

Замечание 5.2. Так как функции $\psi_n^{(\nu,j)}$ бесконечно дифференцируемы, из равенств (5.4) и (5.5) вытекает, что если $f \in H_a^l(\mathbb{R}^2) \cap \cap H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)$ и $a_1 + 1 - l - 2m < \operatorname{Im}\lambda_n < a + 1 - l - 2m$, то имеет место оценка

$$|c_n^{(k,j)}| \leqslant c(\|f\|_{H_a^l(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)}).$$

Из теорем 5.1, 5.2 и соображений двойственности получается следующий результат об асимптотике решений сопряженной задачи

$$\mathcal{P}^* v = \Psi \tag{5.6}$$

(ср. с теоремой 4.2).

Теорема 5.3. *Пусть* $\Psi \in H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)^* \cap H_{a_1}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)^*$, *где* $a > a_1$, *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l - 2m$, $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *свободны от спектра оператор-функции* $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$. *Если* v — *решение задачи* (4.3) *из пространства* $H_{a_1}^l(\mathbb{R}^2)^*$, *то*

$$v = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J_n} \sum_{k=0}^{\varkappa_{j,n}-1} d_n^{(k,j)} v_n^{(k,j)} + V. \tag{5.7}$$

Здесь $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — *собственные числа* $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$, *лежащие в полосе* $a_1 + + 1 - l - 2m < \operatorname{Im}\lambda < a + 1 - l - 2m$; $v_n^{(k,j)}$ — *векторы, определенные формулой* (5.4); $d_n^{(k,j)}$ — *некоторые постоянные;* V — *решение задачи* (5.6) *из пространства* $H_a^l(\mathbb{R}^2)^*$.

Формула вида (5.7), так же как и формула вида (4.4), применяется при изучении нелокальных задач в ограниченных областях.

3. Рассмотрим формулу Грина для локальных эллиптических задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Очевидно, что для любых функций $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ имеет место формула Грина

$$(\mathcal{P}(D_y)u, v)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = (u, \mathcal{P}^*(D_y)v)_{L_2(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.8}$$

Формула (5.8) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (5.1):

$$\mathcal{P}^*(D_y)v = f(y) \quad (y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}). \tag{5.9}$$

Далее, нетрудно показать, что для любых функций $\tilde{u} \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$, $\tilde{v} \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$ имеет место следующая формула Грина с параметром λ:

$$(\tilde{\mathcal{P}}(\omega, D_\omega, \lambda)\tilde{u}, \tilde{v})_{L_2(0,2\pi)} = (\tilde{u}, \tilde{\mathcal{P}}^*(\omega, D_\omega, \lambda')\tilde{v})_{L_2(0,2\pi)}, \tag{5.10}$$

где $\lambda' = \bar{\lambda} - 2i(m-1)$.

Формула (5.10) порождает оператор

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda)=\tilde{\mathcal{P}}^*(\omega,D_\omega,\lambda)\colon W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)\to W^{l}_{2\pi}(0,2\pi).$$

При помощи формулы Грина (5.10) и соотношений типа (3.1) устанавливается связь между жордановыми цепочками оператор-функций $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda)$.

Лемма 5.1. *Векторы $\psi^{(0)},\dots,\psi^{(\varkappa-1)}$ образуют жорданову цепочку оператора $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$, отвечающую собственному числу $\bar\lambda_0$, тогда и только тогда, когда они образуют жорданову цепочку оператора $\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda)$, отвечающую собственному числу $\bar\lambda_0-2i(m-1)$.*

Наконец, используя лемму 5.1, сформулируем основной результат о представлении коэффициентов $c_n^{(k,j)}$ в асимптотической формуле (5.2) в терминах формулы Грина.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1; тогда коэффициенты $c_n^{(k,j)}$ из (5.2) вычисляются по формулам*

$$c_n^{(k,j)}=(f,iv_n^{(\varkappa_{j,n}-k-1,j)})_{L_2(\mathbb{R}^2)},\tag{5.11}$$

где $v_n^{(\nu,j)}$ — степенное решение однородной задачи (5.9), определяемое формулой (5.4), причем $\{\psi_n^{(0,j)},\dots,\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\colon j=1,\dots,J_n\}$ — каноническая система жордановых цепочек оператор-функции $\tilde{\mathcal{Q}}(\lambda)$, отвечающая числу $\bar\lambda_n-2i(m-1)$, а цепочки $\{\varphi_n^{(0,j)},\dots,\varphi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\colon j=1,\dots,J_n\}$ (фигурирующие в (5.3)) и $\{\psi_n^{(0,j)},\dots,\psi_n^{(\varkappa_{j,n}-1,j)}\colon j=1,\dots,J_n\}$ подчинены условиям биортогональности и нормировки из теоремы 5.2.

4. При исследовании асимптотики решений нелокальных задач в ограниченных областях нам потребуется результат об асимптотике решений сопряженной локальной задачи в $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ со специальной правой частью. Обратим внимание на отличие от модельной задачи в угле, где нужен результат об асимптотике решений исходной (а не сопряженной) задачи со специальной правой частью.

Пусть Λ — некоторое комплексное число. Если $\bar\Lambda$ — собственное число оператор-функции $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$, то обозначим через $\varkappa(\bar\Lambda)$ наибольшую из частных кратностей этого числа; в противном случае положим $\varkappa(\bar\Lambda)=0$.

Лемма 5.2. *Для задачи (5.9) с правой частью*

$$\Psi=r^{i\bar\Lambda-2}\sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\Psi^{(q)},\quad \Psi^{(q)}\in W^{l+2m}_{2\pi}(0,2\pi)^*,$$

существует решение

$$v = r^{i\bar\Lambda+2m-2} \sum_{q=0}^{M+\varkappa(\bar\Lambda)} \frac{1}{q!}(i\ln r)^q v^{(q)}, \tag{5.12}$$

где $v^{(q)} \in W^l_{2\pi}(0,2\pi)^*$. *Решение такого вида единственно, если* $\varkappa(\bar\Lambda)=0$ (*т. е. если* $\bar\Lambda$ *не является собственным числом* $\tilde{\mathcal{P}}^*(\lambda)$), *а при* $\varkappa(\bar\Lambda)>0$ *решение* (5.12) *определено с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений* (5.4), *отвечающих числу* $\bar\Lambda$.

Доказательство. Доказательство идейно аналогично доказательству леммы 3.1 работы [14, гл. 3]. Для полноты картины приведем его схему. Необходимо подставить формулу (5.12) для искомого решения в уравнение

$$\mathcal{P}^*v = r^{i\bar\Lambda-2}\sum_{q=0}^{M}\frac{1}{q!}(i\ln r)^q\Psi^{(q)},$$

сократить слева и справа множитель $r^{i\bar\Lambda-2}$ и собрать коэффициенты при одинаковых степенях $i\ln r$. В результате получится система $M+\varkappa(\bar\Lambda)$ уравнений, из которой и определяются неизвестные $v^{(q)}$. Утверждение о том, что решение вида (5.12) единственно, если $\varkappa(\bar\Lambda)=0$, или определено с точностью до произвольной линейной комбинации степенных решений (5.4), отвечающих числу $\bar\Lambda$, если $\varkappa(\bar\Lambda)>0$, следует из результата, аналогичного лемме 1.3 работы [14, гл. 3], который ограничивает произвол в выборе степенных решений уравнения $\mathcal{P}^*v=0$. $\square$

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данном приложении мы установим две вспомогательные леммы о гладкости решений указанных задач. Эти леммы используются для доказательства гладкости собственных и присоединенных векторов нелокальных задач.

Пусть $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$, $\tilde B_{\sigma\mu}(\lambda)$, $\tilde B^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda)$, $\tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)$ — дифференциальные операторы, определенные в § 2. Рассмотрим оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda) = \{\tilde{\mathcal{P}}(\lambda), \tilde{\mathcal{B}}_{\sigma\mu}(\lambda)\} \colon W^{l+2m}(b_1,b_2) \to \\ \to W^l[b_1,b_2] = W^l(b_1,b_2)\times\mathbb{C}^{2m}.$$

Исследуем гладкость решений нелокальной задачи

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda)u = \{f, g_{\sigma\mu}\}. \tag{A.1}$$

Лемма A.1. *Пусть* $u \in W^{l+2m}(b_1, b_2)$ — *решение задачи* (A.1) *с правой частью* $\{f, g_{\sigma\mu}\} \in W^{l+k}[b_1, b_2]$; *тогда* $u \in W^{l+2m+k}(b_1, b_2)$.

Доказательство. Функция $u(\omega)$ является решением задачи

$$\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)u(\omega) = f(\omega) \quad (\omega \in (b_1, b_2)),$$
$$\tilde{B}_{\sigma\mu}(\lambda)u(\omega)\big|_{\omega=b_\sigma} = \tilde{g}_{\sigma\mu}, \quad \sigma = 1, 2; \quad \mu = 1, \dots, m,$$

где $\tilde{g}_{\sigma\mu} = g_{\sigma\mu} - \beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda)u(\omega + \omega_\sigma, \lambda)\big|_{\omega=b_\sigma} \in \mathbb{C}$. Следовательно, применяя теорему 5.1 работы [16, гл. 2], получаем $u \in W^{l+2m+k}(b_1, b_2)$. □

Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)\colon W^l[b_1, b_2]^* \to W^{l+2m}(b_1, b_2)^*$, сопряженный с оператором $\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\bar{\lambda})$ относительно расширения скалярного произведения в $L_2(b_1, b_2) \times \mathbb{C}^{2m}$ (см. § 3).

Исследуем гладкость решений сопряженной нелокальной задачи

$$\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)\{v, w_{\sigma\mu}\} = \Psi. \tag{A.2}$$

Лемма A.2. *Пусть* $\{v, w_{\sigma\mu}\} \in W^l[b_1, b_2]^*$ — *решение задачи* (A.2) *с правой частью*

$$\Psi \in \begin{cases} W^{2m-k}(b_1, b_2)^*, & \text{если } 0 < k < 2m, \\ W^{-2m+k}(b_1, b) \oplus W^{-2m+k}(b, b_2), & \text{если } k \geqslant 2m. \end{cases}$$

Тогда $v \in W^k(b_1, b) \oplus W^k(b, b_2)$.

Доказательство. 1. Пусть вначале $l = 0$. Обозначим $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda)$, $\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda) = \tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda)$.

а) Введем вспомогательный оператор $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)\colon L_2(b_1, b_2) \times \mathbb{C}^{2m} \times \mathbb{C}^{2m} \to W^{2m}(b_1, b_2)^*$, действующий на $\{v, w_{\sigma\mu}, w'_{\sigma\mu}\}$ по формуле

$$\langle u, \tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)\{v, w_{\sigma\mu}, w'_{\sigma\mu}\}\rangle = (\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)u, v)_{L_2(b_1, b_2)} +$$
$$+ \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m} \tilde{B}_{\sigma\mu}(\lambda)u\big|_{\omega=b_\sigma} \cdot \overline{w_{\sigma\mu}} + \sum_{\sigma=1,2}\sum_{\mu=1}^{m} \beta_\sigma^{-m_{\sigma\mu}+i\lambda}\tilde{B}^{\mathcal{G}}_{\sigma\mu}(\lambda)u\big|_{\omega=b} \cdot \overline{w'_{\sigma\mu}}$$
$$\text{для всех } u \in W^{2m}(b_1, b_2).$$

Очевидно,

$$\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)\{v, w_{\sigma\mu}, w_{\sigma\mu}\} = \tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)\{v, w_{\sigma\mu}\}.$$

Введем бесконечно дифференцируемые функции $\zeta_\sigma(\omega)$ $(\sigma=1,2)$, $\zeta(\omega)$,

$$\zeta_\sigma(\omega)=1 \text{ при } |b_\sigma-\omega|<\frac{|b_\sigma-b|}{4},\quad \zeta_\sigma(\omega)=0 \text{ при } |b_\sigma-\omega|>\frac{|b_\sigma-b|}{2};$$
$$\zeta(\omega)=1-\zeta_1(\omega)-\zeta_2(\omega).$$

b) Положим $k=1$. Рассмотрим выражение $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta_1\{v,w_{\sigma\mu},w_{\sigma\mu}\})$. Имеем

$$\langle u,\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta_1\{v,w_{\sigma\mu},w_{\sigma\mu}\})\rangle=(\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)u,\zeta_1 v)_{L_2(b_1,b_2)}+$$
$$+\sum_{\mu=1}^{m}\tilde{B}_{1\mu}(\lambda)u\big|_{\omega=b_1}\cdot\overline{w_{1\mu}} \text{ для всех } u\in W^{2m}(b_1,b_2).$$

Таким образом, умножая $\{v,w_{\sigma\mu},w_{\sigma\mu}\}$ на срезающую функцию ζ_1 (равную нулю вблизи точек b, b_2), мы «зануляем» нелокальные слагаемые в операторе $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)$ и в результате получаем оператор, сопряженный к оператору «локальной» краевой задачи.

Кроме того, из формулы Лейбница следует, что

$$\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta_1\{v,w_{\sigma\mu},w_{\sigma\mu}\})\in W^{2m-1}(b_1,b_2)^*,$$

так как (при $k=1$)

$$\zeta_1\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)\{v,w_{\sigma\mu},w_{\sigma\mu}\}=\zeta_1\tilde{\mathcal{L}}^*(\lambda)\{v,w_{\sigma\mu}\}\in W^{2m-1}(b_1,b_2)^*,$$

а $v\in L_2(b_1,b_2)$. Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой 5.1 работы [16, гл. 2] и получить $\zeta_1 v\in W^1(b_1,b_2)$.

Аналогично $\zeta_2 v\in W^1(b_1,b_2)$.

c) Рассмотрим выражение $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta\{v,w_{\sigma\mu},w_{\sigma\mu}\})$. Имеем

$$\langle u,\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta\{v,w_{\sigma\mu},w_{\sigma\mu}\})\rangle=(\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)u,\zeta v)_{L_2(-\infty,b)}$$
$$\text{для всех } u\in C_0^\infty(-\infty,b),$$

где $v(\omega)$ продолжена нулем при $\omega\leqslant b_1$. Таким образом, умножая $\{v,w_{\sigma\mu},w_{\sigma\mu}\}$ на срезающую функцию ζ (равную нулю вблизи точек b_1, b_2) и рассматривая в качестве пробных функции $u\in C_0^\infty(-\infty,b)$, мы «зануляем» как краевые, так, соответственно, и нелокальные слагаемые в операторе $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)$, получая в результате задачу на полупрямой.

Аналогично предыдущему получаем, что $\tilde{\mathcal{L}}^*_{\mathcal{G}}(\lambda)(\zeta\{v, w_{\sigma\mu}, w_{\sigma\mu}\}) \in W^{-2m+1}(-\infty, b)$*). Отсюда, из эллиптичности оператора $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda)$ и соотношения $v \in L_2(-\infty, b)$ вытекает, что обобщенная производная $\frac{d^{2m}(\zeta v)}{d\omega^{2m}}$ принадлежит пространству $W^{-2m+1}(-\infty, b)$. Следовательно, по лемме 12.3 работы [16, гл. 1] $\zeta v \in W^1(-\infty, b)$. Аналогично доказывается, что $\zeta v \in W^1(b, +\infty)$, а это совместно с п. 2 доказательства дает $v \in W^1(b_1, b) \oplus W^1(b, b_2)$.

Повторяя описанную процедуру, за конечное число шагов получим, что $v \in W^k(b_1, b) \oplus W^k(b, b_2)$.

2. Наконец, рассмотрим случай произвольного $l \geqslant 0$. Из леммы A.1 следует, что

$$\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda)) = \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda)) \cap W^l[b_1, b_2]. \tag{A.3}$$

Кроме того, по лемме 2.1 работы [6] $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda))$ замкнут, а $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda))$ конечна. Отсюда и из (A.3) следует, что вложение $W^l[b_1, b_2]$ в $W^0[b_1, b_2]$ индуцирует изоморфизм между фактор-пространствами $W^l[b_1, b_2]/\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda))$ и $W^0[b_1, b_2]/\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda))$.

Таким образом, $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda))$, а значит, $\dim \ker(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)) = \dim \ker(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda))$. Отсюда и из очевидного вложения $\ker(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda)) \subset \ker(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda))$ получаем, что $\ker(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)) = \ker(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda))$.

Далее, поскольку $\Psi \in \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda))$,

$$\langle u, \Psi \rangle = 0 \text{ для всех } u \in \ker(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda)).$$

Но из леммы A.1 вытекает, что $\ker(\tilde{\mathcal{L}}_{(l)}(\lambda)) = \ker(\tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda))$; поэтому

$$\langle u, \Psi \rangle = 0 \text{ для всех } u \in \ker(\tilde{\mathcal{L}}_{(0)}(\lambda)).$$

Следовательно, $\Psi \in \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda))$, так как $\Psi \in W^{2m}(b_1, b_2)^*$ по предположению. Пусть $\{f, g_{\sigma\mu}\} \in W^0[b_1, b_2]^* = W^0[b_1, b_2]$ — некоторое решение задачи $\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda)\{f, g_{\sigma\mu}\} = \Psi$. По доказанному $f \in W^k(b_1, b) \oplus W^k(b, b_2)$.

Очевидно, $\{f, g_{\sigma\mu}\}$ является также решением задачи

$$\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)\{f, g_{\sigma\mu}\} = \Psi;$$

---

*) $W^{-s}(-\infty, b)$, $s \geqslant 0$, есть пространство, сопряженное с $\mathring{W}^s(-\infty, b)$, где $\mathring{W}^s(-\infty, b)$ — замыкание множества $C_0^\infty(-\infty, b)$ по норме $\|u\| = \Big(\sum\limits_{j=0}^{s} \int\limits_{-\infty}^{b} \big| \frac{d^j u}{d\omega^j} \big|^2 \, d\omega \Big)^{1/2}$.

следовательно,

$$\{v, w_{\sigma\mu}\} - \{f, g_{\sigma\mu}\} \in \ker(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(l)}(\lambda)) = \ker(\tilde{\mathcal{L}}^*_{(0)}(\lambda)).$$

Значит, v также принадлежит $W^k(b_1, b) \oplus W^k(b, b_2)$. □

Автор выражает глубокую благодарность А. Л. Скубачевскому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleman T.* Sur la théorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. Bd. 1. S. 132—151.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739—740.
3. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel etc.: Birkhäuser, 1997.
4. *Бицадзе А. В.* Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций // ДАН СССР. 1985. Т. 280, № 3. С. 521—524.
5. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Мат. сб. 1986. Т. 129 (171), № 2. С. 279—302.
6. *Скубачевский А. Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 120—131.
7. *Скубачевский А. Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Там же. 1991. Т. 27, № 1. С. 128—139.
8. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 1. С. 121—160.
9. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209—292.
10. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38, вып. 2 (230). С. 3—75.
11. *Skubachevskii A. L.* Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem // Russ. J. Math. Physics. 2001. V. 8. P. 365—374.
12. *Gurevich P. L.* Nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles and the Green formula // Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Math. Inst. Univ. Giessen, Germany. 2001. Heft. 247. P. 1—74.
13. *Гуревич П. Л.* Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах и формула Грина // ДАН. 2001. Т. 379, № 6. С. 735—738.

14. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.

15. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. 1975. Т. 58. С. 110—128.

16. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

17. *Гохберг И. Ц., Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. Т. 84 (126), № 4. С. 607—629.