ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2008, т. 260, с. 164–179

УДК 517.9+519.217.4

О существовании полугруппы Феллера с атомарной мерой в нелокальном краевом условии[1]

©2008 г. П. Л. Гуревич[2]

Поступило в июле 2007 г.

Исследуется существование полугрупп Феллера, возникающих в теории многомерных диффузионных процессов. Рассматривается эллиптический оператор второго порядка в плоской ограниченной области G, заданный на непрерывных функциях, удовлетворяющих нелокальному условию на границе области. В общем случае нелокальное слагаемое представляет собой интеграл от функции по замыканию области относительно неотрицательной борелевской меры $\mu(y, d\eta)$, $y \in \partial G$. Для случая атомарной меры без предположения ее малости доказано, что оператор является генератором полугруппы Феллера.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В работах [9, 10] показано, что всякому одномерному диффузионному процессу соответствует некоторая сильно непрерывная сжимающая неотрицательная полугруппа операторов, действующих в пространстве непрерывных функций (*полугруппа Феллера*), а также получен общий вид генератора (инфинитезимального производящего оператора) полугруппы и описаны в точности все возможные краевые условия, задающие его область определения.

В многомерном случае общий вид генератора полугруппы Феллера был получен в работе [1]. Было доказано, что генератор полугруппы Феллера есть эллиптический дифференциальный оператор второго порядка (возможно, с вырождением), область определения которого состоит из непрерывных функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Нелокальное слагаемое представляет собой интеграл от функции по замыканию области G относительно неотрицательной борелевской меры $\mu(y, d\eta)$, $y \in \partial G$.

Следующая задача остается в многомерном случае нерешенной. Пусть задан эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, область определения которого описывается нелокальным краевым условием общего вида [1]. Будет ли такой оператор (или его замыкание) генератором полугруппы Феллера?

Различают два класса нелокальных краевых условий: так называемые *трансверсальные* и *нетрансверсальные*. В трансверсальном случае порядок нелокальных членов меньше порядка локальных, тогда как в нетрансверсальном порядки совпадают. Трансверсальный случай рассматривался в работах [8, 14, 15, 17–19]. В работах [2, 6, 11, 16] был предложен метод изучения более сложного — нетрансверсального — случая. В цитированных работах получены достаточные условия на коэффициенты и борелевскую меру в нелокальном краевом условии, гарантирующие существование полугруппы Феллера.

В [2, 11] изучены краевые условия в случае, когда мера $\mu(y, \overline{G})$ (после соответствующей нормировки) меньше единицы. В настоящей работе мы исследуем *нетрансверсальные* нелокальные условия, заданные на границе плоской ограниченной области G, допуская "предельный случай", когда мера $\mu(y, \overline{G})$ может равняться единице (больше единицы она быть не может [1]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00268) и фонда им. Александра фон Гумбольдта.

[2]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
E-mail: gurevichp@yandex.ru

Рассматривается модельный случай, когда мера $\mu(y,d\eta)$ атомарна и отлична от нуля лишь для y из некоторой ε-окрестности множества $\mathcal{K}\subset\partial G$, состоящего из конечного числа точек.

Используя теоремы о разрешимости эллиптических уравнений с нелокальными краевыми условиями в весовых пространствах В.А. Кондратьева [4], асимптотику решений вблизи точек сопряжения [3] (точек множества $\mathcal{K}$) и принцип максимума, мы исследуем разрешимость нелокальных задач в пространствах непрерывных функций (см. разд. 2–4). Применяя эти результаты и теорему Хилле–Иосиды, в разд. 5 мы доказываем, что эллиптический оператор с указанными нелокальными краевыми условиями является генератором полугруппы Феллера.

В заключение этого раздела напомним понятия полугруппы Феллера и ее генератора и сформулируем теорему Хилле–Иосиды в удобном для нас виде.

Пусть $G\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей ∂G. Пусть X — замкнутое подпространство в $C(\overline{G})$, содержащее по крайней мере одну неотрицательную функцию.

Сильно непрерывная полугруппа операторов $\mathbf{T}_t\colon X\to X$ называется *полугруппой Феллера на* X, если

1) $\|\mathbf{T}_t\|\le 1$, $t\ge 0$;
2) $\mathbf{T}_t u\ge 0$ для всех $t\ge 0$ и $u\in X$, $u\ge 0$.

Линейный оператор $\mathbf{P}\colon \mathrm{D}(\mathbf{P})\subset X\to X$ называется *генератором* (*инфинитезимальным производящим оператором*) сильно непрерывной полугруппы $\{\mathbf{T}_t\}$, если

$$\mathbf{P}u=\lim_{t\to+0}(\mathbf{T}_t u-u)/t,\qquad \mathrm{D}(\mathbf{P})=\bigl\{u\in X\colon \text{ предел в } X \text{ существует}\bigr\}.$$

Теорема 1.1 (теорема Хилле–Иосиды, см. теорему 9.3.1 в [17]). 1. *Пусть* $\mathbf{P}\colon \mathrm{D}(\mathbf{P})\subset X\to X$ — *генератор полугруппы Феллера на* X. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Область определения* $\mathrm{D}(\mathbf{P})$ *плотна в* X.

(b) *Для любого* $q>0$ *оператор* $q\mathbf{I}-\mathbf{P}$ *имеет ограниченный обратный* $(q\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\colon X\to X$ *и* $\|(q\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\|\le 1/q$.

(c) *Оператор* $(q\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\colon X\to X$, $q>0$, *неотрицательный.*

2. *Если* $\mathbf{P}$ — *линейный оператор из* X *в* X, *удовлетворяющий условию* (a), *и существует такая константа* $q_1\ge 0$, *что условия* (b) *и* (c) *выполнены при* $q>q_1$, *то* $\mathbf{P}$ — *генератор некоторой полугруппы Феллера на* X, *которая однозначно определена оператором* $\mathbf{P}$.

2. ПОСТАНОВКА НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Пусть $G\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей ∂G. Рассмотрим множество $\mathcal{K}\subset\partial G$, состоящее из конечного числа точек. Пусть $\partial G\setminus\mathcal{K}=\bigcup_{i=1}^N\Gamma_i$, где Γ_i — открытые (в топологии ∂G) кривые класса C^∞. Предположим, что область G совпадает с плоским углом в некоторой окрестности каждой точки $g\in\mathcal{K}$.

Для целых $k\ge 0$ обозначим через $W_2^k(G)$ пространство Соболева. Через $W_{2,\mathrm{loc}}^k(G)$ обозначим множество таких функций u, что $u\in W_2^k(G')$ для любой области G', $\overline{G'}\subset G$.

Если $\mathcal{X}$ — область в $\mathbb{R}^2$, обозначим через $C_0^\infty(\mathcal{X})$ множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{\mathcal{X}}$ функций с компактным носителем в $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{M}\subset\mathcal{X}$, то через $C_0^\infty(\overline{\mathcal{X}}\setminus\mathcal{M})$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{\mathcal{X}}$ функций с компактным носителем в $\overline{\mathcal{X}}\setminus\mathcal{M}$.

Наряду с пространствами Соболева будем использовать весовые пространства Кондратьева. Пусть $Q=\{y\in\mathbb{R}^2\colon r>0,\ |\omega|<\omega_0\}$, или $Q=\{y\in\mathbb{R}^2\colon 0<r<d,\ |\omega|<\omega_0\}$, $0<\omega_0<\pi$, $d>0$, или $Q=G$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество $\{0\}$ в первом и втором случаях и множество $\mathcal{K}$ в третьем случае. Введем пространство $H_a^k(Q)=H_a^k(Q,\mathcal{M})$ как пополнение множества

$C_0^\infty(\overline{Q}\setminus\mathcal{M})$ по норме

$$\|u\|_{H_a^k(Q)}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\int\limits_Q \rho^{2(a+|\alpha|-k)}|D^\alpha u(y)|^2\,dy\right)^{1/2},$$

где $a\in\mathbb{R}$, $k\ge 0$ — целое и $\rho=\rho(y)=\operatorname{dist}(y,\mathcal{M})$. Для целых $k\ge 1$ обозначим через $H_a^{k-1/2}(\Gamma)=$ $=H_a^{k-1/2}(\Gamma,\mathcal{M})$ пространство следов на гладкой кривой $\Gamma\subset\overline{Q}$ (с инфимум-нормой).

Пусть $p_{jk},p_j\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — вещественнозначные функции, и пусть $p_{jk}=p_{kj}$, $j,k=1,2$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Pu=\sum_{j,k=1}^2 p_{jk}(y)u_{y_jy_k}(y)+\sum_{j=1}^2 p_j(y)u_{y_j}(y)+p_0(y)u(y). \tag{2.1}$$

Условие 2.1. 1. Существует такая константа $c_0>0$, что $\sum_{j,k=1}^2 p_{jk}(y)\xi_j\xi_k\ge c_0|\xi|^2$ для $y\in\overline{G}$ и $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$.

2. $p_0(y)\le 0$, $y\in\overline{G}$.

Введем операторы, соответствующие нелокальным членам с носителем вблизи множества $\mathcal{K}$. Для любого множества $\mathcal{M}$ будем обозначать через $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{M})$ его ε-окрестность. Пусть Ω_{is} $(i=1,\dots,N,\ s=1,\dots,S_i)$ — диффеоморфизмы класса C^∞, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_i$ кривой $\overline{\Gamma_i\cap\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})}$ на множество $\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ так, что $\Omega_{is}(\Gamma_i\cap\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}))\subset G$ и $\Omega_{is}(g)\in\mathcal{K}$ для $g\in\overline{\Gamma}_i\cap\mathcal{K}$. Таким образом, преобразования Ω_{is} отображают кривые $\Gamma_i\cap\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ внутрь области G, а множество концевых точек $\overline{\Gamma}_i\cap\mathcal{K}$ в себя.

Обозначим через Ω_{is}^{+1} преобразование $\Omega_{is}\colon\mathcal{O}_i\to\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$, а через $\Omega_{is}^{-1}\colon\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)\to\mathcal{O}_i$ обратное преобразование. Множество точек $\Omega_{i_qs_q}^{\pm1}(\dots(\Omega_{i_1s_1}^{\pm1}(g))\dots)\in\mathcal{K}$ $(1\le s_j\le S_{i_j},\ j=1,\dots,q)$ назовем *орбитой* точки $g\in\mathcal{K}$. Другими словами, орбита точки $g\in\mathcal{K}$ образована точками (из множества $\mathcal{K}$), которые получаются из g последовательным применением преобразований $\Omega_{i_js_j}^{\pm1}$.

Множество $\mathcal{K}$ состоит из конечного числа непересекающихся орбит, которые обозначим $\mathcal{K}_\nu$, $\nu=1,\dots,N_0$. Зафиксируем произвольную орбиту $\mathcal{K}_\nu$ и предположим, что она состоит из точек[3] g_j, $j=1,\dots,N_\nu$.

Выберем такое достаточно малое $\varepsilon>0$, чтобы существовали окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$, $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)\supset$ $\supset\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) область G совпадает с плоским углом в окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$;
2) $\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g)}\cap\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(h)}=\varnothing$ для всех $g,h\in\mathcal{K}$, $g\ne h$;
3) если $g_j\in\overline{\Gamma}_i$ и $\Omega_{is}(g_j)=g_k$, то $\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\subset\mathcal{O}_i$ и $\Omega_{is}(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j))\subset\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$.

Для каждой точки $g_j\in\overline{\Gamma}_i\cap\mathcal{K}_\nu$ зафиксируем линейное преобразование $Y_j\colon y\mapsto y'(g_j)$ (композицию операторов сдвига на вектор $-\overrightarrow{Og_j}$ и поворота), отображающее точку g_j в начало координат таким образом, что $Y_j(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j))=\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$, $Y_j(G\cap\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j))=K_j\cap\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$, $Y_j(\Gamma_i\cap\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j))=\gamma_{j\sigma}\cap\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$ $(\sigma=1$ или $2)$, где

$$K_j=\{y\in\mathbb{R}^2\colon\ r>0,\ |\omega|<\omega_j\},\qquad \gamma_{j\sigma}=\{y\in\mathbb{R}^2\colon\ r>0,\ \omega=(-1)^\sigma\omega_j\}, \tag{2.2}$$

ω,r — полярные координаты, $0<\omega_j<\pi$. Без ограничения общности считаем, что главная однородная часть оператора P в точке g_j совпадает в новых координатах y' с оператором Лапласа.

[3]Точки g_j и другие объекты (см. ниже), относящиеся к орбите $\mathcal{K}_\nu$, зависят от ν. Однако, чтобы избежать излишне громоздких обозначений, мы не будем явно указывать эту зависимость.

Условие 2.2. Пусть $g_j \in \overline{\Gamma}_i \cap \mathcal{K}_\nu$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k \in \mathcal{K}_\nu$; тогда преобразование $Y_k \circ \Omega_{is} \circ Y_j^{-1}\colon \mathcal{O}_\varepsilon(0) \to \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$ есть композиция операторов поворота и гомотетии.

Введем нелокальные операторы $\mathbf{B}_i u = \sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y) u(\Omega_{is}(y))$ для $y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ и $\mathbf{B}_i u = 0$ для $y \in \Gamma_i \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$, где $b_{is} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — вещественнозначные функции, $\operatorname{supp} b_{is} \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$.

Условие 2.3. Имеют место следующие соотношения:

$$b_{is}(y) \ge 0, \qquad \sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y) \le 1, \qquad y \in \overline{\Gamma}_i, \tag{2.3}$$

$$\sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(g) + \sum_{s=1}^{S_j} b_{js}(g) < 2, \qquad g \in \overline{\Gamma}_i \cap \overline{\Gamma}_j \subset \mathcal{K}, \qquad \text{если} \ \ i \ne j \ \ \text{и} \ \ \overline{\Gamma}_i \cap \overline{\Gamma}_j \ne \varnothing. \tag{2.4}$$

Будем изучать нелокальную задачу

$$Pu - qu = f(y), \quad y \in G, \qquad u|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i u = 0, \quad y \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.5}$$

где $q \ge 0$, и ту же задачу, но с неоднородными нелокальными условиями. Прежде чем рассматривать задачу (2.5) в пространствах непрерывных функций, изучим ее в весовых пространствах.

В дальнейшем потребуются нормы в весовых пространствах, зависящие от параметра $q > 0$. Положим

$$|||u|||_{H_a^k(G)} = \Big(\|u\|^2_{H_a^k(G)} + q^k \|u\|^2_{H_a^0(G)} \Big)^{1/2}, \qquad k \ge 0,$$

$$|||v|||_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_i)} = \Big(\|v\|^2_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_i)} + q^{k-1/2} \|v\|^2_{H_a^0(\Gamma_i)} \Big)^{1/2}, \qquad k \ge 1,$$

где $\|v\|_{H_a^0(\Gamma_i)} = \big(\int_{\Gamma_i} \rho^{2a} |v(y)|^2 \, d\Gamma \big)^{1/2}$. Введем также следующие пространства:

$$\mathcal{H}_a^{k+3/2}(\partial G) = \prod_{i=1}^N H_a^{k+3/2}(\Gamma_i), \qquad |||\psi|||_{\mathcal{H}_a^{k+3/2}(\partial G)} = \left(\sum_{i=1}^N |||\psi_i|||^2_{H_a^{k+3/2}(\Gamma_i)} \right)^{1/2}, \qquad \psi = \{\psi_i\},$$

$$\mathcal{H}_a^k(G, \partial G) = H_a^k(G) \times \mathcal{H}_a^{k+3/2}(\partial G), \qquad |||(f,\psi)|||_{\mathcal{H}_a^k(G,\partial G)} = \Big(|||f|||^2_{H_a^k(G)} + |||\psi|||^2_{\mathcal{H}_a^{k+3/2}(\partial G)} \Big)^{1/2}.$$

Рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathbf{L}(q)\colon \ H^{k+2}_{k+1-\delta}(G) \to \mathcal{H}^k_{k+1-\delta}(G, \partial G), \qquad \mathbf{L}(q)u = \big\{ Pu - qu, \, u|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i u \big\}, \qquad q \ge 0.$$

В разд. 3 будет доказан следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3, *и пусть* $k \ge 0$ *фиксировано. Тогда существует число* $\delta_1 > 0$, *обладающее следующим свойством*: *для любого* $\delta \in [0, \delta_1]$ *найдется такое* $q_1 = q_1(\delta) > 0$, *что оператор* $\mathbf{L}(q)$ *имеет ограниченный обратный при* $q \ge q_1$ *и*

$$c |||\mathbf{L}(q)u|||_{\mathcal{H}^k_{k+1-\delta}(G,\partial G)} \le |||u|||_{H^{k+2}_{k+1-\delta}(G)} \le C |||\mathbf{L}(q)u|||_{\mathcal{H}^k_{k+1-\delta}(G,\partial G)}, \qquad q \ge q_1, \tag{2.6}$$

где $c, C > 0$ *не зависят от* u *и* q.

3. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Зафиксируем произвольную орбиту $\mathcal{K}_\nu$, состоящую из точек g_j, $j=1,\dots,N_\nu$. Обозначим через $u_j(y)$ функцию $u(y)$ при $y\in\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$. Если $g_j\in\overline{\Gamma}_i$, $y\in\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$ и $\Omega_{is}(y)\in\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$, то обозначим функцию $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$. Тогда нелокальная задача (2.5) примет следующий вид в ε-окрестности орбиты $\mathcal{K}_\nu$:

$$Pu_j-qu_j=f(y),\qquad y\in\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap G,$$
$$u_j(y)-\sum_{s=1}^{S_i}b_{is}(y)u_k(\Omega_{is}(y))=0,\qquad y\in\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i,\quad i\in\bigl\{1\le i\le N\colon\ g_j\in\overline{\Gamma}_i\bigr\},\quad j=1,\dots,N_\nu.$$

Пусть $y\mapsto y'(g_j)$ — замена переменных из разд. 2, и пусть K_j и $\gamma_{j\sigma}$ — множества, определенные в (2.2). Положим $K_j^\varepsilon=K_j\cap\mathcal{O}_\varepsilon(0)$, $\gamma_{j\sigma}^\varepsilon=\gamma_{j\sigma}\cap\mathcal{O}_\varepsilon(0)$. Введем функции $U_j(y')=u(y(y'))$ и $F_j(y')=f(y(y'))$ для $y'\in K_j^\varepsilon$, где $\sigma=1$ ($\sigma=2$), если преобразование $y\mapsto y'(g_j)$ отображает Γ_i на сторону γ_{j1} (γ_{j2}) угла K_j. Переобозначим y' через y. Тогда в силу условия 2.2 задача (2.5) примет вид

$$\begin{gathered}P_j(y,D_y)U_j-qU_j=F_j(y),\qquad y\in K_j^\varepsilon,\\ U_j(y)-\sum_{k=1}^{N_\nu}\sum_{s=1}^{S_{j\sigma k}}B_{j\sigma ks}(y)U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)=0,\qquad y\in\gamma_{j\sigma}^\varepsilon.\end{gathered}\tag{3.1}$$

Здесь $P_j(y,D_y)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с вещественнозначными коэффициентами класса C^∞, причем главная однородная часть оператора $P_j(0,D_y)$ есть оператор Лапласа Δ; $B_{j\sigma ks}(y)$ — гладкие функции; $\mathcal{G}_{j\sigma ks}$ — оператор поворота на угол $\omega_{j\sigma ks}$ и гомотетии с коэффициентом $\chi_{j\sigma ks}>0$, причем $|(-1)^\sigma\omega_j+\omega_{j\sigma ks}|<\omega_k$.

Следуя [4], "заморозим" коэффициенты задачи (3.1) в точке $y=0$, заменим операторы $P_j(0,D_y)$ их главными однородными частями и положим $q=1$. В результате получим

$$\begin{gathered}\Delta U_j-U_j=F_j(y),\qquad y\in K_j,\\ \mathcal{B}_{j\sigma}U\equiv U_j(y)-\sum_{k=1}^{N_\nu}\sum_{s=1}^{S_{j\sigma k}}b_{j\sigma ks}U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)=0,\qquad y\in\gamma_{j\sigma},\end{gathered}\tag{3.2}$$

где $U=(U_1,\dots,U_{N_\nu})$ и $b_{j\sigma ks}=B_{j\sigma ks}(0)$. Из условия 2.3 следует, что

$$b_{j\sigma ks}\ge0,\qquad\sum_{k=1}^{N_\nu}\sum_{s=1}^{S_{j\sigma k}}b_{j\sigma ks}\le1,\qquad\sum_{k=1}^{N_\nu}\Biggl(\sum_{s=1}^{S_{j1k}}b_{j1ks}+\sum_{s=1}^{S_{j2k}}b_{j2ks}\Biggr)<2.\tag{3.3}$$

Задачу (3.2) будем рассматривать в весовых пространствах с неоднородным весом (ср. [4]). Обозначим через $E_a^k(K_j)$ пополнение множества $C_0^\infty(\overline{K}_j\setminus\{0\})$ по норме

$$\|v\|_{E_a^k(K_j)}=\Biggl(\sum_{|\alpha|\le k}\int\limits_{K_j}|y|^{2a}\bigl(|y|^{2(|\alpha|-k)}+1\bigr)|D^\alpha v(y)|^2\,dy\Biggr)^{1/2},$$

где $k\ge0$ — целое и $a\in\mathbb{R}$. Обозначим через $E_a^{k-1/2}(\gamma_{j\sigma})$ ($k\ge1$ — целое) пространство следов на $\gamma_{j\sigma}$ (с инфимум-нормой). Введем пространства вектор-функций

$$\mathcal{E}_a^{k+2}(K)=\prod_{j=1}^{N_\nu}E_a^{k+2}(K_j),\qquad\mathcal{E}_a^k(K,\gamma)=\prod_{j=1}^{N_\nu}\Biggl(E_a^k(K_j)\times\prod_{\sigma=1,2}E_a^{k+3/2}(\gamma_{j\sigma})\Biggr).$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{E}^2_{1-\delta}(K)\to\mathcal{E}^0_{1-\delta}(K,\gamma)$, заданный формулой $\mathcal{L}U=\{\Delta U_j-U_j,\mathcal{B}_{j\sigma}U\}$.

Наша цель — доказать, что оператор $\mathcal{L}$ — изоморфизм для всех достаточно малых $\delta\ge 0$. Для этого рассмотрим аналитическую оператор-функцию

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)\colon\ \prod_{j=1}^{N_\nu} W_2^2(-\omega_j,\omega_j)\to\prod_{j=1}^{N_\nu}\bigl(L_2(-\omega_j,\omega_j)\times\mathbb{C}^2\bigr),$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi=\left\{\varphi_j''-\lambda^2\varphi_j,\ \varphi_j((-1)^\sigma\omega_j)-\sum_{k,s}(\chi_{j\sigma ks})^{i\lambda}b_{j\sigma ks}\varphi_k\bigl((-1)^\sigma\omega_j+\omega_{j\sigma ks}\bigr)\right\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3. *Тогда на прямой* $\operatorname{Im}\lambda=0$ *нет собственных значений оператора* $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Доказательство. 1. Предположим, что $\lambda_0\ne 0$ — вещественное собственное значение оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ (случай $\lambda_0=0$ проще и рассматривается аналогично). Пусть $\varphi(\omega)$ — соответствующий собственный вектор. Запишем его в виде $\varphi(\omega)=\varphi^1(\omega)+i\varphi^2(\omega)$, где $\varphi^1(\omega)$ и $\varphi^2(\omega)$ — вещественнозначные функции класса C^∞. Легко видеть, что функция $U=r^{i\lambda_0}\varphi(\omega)= =e^{i\lambda_0\ln r}\varphi(\omega)$ является решением задачи

$$\Delta U_j=0,\quad y\in K_j,\qquad \mathcal{B}_{j\sigma}U=0,\quad y\in\gamma_{j\sigma}. \tag{3.4}$$

Представим функцию U в виде $U=V+iW$, где $V=\cos(\lambda_0\ln r)\varphi^1(\omega)-\sin(\lambda_0\ln r)\varphi^2(\omega)$, $W=\cos(\lambda_0\ln r)\varphi^2(\omega)+\sin(\lambda_0\ln r)\varphi^1(\omega)$. Так как коэффициенты в (3.4) вещественны, то V (а также W) будет решением задачи

$$\Delta V_j=0,\quad y\in K_j,\qquad \mathcal{B}_{j\sigma}V=0,\quad y\in\gamma_{j\sigma}. \tag{3.5}$$

Положим $M=\max_{j=1,\dots,N_\nu}\sup_{y\in K_j}|V_j(y)|$. Докажем, что $M=0$. Предположим противное: пусть $M>0$.

2. Если $|V_j(y^0)|=M$ при некотором j и $y^0\in K_j$, то $V_j(y)\equiv M$ по принципу максимума и из нелокальных условий в (3.5) получаем

$$M=|V_j(y^0)|=|V_j|_{\gamma_{j\sigma}}|\le M\sum_{k,s}b_{j\sigma ks},\qquad \sigma=1,2. \tag{3.6}$$

Однако $0\le\sum_{k,s}b_{j\sigma ks}<1$ при $\sigma=1$ или 2 в силу условий (3.3), что противоречит (3.6).

3. Пусть $|V_j(y^0)|=M$ при некотором j, $\sigma=1$ или 2 и $y^0\in\gamma_{j\sigma}$. В этом случае, учитывая (3.3), снова из нелокальных условий в (3.5) получаем

$$M=|V_j(y^0)|\le\sum_{k,s}b_{j\sigma ks}|V_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y^0)|\le M \tag{3.7}$$

при $\sigma=1$ или 2. Следовательно, неравенства в (3.7) принимают вид равенств, но тогда $\sum_{k,s}b_{j\sigma ks}=1$ и $|V_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y^0)|=M$ по крайней мере для одной пары (k,s). По доказанному это невозможно, так как $\mathcal{G}_{j\sigma ks}y^0\in K_k$.

4. Наконец, предположим, что существует такая последовательность $\{y^s\}_{s=1}^\infty\subset K_j$, что $|V_j(y^s)|\to M$ для некоторого j при $|y^s|\to 0$ или $|y^s|\to\infty$.

Заметим, что функция V_j периодична относительно $\ln r$, т.е. функция V_j полностью определена своими значениями на множестве $\widehat{K}_j=\overline{K_j}\cap\{1\le r\le e^{2\pi/|\lambda_0|}\}$.

Так как множество $\widehat{K}_j$ компактно, существует такая последовательность $\{\widehat{y}^s\}_{s=1}^\infty \subset \widehat{K}_j$, что $|V_j(\widehat{y}^s)| \to M$ при $\widehat{y}^s \to \widehat{y}$, где $\widehat{y} \in \widehat{K}_j$. Из непрерывности $V_j(y)$ на компакте $\widehat{K}_j$ вытекает, что $|V_j(\widehat{y})| = M$. Снова получили противоречие с доказанным выше.

5. Из п. 1–4 следует, что $M = 0$. Следовательно, $V = 0$, т.е. $\varphi^1(\omega) = \varphi^2(\omega) = 0$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3. *Тогда оператор* $\mathcal{L}\colon \mathcal{E}_1^2(K) \to \mathcal{E}_1^0(K,\gamma)$ — *изоморфизм.*

Доказательство. 1. Вначале покажем, что оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{E}_1^2(K) \to \mathcal{E}_1^0(K,\gamma)$ фредгольмов и $\operatorname{ind}\mathcal{L} = 0$. Рассмотрим семейство операторов $\mathcal{L}_t\colon \mathcal{E}_1^2(K) \to \mathcal{E}_1^0(K,\gamma)$, заданных формулой $\mathcal{L}_t U = \bigl\{\Delta U_j - U_j,\, U_j|_{\gamma_{j\sigma}} - t\sum_{k,s} b_{j\sigma ks} U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}}\bigr\}$, $0 \le t \le 1$. Аналогично оператору $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ введем операторы $\widetilde{\mathcal{L}}_t(\lambda)$. По лемме 3.1 на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 0$ нет собственных значений операторов $\widetilde{\mathcal{L}}_t(\lambda)$. Следовательно, операторы $\mathcal{L}_t$ фредгольмовы по теореме 9.1 в [12]. В силу гомотопической устойчивости индекса фредгольмовых операторов имеем $\operatorname{ind}\mathcal{L}_t = \mathrm{const}$, $t \in [0,1]$. Поскольку локальный оператор $\mathcal{L}_0$ — изоморфизм (см., например, § 10.3 в [12]), то $\operatorname{ind}\mathcal{L} = \operatorname{ind}\mathcal{L}_0 = 0$.

2. Осталось доказать, что $\dim\ker\mathcal{L} = 0$. Пусть $U \in \mathcal{E}_1^2(K)$ — вещественнозначное решение задачи

$$\Delta U_j = U_j, \quad y \in K_j, \qquad \mathcal{B}_{j\sigma}U = 0, \quad y \in \gamma_{j\sigma}. \tag{3.8}$$

По теореме о внутренней гладкости функции U_j бесконечно дифференцируемы в K_j. Докажем, что U_j непрерывны на $\overline{K_j}$.

Так как на прямой $\operatorname{Im}\lambda = 0$ нет собственных значений $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, то из [7] вытекает существование такого числа $\delta \in [0,1]$, что в полосе $-1-\delta \le \operatorname{Im}\lambda \le 0$ содержится не более конечного множества собственных значений $\{\lambda_k\}$ оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, причем $-1-\delta < \operatorname{Im}\lambda_k < 0$. Учитывая, что $U_j \in E_1^2(K_j) \subset H_1^2(K_j)$ — решение задачи (3.8) с правыми частями $U_j \in E_1^2(K_j) \subset H_{-\delta}^0(K_j)$, и применяя теорему 2.2 в [3] (об асимптотике решений нелокальных задач), получим

$$U = \sum_k \sum_{q=1}^{J_k} \sum_{m=0}^{\varkappa_{qk}-1} c_k^{(m,q)} W_k^{(m,q)} + U', \qquad W_k^{(m,q)}(\omega,r) = r^{i\lambda_k} \sum_{l=0}^{m} \frac{1}{l!}(i\ln r)^l \varphi_k^{(m-l,q)}(\omega), \tag{3.9}$$

где $\varphi_k^{(0,q)},\dots,\varphi_k^{(\varkappa_{qk}-1,q)} \in \prod_j C^\infty([-\omega_j,\omega_j])$ — жорданова цепочка, отвечающая собственному значению λ_k, $c_k^{(m,q)}$ — константы и $U_j' \in H_{-\delta}^2(K_j)$. Отсюда и из теоремы вложения Соболева следует, что U_j непрерывны на $\overline{K_j}$ и $U_j(0) = 0$.

Далее покажем, что

$$|U_j(y)| \to 0 \qquad \text{при} \quad |y| \to \infty. \tag{3.10}$$

Так как $U \in \mathcal{E}_1^2(K)$, то $U \in \mathcal{E}_1^0(K)$. Отсюда, из того факта, что U — решение однородной задачи (3.8), и из теоремы 3.2 в [12] получаем, что $U \in \mathcal{E}_3^2(K)$. Фиксируя произвольное сколь угодно большое $a \ge 1$ и повторяя эти рассуждения конечное число раз, имеем $U \in \mathcal{E}_a^2(K)$. Полагая $V(\omega,r) = U(\omega,r^{-1})$ и используя теорему вложения Соболева и произвольность a, видим, что функции $V_j(y)$ непрерывны в начале координат и $|V_j(y)| \to 0$ при $|y| \to 0$. Отсюда вытекает (3.10)

3. Обозначим $M = \max_{j=1,\dots,N_\nu} \sup_{y\in\overline{K_j}} |U_j(y)|$. Покажем, что $M = 0$. Предположим противное: пусть $M > 0$. В силу доказанных выше свойств U_j каждая из функций $|U_j(y)|$ достигает максимума в некоторой точке $y_0 \in \overline{K_j} \setminus \{0\}$. Если $|U_j(y_0)| = M$ при некотором j и $y_0 \in K_j$, то $U_j(y) \equiv \mathrm{const}$ по принципу максимума. Используя дифференциальное уравнение в (3.8), получаем $M \equiv |U_j| = |\Delta U_j| = 0$.

Если $|U_j(y_0)| = M$ при $y_0 \in \gamma_{j\sigma}$, где $\sigma = 1$ или 2, то, используя нелокальные условия в (3.8) и неравенства (3.3), получим

$$M = |U_j(y_0)| \le \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} |U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y_0)| \le M. \tag{3.11}$$

Таким образом, неравенства в (3.11) принимают вид равенств, откуда следует, что $\sum_{k,s} b_{j\sigma ks} = 1$ и $|U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y_0)| = M$ по крайней мере для одной пары (k,s). Однако $\mathcal{G}_{j\sigma ks} y_0 \in K_k$, что невозможно по доказанному. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3. *Тогда существует такое* $\delta_1 > 0$, *что при* $\delta \in [0, \delta_1]$ *оператор* $\mathcal{L}\colon \mathcal{E}^{k+2}_{k+1-\delta}(K) \to \mathcal{E}^{k}_{k+1-\delta}(K, \gamma)$, $k = 0, 1, 2, \dots,$ *— изоморфизм.*

Доказательство. По лемме 3.2 оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{E}^2_1(K) \to \mathcal{E}^0_1(K, \gamma)$ — изоморфизм. С другой стороны, в силу леммы 3.1 и дискретности спектра $\widetilde{L}(\lambda)$ (см. [7]) существует такое $\delta_1 > 0$, что в полосе $-\delta_1 \le \operatorname{Im} \lambda \le 0$ нет собственных значений $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Аналогично предложению 2.8 в [5, гл. 6] можно показать, что при $\delta \in [0, \delta_1]$ оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{E}^2_{1-\delta}(K) \to \mathcal{E}^0_{1-\delta}(K, \gamma)$ — изоморфизм. Тогда в силу теорем 9.2 и 9.3 в [12] оператор $\mathcal{L}\colon \mathcal{E}^{k+2}_{k+1-\delta}(K) \to \mathcal{E}^{k}_{k+1-\delta}(K, \gamma)$ — также изоморфизм. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 8.1 в [4] и следствия 3.1. $\square$

4. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть число $\delta \in [0, 1]$ выбрано таким образом, что ни в полосе $-\delta \le \operatorname{Im} \lambda \le 0$, ни на прямой $\operatorname{Im} \lambda = -1 - \delta$ нет собственных значений оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Существование такого числа вытекает из леммы 3.1 и дискретности спектра $\widetilde{L}(\lambda)$ (см. [7]).

Пусть q_1 — число из теоремы 2.1. Вначале мы построим аналог барьерной функции для нелокальной задачи. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$Pv - q_1 v = 0, \quad y \in G, \qquad v|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i v = 1, \quad y \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N. \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3. *Тогда задача* (4.1) *имеет такое ограниченное решение* $v \in C^\infty(\overline{G} \setminus \mathcal{K})$, *что* $\inf_{y \in \overline{G} \setminus \mathcal{K}} v(y) > 0$.

Доказательство. 1. Зафиксируем произвольную орбиту $\mathcal{K}_\nu$ и рассмотрим модельную задачу

$$\Delta W^1_j = 0, \quad y \in K^\varepsilon_j, \qquad W^1_j(y) - \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} W^1_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks} y) = 1, \quad y \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma}. \tag{4.2}$$

Будем искать решение задачи (4.2) в виде

$$W^1_j = \varphi_j(\omega), \qquad |\omega| < \omega_j, \quad j = 1, \dots, N_\nu. \tag{4.3}$$

Очевидно, функции $\varphi_1(\omega), \dots, \varphi_{N_\nu}(\omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$\varphi''_j(\omega) = 0, \quad |\omega| < \omega_j, \qquad \varphi_j((-1)^\sigma \omega_j) - \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} \varphi_k((-1)^\sigma \omega_j + \omega_{j\sigma ks}) = 1 \tag{4.4}$$

или, что то же самое, $\widetilde{\mathcal{L}}(0)\varphi = \{\widetilde{F}_j, \widetilde{F}_{j\sigma}\}$, где $\widetilde{F}_j = 0$, $\widetilde{F}_{j\sigma} = 1$. В силу леммы 3.1 число $\lambda = 0$ не является собственным значением $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Так как оператор $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ фредгольмов и имеет нулевой индекс [7], то существует единственное (вещественнозначное) решение $\varphi \in \prod_j C^\infty([-\omega_j, \omega_j])$

задачи (4.4). Очевидно, функции $\varphi_j(\omega)$ линейны. Используя нелокальные условия в (4.4) и соотношения (3.3), нетрудно проверить, что $\varphi_j(\omega) > 0$ при $\omega \in [-\omega_j, \omega_j]$.

2. Рассмотрим такую функцию $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что $\xi(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K})$ и $\operatorname{supp}\xi \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$.

Будем искать решение v исходной задачи (4.1) в виде

$$v(y) = w^1(y) + v^1(y), \qquad y \in G, \tag{4.5}$$

где $w^1(y) = \xi(y)W_j^1(y'(y))$, $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$, $g_j \in \mathcal{K}_\nu$, $y' \mapsto y(g_j)$ — преобразование, обратное к преобразованию $y \mapsto y'(g_j)$ из разд. 2, и функция w^1 продолжена нулем на $G \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$; v^1 — неизвестная функция.

Из соотношений (4.1) и (4.5) следует, что функция v^1 удовлетворяет соотношениям

$$Pv^1 - q_1 v^1 = f^1(y), \quad y \in G, \qquad v^1|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i v^1 = f_i^1(y), \quad y \in \Gamma_i, \tag{4.6}$$

где

$$f^1 = -Pw^1 + q_1 w^1, \qquad f_i^1 = 1 - w^1|_{\Gamma_i} + \mathbf{B}_i w^1|_{\Gamma_i}. \tag{4.7}$$

Положим $V_j^1(y') = v^1(y(y'))$, $F_j(y') = f^1(y(y'))$ и $F_{j\sigma}(y') = f_i^1(y(y'))$, $y' \in K_j^\varepsilon$, где $y \mapsto$ $\mapsto y'(g_j)$ — преобразование из разд. 2, $g_j \in \mathcal{K}_\nu \cap \overline{\Gamma}_i$. Переобозначим y' через y. Тогда в силу (4.2) и (4.7) имеем

$$\begin{gathered} F_j(y) = (\Delta - P_j(y, D_y))W_j^1 + q_1 W_j^1, \\ F_{j\sigma}(y) = \sum_{k,s}(B_{j\sigma ks}(y) - b_{j\sigma ks})W_k^1(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y), \qquad y \in K_j^{\varepsilon/2}, \end{gathered} \tag{4.8}$$

где $P_j(y, D_y)$ и $B_{j\sigma ks}(y)$ те же, что в (3.1).

Учитывая, что главные однородные части операторов $P_j(0, D_y)$ совпадают с оператором Лапласа и $B_{j\sigma ks}(0) = b_{j\sigma ks}$ и используя формулу Тейлора, из представления (4.3) и соотношений (4.8) получаем $F_j \in H^k_{k+1-\delta}\big(K_j^{\varepsilon/2}\big)$ и $F_{j\sigma} \in H^{k+3/2}_{k+1-\delta}\big(\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon/2}\big)$, т.е. $\{f^1, f_i^1\} \in \mathcal{H}^k_{k+1-\delta}(G, \partial G)$. Следовательно, по теореме 2.1 существует единственное решение $v^1 \in H^{k+2}_{k+1-\delta}(G)$ задачи (4.6). Так как $k \ge 0$ произвольно, то по теореме вложения Соболева функция v, определенная в (4.5), принадлежит $C^\infty(\overline{G} \setminus \mathcal{K})$. Очевидно, она будет решением исходной задачи (4.1).

3. Докажем, что $v^1 \in C(\overline{G})$ и $v^1(y) = 0$ при $y \in \mathcal{K}$. В силу (4.6) функции $V_j^1(y)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \Delta V_j^1 = F_j^1(y) + F_j(y), \qquad y \in K_j^{\varepsilon/2}, \\ V_j^1(y) - \sum_{k,s} b_{j\sigma ks} V_k^1(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) = F_{j\sigma}^1(y) + F_{j\sigma}(y), \qquad y \in \gamma_{j\sigma}^{\varepsilon/2}, \end{gathered} \tag{4.9}$$

где $F_j^1 = (\Delta - P_j(y, D_y))V_j^1 + q_1 V_j^1$ и $F_{j\sigma}^1 = \sum_{k,s}(B_{j\sigma ks}(y) - b_{j\sigma ks})V_k^1(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)$.

Учитывая, что главные однородные части операторов $P_j(0, D_y)$ совпадают с оператором Лапласа и $B_{j\sigma ks}(0) = b_{j\sigma ks}$, и используя формулу Тейлора еще раз, мы представим правые части задачи (4.9) в виде

$$F_j^1 + F_j = F_j^1 + F_j^2 + r^{-1}\psi_j(\omega), \qquad F_{j\sigma}^1 + F_{j\sigma} = F_{j\sigma}^1 + F_{j\sigma}^2 + \psi_{j\sigma} r, \tag{4.10}$$

где $\psi_j \in C^\infty([-\omega_j, \omega_j])$, $F_j^1 + F_j^2 \in H^0_{-\delta}\big(K_j^{\varepsilon/2}\big)$ и $\psi_{j\sigma} \in \mathbb{R}$, $F_{j\sigma}^1 + F_{j\sigma}^2 \in H^{3/2}_{-\delta}\big(\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon/2}\big)$.

Получим асимптотику функций V_j^1. Для этого обозначим через $\{\lambda_k\}$ конечное множество собственных значений $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащих в полосе $-1-\delta<\operatorname{Im}\lambda<-\delta$. Тогда по теореме 2.2 в [3] и лемме 4.3 в [3], примененным к задаче (4.9) с правой частью (4.10), получим

$$V^1 = r\sum_{l=0}^{\varkappa}\frac{1}{l!}(i\ln r)^l u^{(l)}(\omega)+\sum_k\sum_{q=1}^{J_k}\sum_{m=0}^{\varkappa_{qk}-1} c_k^{(m,q)}W_k^{(m,q)}+V^2,\qquad y\in K_j^{\varepsilon/2}, \tag{4.11}$$

где $u^{(l)}\in\prod_j C^\infty([-\omega_j,\omega_j])$, функции $W_k^{(m,q)}$ имеют тот же вид, что в (3.9), $c_k^{(m,q)}$ — некоторые константы и $V_j^2\in H^2_{-\delta}\big(K_j^{\varepsilon/2}\big)$. Из асимптотической формулы (4.11) и теоремы вложения Соболева получаем $V_j^1\in C\big(\overline{K_j^{\varepsilon/2}}\big)$ и $V_j^1(0)=0$. Следовательно, $v^1\in C(\overline{G})$ и $v^1(0)=0$ при $y\in\mathcal{K}$. В частности, отсюда вытекает, что функция $v=v^1+w^1$ ограничена.

4. Осталось показать, что $m>0$, где $m=\inf_{y\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}}v(y)$. Предположим противное: пусть $m\le 0$. Рассмотрим такую последовательность $\{y^k\}\subset\overline{G}\setminus\mathcal{K}$, что $v(y^k)\to m$ при $k\to\infty$. Так как последовательность $\{y^k\}$ ограничена, она содержит сходящуюся подпоследовательность (которую мы также обозначим $\{y^k\}$). Пусть $y^k\to y^0$ при $k\to\infty$, где $y^0\in\overline{G}$.

Используя принцип максимума, нелокальные условия в (4.1) и соотношения (2.3), несложно проверить, что $y^0\notin\overline{G}\setminus\mathcal{K}$. Предположим, что $y^0\in\mathcal{K}_\nu$ при некотором ν. По доказанному в п. 1 найдется такая константа $A>0$, что $w^1(y)\ge A$ в некоторой окрестности точки y^0 (за исключением самой точки y^0, где функция w^1 может быть не определена). С другой стороны, в п. 3 доказано, что $v^1(y^0)=0$. Следовательно, $v(y)\ge A/2$ в некоторой окрестности y^0 (за исключением, быть может, самой точки y^0). Но в таком случае последовательность $\{v(y^k)\}$ не может сходиться к неположительному числу m. $\square$

Для любого замкнутого множества $Q\subset\overline{G}$ такого, что $Q\cap\mathcal{K}\ne\varnothing$, введем пространство

$$C_{\mathcal{K}}(Q)=\big\{u\in C(Q)\colon\ u(y)=0,\ y\in Q\cap\mathcal{K}\big\} \tag{4.12}$$

с максимум-нормой.

Рассмотрим пространство вектор-функций $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)=\prod_{i=1}^N C_{\mathcal{K}}(\overline{\Gamma}_i)$ с нормой

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)}=\max_{i=1,\dots,N}\max_{y\in\overline{\Gamma}_i}\|\psi_i\|_{C(\overline{\Gamma}_i)},$$

где $\psi=\{\psi_i\}$, $\psi_i\in C_{\mathcal{K}}(\overline{\Gamma}_i)$.

Изучим разрешимость задачи

$$Pu-qu=0,\quad y\in G,\qquad u|_{\Gamma_i}-\mathbf{B}_iu=\psi_i(y),\quad y\in\Gamma_i,\quad i=1,\dots,N, \tag{4.13}$$

в пространстве непрерывных функций.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3, *и пусть* $q\ge q_1$. *Тогда для любой* $\psi=\{\psi_i\}\in\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)$ *существует единственное решение* $u\in C_{\mathcal{K}}(\overline{G})\cap C^\infty(G)$ *задачи* (4.13). *При этом имеет место оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{G})}\le c_1\|\psi\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)}, \tag{4.14}$$

где $c_1>0$ *не зависит от* ψ *и* q.

Доказательство. 1. Докажем лемму для бесконечно дифференцируемых функций ψ_i, равных нулю в некоторой окрестности множеств $\overline{\Gamma}_i\cap\mathcal{K}$. Общий случай получается предельным переходом. Для указанных функций ψ_i имеем $\psi_i\in H^{3/2}_{-\delta}(\Gamma_i)$. Следовательно, по теореме 2.1 существует единственное решение $u\in H^2_{1-\delta}(G)$ задачи (4.13). По лемме 5.1 в [13]

$u \in C^\infty(\overline{G} \setminus \mathcal{K})$. Пусть $\{\lambda_k\}$ — конечное множество собственных значений $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащих в полосе $-1-\delta < \operatorname{Im}\lambda < -\delta$. Тогда по теореме 2.2 в [3] (об асимптотике решений нелокальных задач) функция u представима вблизи точки $g_j \in \mathcal{K}_\nu$ ($j = 1,\dots,N_\nu$, $\nu = 1,\dots,N_0$) в следующем виде:

$$u(y) = \sum_k \sum_{q=1}^{J_k} \sum_{m=0}^{\varkappa_{qk}-1} c_k^{(m,q)} W_{kj}^{(m,q)} + u'(y), \qquad y \in G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(g_j),$$

где $c_k^{(m,q)}$ — некоторые константы, функции $W_{kj}^{(m,q)}(\omega,r)$ имеют тот же вид, что компоненты вектора $W_k^{(m,q)}(\omega,r)$ в (3.9) (ω, r — полярные координаты с полюсом в точке g_j), и $u' \in H^2_{-\delta}(G)$. Таким образом, применяя теорему вложения Соболева, видим, что $u \in C(\overline{G})$ и

$$u(y) = 0, \qquad y \in \mathcal{K}. \tag{4.15}$$

2. Докажем оценку (4.14). Положим $M = \|\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{K}(\partial G)}$ и предположим, что $M > 0$.

Обозначим $w_\pm(y) = Mv(y) \pm u(y)$, где $v(y)$ — функция из леммы 4.1. В силу равенств (4.1) и (4.13) функции $w_\pm$ удовлетворяют соотношениям

$$Pw_\pm - qw_\pm = M(q_1 - q)v(y), \qquad y \in G,$$

$$w_\pm|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i w_\pm = M \pm \psi_i(y), \qquad y \in \Gamma_i, \quad i = 1,\dots,N.$$

Так как $q_1 \le q$, $v(y) > 0$, $y \in G$ (по лемме 4.1) и $M \ge \pm\psi_i$, то

$$Pw_\pm - qw_\pm \le 0, \quad y \in G, \qquad w_\pm|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i w_\pm \ge 0, \quad y \in \Gamma_i, \quad i = 1,\dots,N. \tag{4.16}$$

Покажем, что $m_\pm = \inf_{y \in \overline{G}\setminus\mathcal{K}} w_\pm(y) \ge 0$. Предположим противное: пусть $m_\pm < 0$. Как и в п. 4 из доказательства леммы 4.1, рассмотрим такую последовательность $\{y^k\} \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}$, что $y^k \to y^0$ и $w_\pm(y_k) \to m_\pm$ при $k \to \infty$, где $y^0 \in \overline{G}$. Возможны следующие три случая: $y^0 \in G$, $y^0 \in \Gamma_i$ при некотором i и $y^0 \in \mathcal{K}$.

Пусть $y^0 \in G$. Так как $w_\pm(y)$ непрерывна в G, то она достигает отрицательного минимума m внутри области. Из первого неравенства в (4.16) и принципа максимума вытекает, что $w_\pm(y) = m_\pm$ при $y \in G$. Отсюда, учитывая условие 2.1, получаем $Pw_\pm(y^0) - qw_\pm(y^0) = p_0(y^0)m_\pm - qm_\pm \ge -qm_\pm > 0$, что противоречит первому неравенству в (4.16).

Пусть $y^0 \in \Gamma_i$ при некотором i. Тогда из (4.16) и (2.3) получим

$$m_\pm = w_\pm(y^0) \ge \sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y^0) w_\pm(\Omega_{is}(y^0)) \ge m_\pm \sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y^0) \ge m_\pm. \tag{4.17}$$

Следовательно, неравенства (4.17) принимают вид равенств; тогда $\sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y^0) = 1$ и $w_\pm(\Omega_{is}(y^0)) = m_\pm$ при некотором s, т.е. функция $w_\pm(y)$ достигает отрицательного минимума во внутренней точке $\Omega_{is}(y^0) \in G$. По доказанному выше это невозможно.

Наконец, предположим, что $y^0 \in \mathcal{K}_\nu$ при некотором ν. По лемме 4.1 $m = \inf_{y' \in \overline{G}\setminus\mathcal{K}} v(y') > 0$, откуда получим

$$Mv(y) \ge Mm > 0, \qquad y \in \overline{G} \setminus \mathcal{K}.$$

Из последнего неравенства и (4.15) вытекает, что

$$w_\pm(y) = Mv(y) \pm u(y) \ge Mm/2 > 0$$

в некоторой окрестности y^0 (за исключением самой точки y^0, где $w_\pm(y)$ может быть не определена). Следовательно, последовательность $\{w_\pm(y^k)\}$ не может сходиться к отрицательному числу $m_\pm$.

Итак, доказано, что $\inf_{y\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}} w_\pm(y)\ge 0$, откуда

$$|u(y)|\le Mv(y)\le M\sup_{y'\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}} v(y'),\qquad y\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}.$$

Так как функция $u(y)$ непрерывна в $\overline{G}$, то из последнего неравенства получаем оценку (4.14), где $c_1=\sup_{y'\in\overline{G}\setminus\mathcal{K}} v(y')$. Очевидно, константа $c_1>0$ не зависит от ψ и q. $\square$

Теперь рассмотрим задачу

$$Pu-qu=f(y),\quad y\in G,\qquad u|_{\Gamma_i}-\mathbf{B}_iu=\psi_i(y),\quad y\in\Gamma_i,\quad i=1,\dots,N. \tag{4.18}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3, *и пусть* $q\ge q_1$. *Тогда для любых* $f\in C(\overline{G})$ *и* $\psi=\{\psi_i\}\in\mathcal{C}_\mathcal{K}(\partial G)$ *существует единственное решение* $u\in C_\mathcal{K}(\overline{G})\cap W^2_{2,\mathrm{loc}}(G)$ *задачи* (4.18). *Кроме того, если* $f=0$, *то* $u\in C_\mathcal{K}(\overline{G})\cap C^\infty(G)$ *и имеет место оценка*

$$\|u\|_{C_\mathcal{K}(\overline{G})}\le c_1\|\psi\|_{\mathcal{C}_\mathcal{K}(\partial G)},$$

где $c_1>0$ *не зависит от* ψ *и* q.

Доказательство. В силу леммы 4.2 достаточно доказать существование решения $u\in$ $\in C_\mathcal{K}(\overline{G})\cap W^2_{2,\mathrm{loc}}(G)$ задачи (4.18) с $f\in C(\overline{G})$ и $\psi_i=0$. Так как $f\in C(\overline{G})\subset H^0_{-\delta}(G)$, то по теореме 2.1 существует единственное решение $u\in H^2_{1-\delta}(G)$ задачи (4.18) с правыми частями $\psi_i=0$. По лемме 5.1 в [13] $u\in W^2_2(G\setminus\overline{\mathcal{O}_\sigma(\mathcal{K})})$ для любого $\sigma>0$. Пусть $\{\lambda_k\}$ — конечное множество собственных значений $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$, лежащих в полосе $-1-\delta<\operatorname{Im}\lambda<-\delta$. Тогда по теореме 2.2 в [3] (об асимптотике решений нелокальных задач) функция u представима вблизи точки $g_j\in\mathcal{K}_\nu$ ($j=1,\dots,N_\nu$, $\nu=1,\dots,N_0$) в следующем виде:

$$u(y)=\sum_k\sum_{q=1}^{J_k}\sum_{m=0}^{\varkappa_{qk}-1} c_k^{(m,q)}W_{kj}^{(m,q)}+u'(y),\qquad y\in G\cap\mathcal{O}_\varepsilon(g_j),$$

где $c_k^{(m,q)}$ — некоторые константы, функции $W_{kj}^{(m,q)}(\omega,r)$ имеют тот же вид, что компоненты вектора $W_k^{(m,q)}(\omega,r)$ в (3.9) (ω,r — полярные координаты с полюсом в точке g_j), и $u'\in H^2_{-\delta}(G)$. Таким образом, применяя теорему вложения Соболева, видим, что $u\in C_\mathcal{K}(\overline{G})$. $\square$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛУГРУПП ФЕЛЛЕРА

Введем пространство

$$C_B(\overline{G})=\bigl\{u\in C_\mathcal{K}(\overline{G})\colon\ u|_{\Gamma_i}-\mathbf{B}_iu=0,\ y\in\Gamma_i,\ i=1,\dots,N\bigr\}.$$

В этом разделе будет доказано, что неограниченный оператор $\mathbf{P}_B\colon \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)\subset C_B(\overline{G})\to C_B(\overline{G})$, заданный формулой

$$\mathbf{P}_Bu=Pu,\qquad \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)=\bigl\{u\in C_B(\overline{G})\cap W^2_{2,\mathrm{loc}}(G)\colon\ Pu\in C_B(\overline{G})\bigr\}, \tag{5.1}$$

является генератором полугруппы Феллера.

Замечание 5.1. Рассмотрим нетрансверсальное нелокальное условие вида (ср. [1, 2, 6, 11, 16])

$$b(y)u(y) + \int\limits_{\overline{G}} [u(x) - u(\eta)]\, m(y, d\eta) = 0, \qquad y \in \partial G, \tag{5.2}$$

где $b(y) \ge 0$, $m(y,\cdot)$ — неотрицательная борелевская мера, $b(y) + m(y, \overline{G}) > 0$, $y \in \partial G$.

Введем неотрицательную борелевскую меру $\mu(y,\cdot) = m(y,\cdot)/[b(y) + m(y,\overline{G})]$. Тогда нелокальное условие (5.2) запишется следующим образом:

$$u(y) - \int\limits_{\overline{G}} u(\eta)\mu(y, d\eta) = 0, \qquad y \in \partial G. \tag{5.3}$$

Предположим, что $\mu(y,\cdot) = 0$, если $y \in \mathcal{K}$, и $\mu(y,\cdot)$ есть линейная комбинация дельта-функций, сосредоточенных в точках $\Omega_{is}(y)$, с коэффициентами $b_{is}(y)$, если $y \in \Gamma_i$. Тогда нелокальные условия (5.3), а следовательно, и (5.2) примут вид

$$u|_{\Gamma_i} - \mathbf{B}_i u = 0, \quad y \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N, \qquad u(y) = 0, \quad y \in \mathcal{K}.$$

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3. *Пусть функция $u \in C_B(\overline{G})$ достигает в точке $y^0 \in \overline{G}$ положительного максимума, и пусть $Pu \in C(G)$. Тогда найдется такая точка $y^1 \in G$, что $u(y^1) = u(y^0)$ и $Pu(y^1) \le 0$.*

Доказательство. Если $y^0 \in G$, то заключение леммы вытекает из принципа максимума. Пусть $y^0 \in \partial G$. Предположим, что лемма неверна, т.е. $u(y^0) > u(y)$ для всех $y \in G$.

Так как $u(y^0) > 0$, то $y^0 \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ для некоторого i и при этом $b_{is}(y^0) > 0$ для некоторого s. Учитывая, что $\Omega_{is}(y^0) \in G$ и $u(y^0) > u(y)$ для всех $y \in G$, имеем

$$u(y^0) - u(\Omega_{is}(y^0)) > 0.$$

Тогда, используя (2.3), получим

$$0 = u(y^0) - \sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y^0) u(\Omega_{is}(y^0)) \ge \sum_{s=1}^{S_i} b_{is}(y^0)\big(u(y^0) - u(\Omega_{is}(y^0))\big) > 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3. *Пусть $u \in C_B(\overline{G})$ — решение уравнения*

$$qu(y) - Pu(y) = f(y), \qquad y \in G,$$

где $q > 0$ и $f \in C(\overline{G})$. Тогда

$$\|u\|_{C(\overline{G})} \le \frac{1}{q}\|f\|_{C(\overline{G})}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Пусть $\max_{y\in\overline{G}} |u(y)| = u(y^0) > 0$ для некоторого $y^0 \in \overline{G}$. Тогда по лемме 5.1 найдется такая точка $y^1 \in G$, что $u(y^1) = u(y^0)$ и $Pu(y^1) \le 0$. Следовательно,

$$\|u\|_{C(\overline{G})} = u(y^0) = u(y^1) = \frac{1}{q}(Pu(y^1) + f(y^1)) \le \frac{1}{q}\|f\|_{C(\overline{G})}. \quad \square$$

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3. *Тогда* $\mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ *плотно в* $C_B(\overline{G})$.

Доказательство. Будем проводить доказательство по схеме, предложенной в [11].

1. Пусть $u \in C_B(\overline{G})$. Так как $C_B(\overline{G}) \subset C_{\mathcal{K}}(\overline{G})$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $q \ge q_1$ существует такая функция $u_1 \in C^\infty(\overline{G}) \cap C_{\mathcal{K}}(\overline{G})$, что

$$\|u - u_1\|_{C(\overline{G})} \le \min(\varepsilon, \varepsilon/(2c_1)), \tag{5.5}$$

где c_1 — число из леммы 4.2.

Положим

$$\begin{gathered} f(y) \equiv qu_1 - Pu_1, \qquad y \in G, \\ \psi_i(y) \equiv u_1(y) - \mathbf{B}_i u_1(y), \qquad y \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Поскольку $u_1 \in C_{\mathcal{K}}(\overline{G})$, то $\{\psi_i\} \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)$. Используя соотношение

$$u(y) - \mathbf{B}_i u(y) = 0, \qquad y \in \Gamma_i,$$

неравенство (5.5) и соотношения (2.3), получим

$$\|\{\psi_i\}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)} \le \|u - u_1\|_{C(\overline{G})} + \|\{\mathbf{B}_i(u - u_1)\}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)} \le \varepsilon/c_1. \tag{5.7}$$

Рассмотрим вспомогательную нелокальную задачу

$$\begin{gathered} qu_2 - Pu_2 = f(y), \qquad y \in G, \\ u_2(y) - \mathbf{B}_i u_2(y) = 0, \quad y \in \Gamma_i, \qquad u_2(y) = 0, \quad y \in \mathcal{K}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Так как $f \in C^\infty(\overline{G})$, то по теореме 4.1 задача (5.8) имеет единственное решение $u_2 \in C_B(\overline{G})$.

Используя (5.6), (5.8) и соотношения $u_1(y) = u_2(y) = 0$, $y \in \mathcal{K}$, видим, что функция $w_1 = u_1 - u_2$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} qw_1 - Pw_1 = 0, \qquad y \in G, \\ w_1(y) - \mathbf{B}_i w_1(y) = \psi_i(y), \quad y \in \Gamma_i, \qquad w_1(y) = 0, \quad y \in \mathcal{K}. \end{gathered} \tag{5.9}$$

В силу леммы 4.2 задача (5.9) имеет единственное решение $w_1 \in C_B(\overline{G})$ и (учитывая (5.7))

$$\|w_1\|_{C(\overline{G})} \le c_1 \|\{\psi_i\}\|_{\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\partial G)} \le c_1 \varepsilon / c_1 = \varepsilon. \tag{5.10}$$

2. Наконец, рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \lambda u_3 - Pu_3 = \lambda u_2, \qquad y \in G, \\ u_3(y) - \mathbf{B}_i u_3(y) = 0, \quad y \in \Gamma_i, \qquad u_3(y) = 0, \quad y \in \mathcal{K}. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Так как $u_2 \in C_B(\overline{G})$, то по теореме 4.1 задача (5.11) имеет единственное решение $u_3 \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ при всех достаточно больших $\lambda > 0$.

Обозначим $w_2 = u_2 - u_3 \in C_B(\overline{G})$. Из (5.11) вытекает, что

$$\lambda w_2 - Pw_2 = -Pu_2 = f - qu_2.$$

Применяя следствие 5.1, имеем

$$\|w_2\|_{C(\overline{G})} \le \frac{1}{\lambda} \|f - qu_2\|_{C(\overline{G})}.$$

Выбирая достаточно большое λ, получаем

$$\|w_2\|_{C(\overline{G})} \le \varepsilon. \tag{5.12}$$

Из неравенств (5.5), (5.10) и (5.12) следует, что

$$\|u - u_3\|_{C(\overline{G})} \le \|u - u_1\|_{C(\overline{G})} + \|u_1 - u_2\|_{C(\overline{G})} + \|u_2 - u_3\|_{C(\overline{G})} \le 3\varepsilon. \quad \square$$

Докажем основной результат о существовании полугруппы Феллера.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.3. *Тогда оператор* $\mathbf{P}_B\colon \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to \to C_B(\overline{G})$ *является генератором полугруппы Феллера.*

Доказательство. 1. Согласно лемме 5.2 область определения оператора $\mathbf{P}_B$ плотна в $C_B(\overline{G})$.

2. В силу теоремы 4.1 и следствия 5.1 при всех достаточно больших $q > 0$ существует ограниченный оператор $(q\mathbf{I} - \mathbf{P}_B)^{-1}\colon C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ и

$$\|(q\mathbf{I} - \mathbf{P}_B)^{-1}\| \le 1/q.$$

3. Докажем, что оператор $(q\mathbf{I} - \mathbf{P}_B)^{-1}$ неотрицателен. Предположим противное; тогда найдется такая функция $f \ge 0$, что решение $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_B)$ уравнения $qu - \mathbf{P}_B u = f$ достигает в некоторой точке $y^0 \in \overline{G}$ отрицательного минимума. В этом случае функция $v = -u$ достигает в точке y^0 положительного максимума. Согласно лемме 5.1 существует такая точка $y^1 \in G$, что $v(y^1) = v(y^0)$ и $\mathbf{P}_B v(y^1) \le 0$. Следовательно, $0 < v(y^0) = v(y^1) = (\mathbf{P}_B v(y^1) - f(y^1))/q \le 0$. Полученное противоречие доказывает, что $u \ge 0$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы Хилле–Иосиды (теоремы 1.1) и оператор $\mathbf{P}_B\colon \mathrm{D}(\mathbf{P}_B) \subset C_B(\overline{G}) \to C_B(\overline{G})$ — генератор полугруппы Феллера. $\square$

Автор выражает благодарность профессору А.Л. Скубачевскому за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теор. вероятн. и ее прим. 1959. Т. 4, №2. С. 172–185.
2. *Галахов Е.И., Скубачевский А.Л.* О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями // Мат. сб. 1998. Т. 189, №1. С. 45–78.
3. *Гуревич П.Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2003. Т. 23. С. 93–126.
4. *Гуревич П.Л., Скубачевский А.Л.* О фредгольмовой и однозначной разрешимости нелокальных эллиптических задач в многомерных областях // Тр. Моск. мат. о-ва. 2007. Т. 68. С. 288–373.
5. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
6. *Скубачевский А.Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов // ДАН СССР. 1989. Т. 307. С. 287–292.
7. *Скубачевский А.Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Диф. уравнения. 1990. Т. 26, №1. С. 120–131.
8. *Bony J.M., Courrege P., Priouret P.* Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum // Ann. Inst. Fourier. 1968. V. 18, N 2. P. 369–521.
9. *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations // Ann. Math. Ser. 2. 1952. V. 55. P. 468–519.
10. *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 1–31.
11. *Galakhov E.I., Skubachevskii A.L.* On Feller semigroups generated by elliptic operators with integro-differential boundary conditions // J. Diff. Equat. 2001. V. 176, N 2. P. 315–355.
12. *Gurevich P.L.* Nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles and the Green formula. Giessen (Germany): Math. Inst. Univ. Giessen, 2001. 74 p. (Mitt. Math. Sem. Giessen; Bd. 247).

13. *Gurevich P.L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces. II // Russ. J. Math. Phys. 2004. V. 11, N 1. P. 1–44.
14. *Ishikawa Y.* A remark on the existence of a diffusion process with non-local boundary conditions // J. Math. Soc. Japan. 1990. V. 42, N 1. P. 171–184.
15. *Sato K., Ueno T.* Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary // J. Math. Kyoto Univ. 1965. V. 4. P. 529–605.
16. *Skubachevskii A.L.* Nonlocal elliptic problems and multidimensional diffusion processes // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3, N 3. P. 327–360.
17. *Taira K.* Diffusion processes and partial differential equations. New York; London: Acad. Press, 1988.
18. *Taira K.* Semigroups, boundary value problems and Markov processes. Berlin: Springer, 2004.
19. *Watanabe S.* Construction of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions by means of Poisson point processes of Brownian excursions // Probability theory. Warsaw: Pol. Sci. Publ., 1979. P. 255–271. (Banach Center Publ.; V. 5).