ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2006, т. 255, с. 116–135

УДК 517.9

Об устойчивости индекса неограниченных нелокальных операторов в пространствах Соболева[1]

©2006 г. П. Л. Гуревич[2]

Поступило в мае 2005 г.

Рассматриваются неограниченные операторы, соответствующие нелокальным краевым задачам в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$. В область определения этих операторов входят функции из пространства Соболева $W_2^m(G)$, являющиеся обобщенными решениями соответствующего эллиптического уравнения порядка $2m$ с правой частью из $L_2(G)$ и удовлетворяющие однородным нелокальным краевым условиям. Известно, что такие неограниченные операторы фредгольмовы. В работе доказано, что младшие члены в дифференциальном уравнении не влияют на индекс оператора. Кроме того, получены условия, при которых нелокальные возмущения на границе области также не меняют индекс.

ВВЕДЕНИЕ

В одномерном случае нелокальные задачи изучали А. Зоммерфельд [20], Я.Д. Тамаркин [13], М. Пиконе [17]. Т. Карлеман [14] рассмотрел задачу нахождения гармонической в двумерной ограниченной области функции, удовлетворяющей нелокальному условию, которое связывает значения этой функции в различных точках границы области. А.В. Бицадзе и А.А. Самарский [1] предложили другую постановку нелокальной задачи, возникающую в теории плазмы: найти гармоническую в ограниченной области функцию, удовлетворяющую нелокальным условиям на сдвигах границы, которые могут отображать точки границы внутрь области. Различные обобщения упомянутых нелокальных задач исследовались многими авторами (см. [19] и приведенную там библиографию).

Наиболее сложной оказывается ситуация, когда носитель нелокальных членов пересекается с границей. В этом случае решения нелокальных задач могут иметь степенные особенности вблизи некоторых точек, даже если граница области и правая часть уравнения бесконечно гладкие [10]. Поэтому такие задачи естественно изучать в весовых пространствах (введенных В.А. Кондратьевым для краевых задач в негладких областях [7]). Наиболее полная теория нелокальных задач в весовых пространствах развита в работах А.Л. Скубачевского [10–12, 18, 19] и его учеников.

Отметим также, что в настоящее время изучение нелокальных задач обусловлено не только значительными теоретическими достижениями в этой области, но и важными приложениями, возникающими в таких областях, как биофизика, теория диффузионных процессов, теория плазмы и пр.

В этой работе исследуется влияние младших членов в эллиптическом уравнении и нелокальных возмущений в краевых условиях на индекс соответствующего неограниченного оператора, действующего в $L_2(G)$. Ранее аналогичный вопрос изучался А.Л. Скубачевским [18] для ограниченных операторов в весовых пространствах. В работе [18] доказано, что нелокальные возмущения, носитель которых отделен от точек сопряжения нелокальных краевых условий,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00256).

[2]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия.
E-mail: gurevichp@yandex.ru

не меняют индекс соответствующего ограниченного оператора. Позже аналогичный результат был получен в пространствах Соболева в двумерном случае [16]. В обоих случаях возможно либо применение метода продолжения по параметру, либо сведение исходной задачи к задаче, в которой нелокальные возмущения имеют компактный квадрат. Что касается младших членов в эллиптическом уравнении, они просто являются компактными возмущениями.

Совершенно иная картина имеет место в случае неограниченных операторов. Сложность заключается в том, что младшие члены в эллиптическом уравнении не являются компактными или относительно компактными возмущениями (см. определение A.2 в приложении); более того, если порядок уравнения больше двух, то они не будут даже относительно ограниченными и, следовательно, могут изменить область определения оператора. Что касается нелокальных возмущений в краевых условиях, они явно меняют область определения и, следовательно, не могут рассматриваться как компактные (в каком-либо смысле) возмущения.

Чтобы преодолеть эти трудности, рассматривается вспомогательный оператор (индекс которого равен индексу исходного), действующий в весовых пространствах. В разд. 2 доказывается, что младшие члены в эллиптическом уравнении — относительно компактные возмущения вспомогательного оператора; следовательно, они не влияют на индекс. В разд. 3 рассматриваются нелокальные возмущения в краевых условиях, которые явно меняют область определения оператора. Здесь используется понятие *раствора между неограниченными операторами* (см. определение A.3). Показано, что если нелокальные возмущения удовлетворяют некоторым условиям регулярности в точках сопряжения краевых условий, то, умножая возмущение на малый параметр, можно добиться малости раствора между невозмущенным и возмущенным операторами. Отсюда при помощи метода продолжения по параметру выводится теорема об устойчивости индекса.

В заключение отметим, что фредгольмовость неограниченных нелокальных операторов в $L_2(G)$ ранее изучалась либо в случае, когда нелокальные условия заданы на сдвигах границы [19], либо в случае нелокальных возмущений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка [5, 4]. Для эллиптических уравнений порядка $2m$ с общими нелокальными условиями этот вопрос исследуется впервые.

1. ПОСТАНОВКА НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

1.1. Постановка нелокальных задач. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей ∂G. Введем множество $\mathcal{K} \subset \partial G$, состоящее из конечного числа точек, и предположим, что $\partial G \setminus \mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$, где Γ_i — открытые (в топологии ∂G) кривые класса C^∞. Будем считать, что в окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}$ область G совпадает с некоторым плоским углом.

Для любой области Q и целого $k \geq 0$ обозначим через $W^k(Q) = W_2^k(Q)$ пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int\limits_Q |D^\alpha u|^2 \, dy \right)^{1/2}$$

(при $k = 0$ полагаем $W^0(Q) = L_2(Q)$). Для целых $k \geq 1$ введем пространство $W^{k-1/2}(\Gamma)$ следов на гладкой кривой $\Gamma \subset \overline{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)} = \inf \|u\|_{W^k(Q)}, \qquad u \in W^k(Q)\colon\ u|_\Gamma = \psi. \tag{1.1}$$

Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^2$, имеющего непустую внутренность, обозначим через $C_0^\infty(X)$ множество функций, бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^2$, носитель которых содержится в X.

Теперь для различных областей Q введем различные весовые пространства. Рассмотрим следующие случаи:

1) $Q=G$; обозначим $\mathcal{M}=\mathcal{K}$;

2) Q — плоский угол, $Q=\{y\in\mathbb{R}^2\colon |\omega|<\omega_0\}$, где $0<\omega_0<\pi$; обозначим $\mathcal{M}=\{0\}$;

3) $Q=\{y\in\mathbb{R}^2\colon |\omega|<\omega_0,\ 0<r<\varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon>0$; обозначим $\mathcal{M}=\{0\}$;

здесь (ω,r) — полярные координаты точки y.

Введем весовое пространство Кондратьева $H_a^k(Q)=H_a^k(Q,\mathcal{M})$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{Q}\setminus\mathcal{M})$ по норме

$$\|u\|_{H_a^k(Q)}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\int\limits_Q \rho^{2(a+|\alpha|-k)}|D^\alpha u|^2\,dx\right)^{1/2},$$

где $k\ge 0$, $a\in\mathbb{R}$ и $\rho(y)=\operatorname{dist}(y,\mathcal{M})$; очевидно, $\rho(y)=r$ в случаях 2) и 3).

Обозначим через $H_a^{k-1/2}(\Gamma)$ ($k\ge 1$ целое) пространство следов на гладкой кривой $\Gamma\subset\overline{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)}=\inf\|v\|_{H_a^k(Q)},\qquad v\in H_a^k(Q)\colon\ v|_\Gamma=\psi.$$

Через $\mathbf{A}(y,D_y)$ и $B_{i\mu s}(y,D_y)$ обозначим линейные дифференциальные операторы порядка $2m$ и $m_{i\mu}$ ($m_{i\mu}\le m-1$) соответственно с комплекснозначными коэффициентами класса C^∞, $i=1,\dots,N$, $\mu=1,\dots,m$, $s=0,\dots,S_i$. Положим $\mathbf{B}_{i\mu}^0u=B_{i\mu0}(y,D_y)u|_{\Gamma_i}$.

Условие 1.1 (см., например, [9]). Оператор $\mathbf{A}(y,D_y)$ собственно эллиптический для всех $y\in\overline{G}$, и система операторов $\{\mathbf{B}_{i\mu}^0\}_{\mu=1}^m$ накрывает $\mathbf{A}(y,D_y)$ при всех $i=1,\dots,N$ и $y\in\overline{\Gamma}_i$.

Операторы $\mathbf{A}(y,D_y)$ и $\mathbf{B}_{i\mu}^0$ *будут соответствовать “локальной” краевой задаче.*

Теперь определим операторы, соответствующие нелокальным условиям вблизи множества $\mathcal{K}$. Для $\varepsilon>0$ и любого замкнутого множества $\mathcal{N}$ обозначим его ε-окрестность через $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{N})=\{y\in\mathbb{R}^2\colon \operatorname{dist}(y,\mathcal{N})<\varepsilon\}$.

Пусть Ω_{is}, $i=1,\dots,N$, $s=1,\dots,S_i$, — C^∞-диффеоморфизмы, определенные в некоторой окрестности $\mathcal{O}_i$ кривой $\overline{\Gamma_i\cap\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})}$, такие, что $\Omega_{is}(\Gamma_i\cap\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}))\subset G$ и $\Omega_{is}(g)\in\mathcal{K}$ для $g\in\overline{\Gamma}_i\cap\mathcal{K}$. Таким образом, под действием преобразований Ω_{is} кривые $\Gamma_i\cap\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ отображаются строго внутрь области G, а множество концевых точек $\overline{\Gamma}_i\cap\mathcal{K}$ отображается в себя.

Уточним структуру преобразований Ω_{is} вблизи множества $\mathcal{K}$. Обозначим через Ω_{is}^{+1} преобразование $\Omega_{is}\colon\mathcal{O}_i\to\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$, а через Ω_{is}^{-1} обратное преобразование. Множество точек вида $\Omega_{i_qs_q}^{\pm1}(\dots\Omega_{i_1s_1}^{\pm1}(g))\in\mathcal{K}$, $1\le s_j\le S_{i_j}$, $j=1,\dots,q$, т.е. множество всех точек, которые можно получить, последовательно применяя преобразования $\Omega_{i_js_j}^{+1}$ или $\Omega_{i_js_j}^{-1}$ (отображающие точки множества $\mathcal{K}$ в точки множества $\mathcal{K}$) к точкам $g\in\mathcal{K}$, называется *орбитой* точки g и обозначается $\operatorname{Orb}(g)$.

Очевидно, если $g,g'\in\mathcal{K}$, то либо $\operatorname{Orb}(g)=\operatorname{Orb}(g')$, либо $\operatorname{Orb}(g)\cap\operatorname{Orb}(g')=\varnothing$. Далее будем считать для простоты, что множество $\mathcal{K}$ состоит из одной орбиты, а число точек, входящих в орбиту, равно числу N кривых Γ_i. Обозначим точки множества (орбиты) $\mathcal{K}$ через g_j, $j=1,\dots,N$.

Пусть $\varepsilon>0$ настолько мало, что существуют окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ точек $g_j\in\mathcal{K}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)\supset\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$;

2) граница ∂G совпадает с плоским углом в окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$;

3) $\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)}\cap\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)}=\varnothing$ для любых $g_j,g_k\in\mathcal{K}$, $j\ne k$;

4) если $g_j\in\overline{\Gamma}_i$ и $\Omega_{is}(g_j)=g_k$, то $\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\subset\mathcal{O}_i$ и $\Omega_{is}(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j))\subset\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$.

Для каждой точки $g_j \in \overline{\Gamma}_i \cap \mathcal{K}$ зафиксируем такое преобразование $Y_j\colon y \mapsto y'(g_j)$, являющееся композицией сдвига на вектор $-\overrightarrow{Og_j}$ и поворота на некоторый угол, что

$$Y_j(\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)) = \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0), \qquad Y_j(G \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)) = K_j \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0),$$
$$Y_j(\Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)) = \gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0), \qquad \sigma = 1 \text{ или } 2,$$

где $K_j = \{y \in \mathbb{R}^2\colon r > 0,\ |\omega| < \omega_j\}$, $\gamma_{j\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2\colon r > 0,\ \omega = (-1)^\sigma \omega_j\}$, (ω, r) — полярные координаты и $0 < \omega_j < \pi$.

Условие 1.2. Пусть $g_j \in \overline{\Gamma}_i \cap \mathcal{K}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k \in \mathcal{K}$. Тогда преобразование $Y_k \circ \Omega_{is} \circ Y_j^{-1}\colon \mathcal{O}_\varepsilon(0) \to \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$ есть композиция поворота и гомотетии.

Замечание 1.1. Учитывая предположение $\Omega_{is}(\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \subset G$, видим, что условие 1.2, в частности, означает следующее: если $g \in \Omega_{is}(\overline{\Gamma}_i \cap \mathcal{K}) \cap \overline{\Gamma}_j \cap \mathcal{K} \neq \varnothing$, то кривые $\Omega_{is}(\overline{\Gamma}_i)$ и $\overline{\Gamma}_j$ пересекаются в точке g под ненулевым углом.

Рассмотрим число ε_0, $0 < \varepsilon_0 \le \varepsilon$, удовлетворяющее следующему условию: если $g_j \in \overline{\Gamma}_i$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(g_k) \subset \Omega_{is}(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j))$. Введем функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\zeta(y) = 1$ для $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0/2}(\mathcal{K})$ и $\operatorname{supp}\zeta \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{K})$.

Определим нелокальные операторы $\mathbf{B}^1_{i\mu}$, действующие по формуле

$$\mathbf{B}^1_{i\mu}u = \sum_{s=1}^{S_i} \bigl(B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u)\bigr)(\Omega_{is}(y)), \quad y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}), \qquad \mathbf{B}^1_{i\mu}u = 0, \quad y \in \Gamma_i \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}),$$

где $(B_{i\mu s}(y, D_y)u)(\Omega_{is}(y)) = B_{i\mu s}(x, D_x)u(x)|_{x=\Omega_{is}(y)}$. Так как $\mathbf{B}^1_{i\mu}u = 0$, если $\operatorname{supp} u \subset \overline{G} \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{K})}$, то будем говорить, что операторы $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ *соответствуют нелокальным членам с носителем вблизи множества* $\mathcal{K}$.

Для $\rho > 0$ обозначим $G_\rho = \{y \in G\colon \operatorname{dist}(y, \partial G) > \rho\}$. Рассмотрим линейные операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$, удовлетворяющие следующему условию (ср. [10, 18, 15]).

Условие 1.3. Существуют числа $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$ и $\rho > 0$ такие, что выполнены неравенства

$$\|\mathbf{B}^2_{i\mu}u\|_{W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \le c_1 \|u\|_{W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})}, \tag{1.2}$$

$$\|\mathbf{B}^2_{i\mu}u\|_{W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})})} \le c_2 \|u\|_{W^{2m}(G_\rho)}. \tag{1.3}$$

Замечание 1.2. В формулах (1.2), (1.3), а также всюду далее обозначаем через $c, c_1, c_2, \dots$ и $k_1, k_2, \dots$ положительные константы, не зависящие от функций, входящих в соответствующее неравенство.

Условия 1.1–1.3 предполагаются выполненными в разд. 1–3 всюду, включая условия лемм.

Из (1.2) следует, что $\mathbf{B}^2_{i\mu}u = 0$, если $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$. Поэтому будем говорить, что операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ *соответствуют нелокальным членам с носителем вне множества* $\mathcal{K}$.

Будем изучать следующую нелокальную задачу:

$$\mathbf{A}(y, D_y)u = f(y), \qquad y \in G, \tag{1.4}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}u \equiv \mathbf{B}^0_{i\mu}u + \mathbf{B}^1_{i\mu}u + \mathbf{B}^2_{i\mu}u = 0, \qquad y \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, m, \tag{1.5}$$

где $f \in L_2(G)$. Рассмотрим пространство $W^m(G, \mathbf{B})$, состоящее из функций $u \in W^m(G)$, удовлетворяющих нелокальным условиям (1.5). Введем неограниченный оператор $\mathbf{P}\colon \mathrm{D}(\mathbf{P}) \subset L_2(G) \to L_2(G)$ по формуле

$$\mathbf{P}u = \mathbf{A}(y, D_y)u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}) = \bigl\{u \in W^m(G, \mathbf{B})\colon\ \mathbf{A}(y, D_y)u \in L_2(G)\bigr\}.$$

Определение 1.1. Функция u называется *обобщенным решением* задачи (1.4), (1.5) с правой частью $f \in L_2(G)$, если $u \in \mathrm{D}(\mathbf{P})$ и $\mathbf{P}u = f$.

Эквивалентное определение обобщенного решения также можно дать в терминах интегрального тождества [3].

Отметим, что обобщенные решения априори принадлежат пространству $W^m(G)$, тогда как условие 1.3 сформулировано для функций, принадлежащих пространству W^{2m} вне множества $\mathcal{K}$. Такая формулировка оправдана следующим результатом (см. лемму 2.1 в [3] и лемму 5.1 в [16]).

Лемма 1.1. *Пусть* $u \in W^m(G)$ *— обобщенное решение задачи* (1.4), (1.5) *с правой частью* $f \in W^k(G)$. *Тогда*

$$\|u\|_{W^{k+2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})} \le c_\delta\big(\|f\|_{W^k(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\delta_1}(\mathcal{K})})} + \|u\|_{L_2(G)}\big) \qquad \forall \delta > 0,$$

где $\delta_1 = \delta_1(\delta) > 0$ *и* $c_\delta > 0$ *не зависят от* u.

Теорема 1.1 (см. теорему 2.1 в [3]). *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3. *Тогда оператор* $\mathbf{P}$ *фредгольмов*[3].

Цель данной работы — исследовать влияние младших членов в уравнении (1.4) и нелокальных операторов $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ и $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ в краевых условиях (1.5) на индекс оператора $\mathbf{P}$.

1.2. Нелокальные задачи вблизи множества $\mathcal{K}$. При изучении задачи (1.4), (1.5) особое внимание следует уделять поведению решений вблизи множества $\mathcal{K}$ точек сопряжения. Рассмотрим соответствующие модельные задачи. Через $u_j(y)$ обозначим функцию $u(y)$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$. Если $g_j \in \overline{\Gamma}_i$, $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$ и $\Omega_{is}(y) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$, то обозначим функцию $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$. В этих обозначениях нелокальная задача (1.4), (1.5) принимает следующий вид в ε-окрестности множества (орбиты) $\mathcal{K}$:

$$\mathbf{A}(y, D_y)u_j = f(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap G,$$

$$B_{i\mu 0}(y, D_y)u_j(y)\big|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i}\big(B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u_k)\big)(\Omega_{is}(y))\big|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} = f_{i\mu}(y), \qquad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap \Gamma_i,$$

$$i \in \{1 \le i \le N \colon g_j \in \overline{\Gamma}_i\}, \qquad j = 1, \dots, N, \qquad \mu = 1, \dots, m,$$

где $f_{i\mu} = -\mathbf{B}^2_{i\mu}u$.

Пусть $y \mapsto y'(g_j)$ — замена переменных, описанная в п. 1.1. Обозначим $K^\varepsilon_j = K_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)$, $\gamma^\varepsilon_{j\sigma} = \gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)$. Введем функции

$$U_j(y') = u_j(y(y')), \quad f_j(y') = f(y(y')), \quad y' \in K^\varepsilon_j, \qquad f_{j\sigma\mu}(y') = f_{i\mu}(y(y')), \quad y' \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma},$$

где $\sigma = 1$ ($\sigma = 2$), если преобразование $y \mapsto y'(g_j)$ отображает кривую Γ_i на сторону γ_{j1} (γ_{j2}) угла K_j. Снова обозначим y' через y. Тогда в силу условия 1.2 задача (1.4), (1.5) примет вид

$$\mathbf{A}_j(y, D_y)U_j = f_j(y), \qquad y \in K^\varepsilon_j, \tag{1.6}$$

$$\sum_{k,s}\big(B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)U_k\big)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) = f_{j\sigma\mu}(y), \qquad y \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma}; \tag{1.7}$$

здесь $j, k = 1, \dots, N$, $\sigma = 1, 2$, $\mu = 1, \dots, m$, $s = 0, \dots, S_{j\sigma k}$; $\mathbf{A}_j(y, D_y)$ и $B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)$ — дифференциальные операторы порядка $2m$ и $m_{j\sigma\mu}$ ($m_{j\sigma\mu} \le m-1$) соответственно с бесконечно гладкими комплекснозначными коэффициентами; $\mathcal{G}_{j\sigma ks}$ — оператор поворота на угол $\omega_{j\sigma ks}$ и гомотетии с коэффициентом $\chi_{j\sigma ks}$ ($\chi_{j\sigma ks} > 0$). При этом $|(-1)^\sigma b_j + \omega_{j\sigma ks}| < b_k$, если $(k, s) \ne (j, 0)$ (ср. замечание 1.1), и $\omega_{j\sigma j0} = 0$, $\chi_{j\sigma j0} = 1$ (т.е. $\mathcal{G}_{j\sigma j0}y \equiv y$).

[3] См. определение A.1.

Положим $D_\chi = 2\max\{\chi_{j\sigma ks}\}$. Следующая лемма позволяет повышать гладкость решений нелокальных задач вблизи множества $\mathcal{K}$.

Лемма 1.2 (см.[4] лемму 2.3 в [3]). *Пусть* $(U_1,\dots,U_N)$ — *решение задачи* (1.6), (1.7) *такое, что*

$$U_j \in W^{2m}\big(K_j^{D_\chi\varepsilon}\cap\{|y|>\delta\}\big)\quad \forall\delta>0,\qquad U_j\in H^0_{a-2m}\big(K_j^{D_\chi\varepsilon}\big),$$

где $a\in\mathbb{R}$. *Предположим, что* $f_j\in H_a^0(K_j^\varepsilon)$ *и* $f_{j\sigma\mu}\in H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)$. *Тогда*

$$\sum_j \|U_j\|_{H_a^{2m}\left(K_j^{\varepsilon/D_\chi^3}\right)} \le c\sum_j\left(\|f_j\|_{H_a^0(K_j^\varepsilon)}+\sum_{\sigma,\mu}\|f_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)}+\|U_j\|_{H^0_{a-2m}(K_j^\varepsilon)}\right).$$

Запишем главные однородные части операторов $\mathbf{A}_j(0,D_y)$ и $B_{j\sigma\mu ks}(0,D_y)$ в полярных координатах $r^{-2m}\widetilde{\mathcal{A}}_j(\omega,D_\omega,rD_r)$, $r^{-m_{j\sigma\mu}}\widetilde{B}_{j\sigma\mu ks}(\omega,D_\omega,rD_r)$ соответственно и рассмотрим аналитическую операторнозначную функцию

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)\colon\ \prod_{j=1}^N W^{l+2m}(-\omega_j,\omega_j)\ \to\ \prod_{j=1}^N\big(W^l(-\omega_j,\omega_j)\times\mathbb{C}^{2m}\big),$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)\varphi=\left\{\widetilde{\mathcal{A}}_j(\omega,D_\omega,\lambda)\varphi_j,\ \sum_{k,s}(\chi_{j\sigma ks})^{i\lambda-m_{j\sigma\mu}}\widetilde{B}_{j\sigma\mu ks}(\omega,D_\omega,\lambda)\varphi_k(\omega+\omega_{j\sigma ks})\big|_{\omega=(-1)^\sigma\omega_j}\right\}.$$

Основные определения и факты касательно собственных чисел и собственных и присоединенных векторов аналитических операторнозначных функций можно найти в [2]. Принципиально, что спектр оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ дискретный (см. лемму 2.1 в [11]).

2. ВОЗМУЩЕНИЯ В МЛАДШИХ ЧЛЕНАХ

2.1. Переход к весовым пространствам. Введем оператор

$$A'(y,D_y)=\sum_{|\alpha|\le 2m-1}a_\alpha(y)D^\alpha, \tag{2.1}$$

где $a_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, соответствующий младшим членам. Рассмотрим возмущенный оператор $\mathbf{P}'\colon \mathrm{D}(\mathbf{P}')\subset L_2(G)\to L_2(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{P}'u=\mathbf{A}(y,D_y)u+A'(y,D_y)u,$$

$$u\in\mathrm{D}(\mathbf{P}')=\big\{u\in W^m(G,\mathbf{B})\colon\ \mathbf{A}(y,D_y)u+A'(y,D_y)u\in L_2(G)\big\}.$$

По теореме 1.1 неограниченный оператор $\mathbf{P}'$ фредгольмов (так же как и $\mathbf{P}$). Сформулируем основной результат этого раздела (его доказательство содержится в п. 2.2).

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3. *Тогда* $\operatorname{ind}\mathbf{P}'=\operatorname{ind}\mathbf{P}$.

Таким образом, младшие члены в (1.4) не влияют на индекс неограниченного оператора $\mathbf{P}$. Трудность заключается в том, что младшие члены, вообще говоря, не являются ни компактными, ни даже $\mathbf{P}$-компактными в смысле определения А.2 возмущениями. Если $m=1$, то включение $u\in\mathrm{D}(\mathbf{P})$ влечет только $u\in W^1(G)$, что гарантирует $\mathbf{P}$-ограниченность возмущения, но не его $\mathbf{P}$-компактность. Однако если $m\ge 2$, то включение $u\in\mathrm{D}(\mathbf{P})$ уже не влечет

[4] Лемма 2.3 в [3] сформулирована для $a>2m-1$, однако ее доказательство верно для любых $a\in\mathbb{R}$.

$u \in W^{2m-1}(G)$ и возмущение не является даже $\mathbf{P}$-ограниченным. Более того, в этом случае $\mathrm{D}(\mathbf{P}') \ne \mathrm{D}(\mathbf{P})$.

Чтобы преодолеть эту трудность, введем оператор $\mathbf{Q}\colon \mathrm{D}(\mathbf{Q}) \subset L_2(G) \to H_a^0(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{Q}u = \mathbf{A}(y, D_y)u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}) = \bigl\{u \in W^m(G, \mathbf{B})\colon \mathbf{A}(y, D_y)u \in H_a^0(G)\bigr\}. \tag{2.2}$$

В этом определении и всюду далее (если не оговорено противное) полагаем

$$m - 1 < a < m.$$

Мы докажем, что $\operatorname{ind}\mathbf{Q} = \operatorname{ind}\mathbf{P}$. С другой стороны, мы покажем, что оператор $A'(y, D_y)$ является $\mathbf{Q}$-компактным возмущением и, следовательно, он не влияет на индекс оператора $\mathbf{Q}$, а вместе с ним и на индекс $\mathbf{P}$.

Лемма 2.1. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-2m$ *не содержит собственных чисел оператора* $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда оператор* $\mathbf{Q}$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}\mathbf{Q} = \operatorname{ind}\mathbf{P}$.

Доказательство. 1. В [16, §6] показано, что $\mathbf{B}_{i\mu}u \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i) \dotplus R_a^{i\mu}(\Gamma_i)$, если $u \in H_a^{2m}(G)$, где $R_a^{i\mu}(\Gamma_i)$ — конечномерное подпространство в $H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ при любом $a' > 2m-1$. Обозначим

$$\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma) = H_a^0(G) \times \prod_{i=1}^{N}\prod_{\mu=1}^{m} H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i), \qquad \mathcal{R}_a^0(G,\Gamma) = \{0\} \times \prod_{i=1}^{N}\prod_{\mu=1}^{m} R_a^{i\mu}(\Gamma_i).$$

По теореме 6.1 в [16] ограниченный оператор

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{A}(y, D_y), \mathbf{B}_{i\mu}\}\colon\ H_a^{2m}(G) \to \mathcal{H}_a^0(G,\Gamma) \dotplus \mathcal{R}_a^0(G,\Gamma) \tag{2.3}$$

фредгольмов. Следовательно, в силу компактности вложения $H_a^{2m}(G) \subset L_2(G)$ (см. лемму A.1), учитывая теорему A.1, имеем

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_1\bigl(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)\dotplus\mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)} + \|u\|_{L_2(G)}\bigr). \tag{2.4}$$

2. Введем неограниченный оператор $\dot{\mathbf{Q}}\colon \mathrm{D}(\dot{\mathbf{Q}}) \subset L_2(G) \to H_a^0(G)$, действующий по формуле

$$\dot{\mathbf{Q}}u = \mathbf{A}(y, D_y)u, \qquad u \in \mathrm{D}(\dot{\mathbf{Q}}) = \{u \in H_a^{2m}(G)\colon\ \mathbf{B}_{i\mu}u = 0\}. \tag{2.5}$$

Так как $H_a^{2m}(G) \subset W^m(G)$, то $\dot{\mathbf{Q}}$ — сужение оператора $\mathbf{Q}$, т.е. $\dot{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{Q}$.

Вначале докажем, что $\dot{\mathbf{Q}}$ фредгольмов. Пусть $u \in \mathrm{D}(\dot{\mathbf{Q}})$; тогда $u \in \mathrm{D}(\mathbf{L}) = H_a^{2m}(G)$ и $\mathbf{A}(y, D_y)u \in H_a^0(G)$, $\mathbf{B}_{i\mu}u = 0$. Следовательно, оценка (2.4) принимает вид

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_1\bigl(\|\dot{\mathbf{Q}}u\|_{H_a^0(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\bigr) \qquad \forall u \in \mathrm{D}(\dot{\mathbf{Q}}). \tag{2.6}$$

Из (2.6) вытекает, что оператор $\dot{\mathbf{Q}}$ замкнут, $\dim\ker\dot{\mathbf{Q}} < \infty$ и $\mathcal{R}(\dot{\mathbf{Q}}) = \overline{\mathcal{R}(\dot{\mathbf{Q}})}$ (чтобы получить последние два свойства, нужно применить теорему A.1).

Докажем, что $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\dot{\mathbf{Q}}) < \infty$. Так как оператор $\mathbf{L}$ фредгольмов, существуют линейно независимые функции $F_1, \dots, F_d \in H_a^0(G)$ такие, что функция $f \in H_a^0(G)$ принадлежит образу оператора $\dot{\mathbf{Q}}$ тогда и только тогда, когда $(f, F_j)_{H_a^0(G)} = 0$, $j = 1, \dots, d$. Таким образом, $\dot{\mathbf{Q}}$ фредгольмов.

3. Теперь докажем, что $\mathbf{Q}$ фредгольмов. Поскольку $\ker\mathbf{Q} = \ker\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}$ фредгольмов, имеем

$$\dim\ker\mathbf{Q} = \dim\ker\mathbf{P} < \infty. \tag{2.7}$$

С другой стороны, $\mathbf{Q}$ — расширение фредгольмова оператора $\dot{\mathbf{Q}}$; следовательно,

$$\mathcal{R}(\mathbf{Q}) = \overline{\mathcal{R}(\mathbf{Q})}, \qquad \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{Q}) < \infty. \tag{2.8}$$

Таким образом, $\mathbf{Q}$ — расширение фредгольмова оператора $\dot{\mathbf{Q}}$ и имеют место соотношения (2.7) и (2.8). Применяя теорему A.2, видим, что $\mathbf{Q}$ фредгольмов.

4. В силу (2.7) нам осталось доказать, что $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{Q}) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P})$.

Пусть $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{Q}) = d_1$, где $d_1 \le d$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_2(G)$. Тогда $f \in \mathcal{R}(\mathbf{P})$ в том и только том случае, когда $f \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$, поскольку $L_2(G) \subset H_a^0(G)$. Однако включение $f \in \mathcal{R}(\mathbf{Q})$ эквивалентно соотношениям $(f, F_j)_{H_a^0(G)} = 0$, $j = 1, \dots, d_1$, где $F_1, \dots, F_{d_1} \in H_a^0(G)$ — линейно независимые функции. Используя неравенство Шварца, ограниченность вложения $L_2(G) \subset H_a^0(G)$ и теорему Рисса, видим, что эти соотношения эквивалентны следующим: $(f, f_j)_{L_2(G)} = 0$, $j = 1, \dots, d_1$, где $f_j \in L_2(G)$. Более того, функции $f_1, \dots, f_{d_1}$ линейно независимы. (В противном случае некоторая линейная комбинация функций $F_1, \dots, F_{d_1}$ была бы ортогональна в $H_a^0(G)$ любой функции из $L_2(G)$. Это невозможно, поскольку $F_1, \dots, F_{d_1}$ линейно независимы, а $L_2(G)$ плотно в $H_a^0(G)$.) Итак, доказано, что $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{P}) = d_1$. $\square$

Введем возмущенный оператор $\mathbf{Q}'\colon \mathrm{D}(\mathbf{Q}') \subset L_2(G) \to H_a^0(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{Q}'u = \mathbf{A}(y, D_y)u + A'(y, D_y)u,$$

$$u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}') = \bigl\{u \in W^m(G, \mathbf{B})\colon\ \mathbf{A}(y, D_y)u + A'(y, D_y)u \in H_a^0(G)\bigr\}.$$

В следующем пункте мы докажем, что $\operatorname{ind} \mathbf{Q}' = \operatorname{ind} \mathbf{Q}$, если прямая $\operatorname{Im} \lambda = a + 1 - 2m$ не содержит собственных чисел оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Далее, используя дискретность спектра оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ и лемму 2.1, докажем теорему 2.1.

2.2. Компактность младших членов в весовых пространствах.

Лемма 2.2. *Пусть прямая* $\operatorname{Im} \lambda = a + 1 - 2m$ *не содержит собственных чисел оператора* $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда*

$$\|u\|_{W^m(G)} \le c\bigl(\|\mathbf{Q}u\|_{H_a^0(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\bigr) \qquad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}).$$

Доказательство. Рассмотрим неограниченный оператор $\widehat{\mathbf{Q}}\colon \mathrm{D}(\widehat{\mathbf{Q}}) \subset W^m(G) \to H_a^0(G)$, действующий по формуле $\widehat{\mathbf{Q}}u = \mathbf{A}(y, D_y)u$, $u \in \mathrm{D}(\widehat{\mathbf{Q}}) = \mathrm{D}(\mathbf{Q})$. Так как оператор $\mathbf{Q}$ фредгольмов, то и оператор $\widehat{\mathbf{Q}}$ также фредгольмов. Следовательно, нужная оценка вытекает из компактности вложения $W^m(G) \subset L_2(G)$ и из теоремы A.1. $\square$

Рассмотрим число b такое, что

$$m - 1 < b < a < m. \tag{2.9}$$

Введем функцию $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, равную единице в малой окрестности точки $g_j \in \mathcal{K}$ и равную нулю вне большей окрестности точки g_j. Следующая лемма описывает поведение функций $u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q})$ вблизи множества $\mathcal{K}$.

Лемма 2.3. *Для любой функции* $u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q})$ *имеем*

$$u(y) = \sum_{j=1}^{N} P_j(y) + v(y), \tag{2.10}$$

где

$$P_j(y) = \psi_j(y) \sum_{|\alpha| \le m-2} p_{j\alpha}(y - g_j)^\alpha, \qquad p_{j\alpha} \in \mathbb{C}, \tag{2.11}$$

и $v\in H^{2m}_{b+1}(G)$ (*если* $m=1$, *полагаем* $P_j(y)\equiv 0$); *более того,*

$$\sum_{j,\alpha}|p_{j\alpha}|+\|v\|_{H^{2m}_{b+1}(G)}\le c\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big). \tag{2.12}$$

Доказательство. 1. Из леммы 1.1 следует, что $u\in W^{2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})$ для любого $\delta>0$ и

$$\|u\|_{W^{2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})}\le k_{1\delta}\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big), \tag{2.13}$$

где $k_{1\delta}$ не зависит от u. Следовательно, достаточно изучить поведение u вблизи множества $\mathcal{K}$.

По лемме A.2 функция $u\in W^m(G)$ представима в виде (2.10), где $P_j(y)$ определено в (2.11), $v\in H^m_{b-m+1}(G)$ и

$$\sum_{j,\alpha}|p_{j\alpha}|+\|v\|_{H^m_{b-m+1}(G)}\le k_2\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big) \tag{2.14}$$

(чтобы получить (2.14), мы применили также лемму 2.2).

Более того, из соотношений (2.10), (2.13) и (2.14) получаем

$$\|v\|_{W^{2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})})}\le k_{2\delta}\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big)\qquad\forall\delta>0, \tag{2.15}$$

где $k_{2\delta}$ не зависит от u. Осталось доказать, что $v\in H^{2m}_{b+1}(G)$.

2. Используя (1.4) и (1.5), видим, что v — решение задачи

$$\mathbf{A}(y,D_y)v=f-\mathbf{A}(y,D_y)P\equiv f',\qquad \mathbf{B}^0_{i\mu}v+\mathbf{B}^1_{i\mu}v=-\mathbf{B}_{i\mu}P-\mathbf{B}^2_{i\mu}v\equiv f'_{i\mu}, \tag{2.16}$$

где $P(y)=\sum_{j=1}^N P_j(y)$ и $f=\mathbf{Q}u\in H^0_a(G)$. Из ограниченности вложения $H^0_a(G)\subset H^0_{b+1}(G)$ (см. (2.9)) и из оценки коэффициентов $p_{j\alpha}$ (см. (2.14)) следует, что

$$\|f'\|_{H^0_{b+1}(G)}\le k_3\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big). \tag{2.17}$$

Аналогично, используя дополнительно неравенства (1.2) и (2.15), получаем $f'_{i\mu}=-\mathbf{B}_{i\mu}P-$ $-\mathbf{B}^2_{i\mu}v\in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ и

$$\|f'_{i\mu}\|_{W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\le k_4\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big). \tag{2.18}$$

С другой стороны, $v\in H^m_{b-m+1}(G)$; следовательно, $f'_{i\mu}=\mathbf{B}^0_{i\mu}v+\mathbf{B}^1_{i\mu}v\in H^{m-m_{i\mu}-1/2}_{b-m+1}(\Gamma_i)$. Покажем, что

$$\|f'_{i\mu}\|_{H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{b+1}(\Gamma_i)}\le k_5\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big). \tag{2.19}$$

Для этого зафиксируем i и μ и обозначим $\Gamma=\Gamma_i$. Пусть $g\in\overline{\Gamma}\setminus\Gamma$. Без ограничения общности считаем, что $g=0$ и Γ совпадает с осью Oy_1 в достаточно малой окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon(0)$ начала координат. Положим

$$G^\varepsilon=G\cap\mathcal{O}_\varepsilon(0),\qquad \Gamma^\varepsilon=\Gamma\cap\mathcal{O}_\varepsilon(0),$$

и пусть $H^k_a(G^\varepsilon)=H^k_a(G^\varepsilon,\{0\})$.

Используя утверждение 1) леммы A.3, представим $f'_{i\mu}\in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma^\varepsilon)$ вблизи начала координат следующим образом:

$$f'_{i\mu}(r)=P_1(r)+f''_{i\mu}(r),\qquad 0<r<\varepsilon,$$

где $P_1(r)$ — полином порядка $2m-m_{i\mu}-2$, а $f''_{i\mu}\in H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{b+1}(\Gamma^\varepsilon)$ (на самом деле число $b+1$ в последнем соотношении можно заменить любым положительным числом). Таким образом, $f'_{i\mu}, f''_{i\mu}\in H^{m-m_{i\mu}-1/2}_{b-m+1}(\Gamma^\varepsilon)$; значит, $P_1\in H^{m-m_{i\mu}-1/2}_{b-m+1}(\Gamma^\varepsilon)$, т.е. P_1 состоит из одночленов степени не ниже $m-m_{i\mu}-1$. Следовательно, $P_1\in H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{b+1}(\Gamma^\varepsilon)$. Используя утверждение 3) леммы A.3, получаем

$$\|f'_{i\mu}\|_{H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{b+1}(\Gamma^\varepsilon)}\le \|P_1\|_{H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{b+1}(\Gamma^\varepsilon)}+\|f''_{i\mu}\|_{H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{b+1}(\Gamma^\varepsilon)}\le k_6\|f'_{i\mu}\|_{W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma^\varepsilon)}.$$

Совместно с (2.18) эта оценка дает (2.19).

3. Применяя лемму 1.2 к задаче (2.16) и учитывая (2.15), (2.17), (2.19) и (2.14), имеем

$$\|v\|_{H^{2m}_{b+1}(G)}\le k_7\Bigg(\|f'\|_{H^0_{b+1}(G)}+\sum_{i,\mu}\|f'_{i\mu}\|_{H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{b+1}(\Gamma_i)}+\|v\|_{H^0_{b-2m+1}(G)}\Bigg)\le$$
$$\le k_8\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big).$$

Совместно с (2.14) это неравенство дает (2.12). $\square$

Следующий результат вытекает из леммы 2.3.

Следствие 2.1. *Пусть $A'(y,D_y)$ — дифференциальный оператор порядка $2m-1$, определенный в* (2.1). *Тогда*

$$\|A'(y,D_y)u\|_{H^1_{b+1}(G)}\le c\big(\|\mathbf{Q}u\|_{H^0_a(G)}+\|u\|_{L_2(G)}\big)\qquad \forall u\in \mathrm{D}(\mathbf{Q}). \tag{2.20}$$

Теперь мы можем доказать, что младшие члены в уравнении (1.4) не влияют на индекс оператора $\mathbf{Q}$.

Лемма 2.4. *Пусть прямая $\operatorname{Im}\lambda=a+1-2m$ не содержит собственных чисел оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Тогда операторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$ фредгольмовы и $\operatorname{ind}\mathbf{Q}'=\operatorname{ind}\mathbf{Q}$.*

Доказательство. По лемме 2.1 $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$ фредгольмовы.

Введем оператор $\mathbf{A}'\colon \mathrm{D}(\mathbf{A}')\subset L_2(G)\to H^0_a(G)$, действующий по формуле $\mathbf{A}'u=\mathbf{A}'(y,D_y)u$, $u\in\mathrm{D}(\mathbf{A}')=\mathrm{D}(\mathbf{Q})$. Из следствия 2.1 и из компактности вложения $H^1_{b+1}(G)\subset H^0_a(G)$ (см. (2.9) и лемму A.1) вытекает, что $\mathbf{Q}'=\mathbf{Q}+\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}'$ есть $\mathbf{Q}$-компактный оператор. Следовательно, $\operatorname{ind}\mathbf{Q}'=\operatorname{ind}\mathbf{Q}$ по теореме A.4. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Из леммы 2.1 в [11] следует, что спектр оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ дискретный. Следовательно, найдется число a такое, что $m-1<a<m$ и прямая $\operatorname{Im}\lambda=a+1-2m$ не содержит собственных чисел оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Тогда в силу лемм 2.1 и 2.4 $\operatorname{ind}\mathbf{P}'=\operatorname{ind}\mathbf{Q}'=\operatorname{ind}\mathbf{Q}=\operatorname{ind}\mathbf{P}$. $\square$

3. ВОЗМУЩЕНИЯ В НЕЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

3.1. Формулировка основного результата. В этом разделе исследуется устойчивость индекса нелокальных операторов под воздействием возмущений в нелокальных условиях операторами того же вида, что $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ и $\mathbf{B}^2_{i\mu}$. Эта ситуация более сложная, чем рассмотренная в разд. 2, поскольку нелокальные возмущения явным образом меняют область определения соответствующих неограниченных операторов. Следовательно, эти возмущения не могут рассматриваться как относительно компактные. Мы предложим иной подход, основанный на понятии *раствора между замкнутыми операторами*.

Рассмотрим дифференциальные операторы $C_{i\mu s}(y, D_y)$, $i = 1, \dots, N$, $\mu = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots$ $\dots, S'_i$, имеющие тот же порядок $m_{i\mu}$, что и операторы $B_{i\mu s}$ в п. 1.1, и действующие по формуле

$$C_{i\mu s}(y, D_y)u = \sum_{|\alpha| \le m_{i\mu}} c_{i\mu s\alpha}(y) D^\alpha u,$$

где $c_{i\mu s\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Введем оператор $\mathbf{C}^1_{i\mu}$ по формуле

$$\mathbf{C}^1_{i\mu}u = \sum_{s=1}^{S'_i} \bigl(C_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u)\bigr)(\Omega'_{is}(y)), \quad y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}), \qquad \mathbf{C}^1_{i\mu}u = 0, \quad y \in \Gamma_i \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}),$$

где ζ и ε те же, что в определении операторов $\mathbf{B}^1_{i\mu}$, а Ω'_{is} — C^∞-диффеоморфизмы, обладающие теми же свойствами, что и Ω_{is} (в частности, они удовлетворяют условию 1.2, где S_i и Ω_{is} следует заменить на S'_i и Ω'_{is}).

Рассмотрим операторы $\mathbf{C}^2_{i\mu}$, удовлетворяющие условию 1.3, в котором $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ следует заменить на $\mathbf{C}^2_{i\mu}$. Положим

$$\mathbf{C}_{i\mu} = \mathbf{C}^1_{i\mu} + \mathbf{C}^2_{i\mu}.$$

Теорема об устойчивости индекса будет доказана при следующих условиях (которые предполагаются выполненными наряду с условиями 1.1–1.3 всюду в этом разделе, включая условия лемм).

Условие 3.1 (см., например, [9]). Система $\{\mathbf{B}^0_{i\mu}\}_{\mu=1}^m$ является нормальной на $\overline{\Gamma}_i$, $i = 1, \dots, N$.

Условие 3.2. $D^\sigma c_{i\mu s\alpha}(g_{i1}) = D^\sigma c_{i\mu s\alpha}(g_{i2}) = 0$, $|\sigma| = 0, \dots, (m-1) - (m_{i\mu} - |\alpha|)$.

Обозначим через g_{i1} и g_{i2} концы кривой $\overline{\Gamma}_i$. Пусть τ_{i1} (τ_{i2}) — единичный вектор, касательный к кривой $\overline{\Gamma}_i$ в точке g_{i1} (g_{i2}).

Условие 3.3.

$$\frac{\partial^\beta \mathbf{C}^2_{i\mu}u}{\partial \tau^\beta_{i1}}\bigg|_{y=g_{i1}} = \frac{\partial^\beta \mathbf{C}^2_{i\mu}u}{\partial \tau^\beta_{i2}}\bigg|_{y=g_{i2}} = 0, \qquad \beta = 0, \dots, m-1-m_{i\mu}, \quad \forall u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})}).$$

При выполнении условий 3.2 и 3.3 справедлива следующая лемма (напомним, что $m-1 < a < m$).

Лемма 3.1. *Имеют место следующие неравенства*:

$$\|\mathbf{C}^1_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \le c_1 \|u\|_{H^{2m}_{a+m}(G)}, \tag{3.1}$$

$$\|\mathbf{C}^2_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \le c_2 \|u\|_{W^{2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})}. \tag{3.2}$$

Доказательство. 1. Для любой функции $u \in H^{2m}_{a+m}(G)$ имеем

$$(D^\alpha u)(\Omega'_{is}(y))\big|_{\Gamma_i} \in H^{2m-|\alpha|-1/2}_{a+m}(\Gamma_i) \subset H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{a+m-(m_{i\mu}-|\alpha|)}(\Gamma_i).$$

Следовательно, в силу условия 3.2 и леммы A.5 имеем $(c_{i\mu s\alpha}D^\alpha u)(\Omega'_{is}(y))|_{\Gamma_i} \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Оценка (3.1) вытекает из ограниченности указанных вложений и неравенства (A.5).

2. Из условия 1.3 (относительно $\mathbf{C}^2_{i\mu}$) следует, что $\mathbf{C}^2_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, если $u \in W^{2m}(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$. Теперь из условия 3.3 и леммы A.4 вытекает, что $\mathbf{C}^2_{i\mu}u \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Оценка (3.2) следует из неравенства (1.2) (примененного к $\mathbf{C}^2_{i\mu}$) и из (A.2). $\square$

В этом разделе будем для краткости писать $\mathbf{A} = \mathbf{A}(y, D_y)$. Рассмотрим операторы $\mathbf{P}_t\colon \mathrm{D}(\mathbf{P}_t) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, $t \in \mathbb{C}$, действующие по формуле

$$\mathbf{P}_t u = \mathbf{A}u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{P}_t) = \bigl\{u \in W^m(G, \mathbf{B} + t\mathbf{C})\colon\ \mathbf{A}u \in L_2(G)\bigr\},$$

где $W^m(G, \mathbf{B} + t\mathbf{C})$ — пространство функций $u \in W^m(G)$, удовлетворяющих нелокальным условиям $(\mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + t\mathbf{C}_{i\mu})u = 0$. Сформулируем основной результат этого раздела (его доказательство приведено в п. 3.2).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3 *и* 3.1–3.3. *Тогда* $\operatorname{ind}\mathbf{P}_t = \mathrm{const}\ \forall t \in \mathbb{C}$.

3.2. Раствор между нелокальными операторами в весовых пространствах. Так же как и в разд. 2, изучим предварительно операторы $\mathbf{Q}_t\colon \mathrm{D}(\mathbf{Q}_t) \subset L_2(G) \to H^0_a(G)$, действующие по формуле

$$\mathbf{Q}_t u = \mathbf{A}u, \qquad u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_t) = \bigl\{u \in W^m(G, \mathbf{B} + t\mathbf{C})\colon\ \mathbf{A}u \in H^0_a(G)\bigr\},$$

где $t \in \mathbb{C}$ и $W^m(G, \mathbf{B}+t\mathbf{C})$ — то же пространство, что и в определении оператора $\mathbf{P}_t$. Операторы $\mathbf{P}_t$ и $\mathbf{Q}_t$ соответствуют задаче

$$\mathbf{A}u = f(y), \qquad y \in G, \tag{3.3}$$

$$(\mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + t\mathbf{C}_{i\mu})u = 0, \qquad y \in \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, m. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. В определении оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ (см. п. 1.2) фигурируют главные однородные части операторов $\mathbf{A}$ и $B_{i\mu s}(y, D_y)$ в точках множества $\mathcal{K}$. В силу условия 3.2 главные однородные части операторов $C_{i\mu s}(y, D_y)$ равны нулю в этих точках. Следовательно, при любом t задаче (3.3), (3.4) соответствует один и тот же оператор $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$.

Зафиксируем число a такое, что $m - 1 < a < m$ и прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ не содержит собственных чисел оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ (что возможно в силу дискретности спектра оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$). Из замечания 3.1 и леммы 2.1 следует, что оператор $\mathbf{Q}_t$ фредгольмов. Следовательно, его график $\operatorname{Gr}\mathbf{Q}_t$ — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $L_2(G) \times H^0_a(G)$; в этом пространстве зададим норму

$$\|(u, f)\| = \bigl(\|u\|^2_{L_2(G)} + \|f\|^2_{H^0_a(G)}\bigr)^{1/2} \qquad \forall (u, f) \in L_2(G) \times H^0_a(G).$$

Положим

$$\delta(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}) = \sup_{u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_t)\colon \|(u, \mathbf{Q}_t u)\| = 1} \operatorname{dist}\bigl((u, \mathbf{Q}_t u), \operatorname{Gr}\mathbf{Q}_{t+s}\bigr). \tag{3.5}$$

По определению А.3 число $\widehat{\delta}(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}) = \max\{\delta(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}), \delta(\mathbf{Q}_{t+s}, \mathbf{Q}_t)\}$ есть *раствор между* $\mathbf{Q}_t$ *и* $\mathbf{Q}_{t+s}$.

Доказательство теоремы об устойчивости индекса основано на теореме А.5 и следующем результате (который будет доказан ниже).

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.3 *и* 3.1–3.3, *и пусть прямые* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - m$ *не содержат собственных чисел оператора* $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. *Тогда*

$$\widehat{\delta}(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}) \le c_t s, \qquad |s| \le s_t, \tag{3.6}$$

где $s_t > 0$ *достаточно мало, а* $c_t > 0$ *не зависит от* s.

Вначале установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.2. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-m$ *не содержит собственных чисел оператора* $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*. Тогда при всех достаточно малых* $|s|$ *имеем*

$$\|u\|_{H^{2m}_{a+m}(G)} \le c_t\|(u,\mathbf{A}u)\| \qquad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s}), \tag{3.7}$$

где $c_t > 0$ *не зависит от* s *и* u*.*

Доказательство. 1. Рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathbf{M}_t = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + t\mathbf{C}_{i\mu}\}\colon\ H^{2m}_{a+m}(G) \to \mathcal{H}^0_{a+m}(G,\Gamma). \tag{3.8}$$

Если $v \in H^{2m}_{a+m}(G)$, то $(\mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + t\mathbf{C}^1_{i\mu})v \in H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{a+m}(\Gamma_i)$ и $\mathbf{C}^2_{i\mu}v \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i) \subset \subset H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{a+m}(\Gamma_i)$ (это следует из условия 1.3 и утверждения 1) леммы А.3); таким образом, оператор $\mathbf{M}_t$ корректно определен.

В силу теоремы 6.1 в [16] и замечания 3.1 оператор $\mathbf{M}_t$ фредгольмов для любого $t \in \mathbb{C}$. Следовательно, применяя теорему А.1 и учитывая компактность вложения $H^{2m}_{a+m} \subset L_2(G)$ при $a < m$ (см. лемму А.1), получим

$$\|u\|_{H^{2m}_{a+m}(G)} \le k_1\bigl(\|\mathbf{M}_t u\|_{\mathcal{H}^0_{a+m}(G,\Gamma)} + \|u\|_{L_2(G)}\bigr) \qquad \forall u \in H^{2m}_{a+m}(G), \tag{3.9}$$

где $k_1 > 0$ может зависеть от t, но не зависит от s и u.

2. Теперь рассмотрим функции $u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s})$. По лемме 2.3 $u \in H^{2m}_{a+m}(G)$. В силу (3.9), оценки (1.2) (для $\mathbf{C}^2_{i\mu}$) и ограниченности вложения $W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i) \subset H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_{a+m}(\Gamma_i)$ (см. утверждение 1) леммы А.3)

$$\|u\|_{H^{2m}_{a+m}(G)} \le k_1\bigl(\|\mathbf{A}u\|_{H^0_{a+m}(G)} + \|u\|_{L_2(G)}\bigr) + k_2|s|\cdot\|u\|_{H^{2m}_{a+m}(G)} \qquad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s}),$$

где $k_2 > 0$ может зависеть от t, но не зависит от s и u. Выбирая $|s| \le 1/(2k_2)$ и используя ограниченность вложения $H^0_a(G) \subset H^0_{a+m}(G)$, получаем (3.7). $\square$

Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает следующий результат.

Следствие 3.1. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-m$ *не содержит собственных чисел оператора* $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$*. Тогда*

$$\|\mathbf{C}_{i\mu}u\|_{H^{2m-m_{i\mu}-1/2}_a(\Gamma_i)} \le c_t\|(u,\mathbf{A}u)\| \qquad \forall u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s}), \tag{3.10}$$

где $c_t > 0$ *не зависит от* s *и* u*, при условии, что* $|s|$ *достаточно мал.*

Следующие две леммы позволяют сводить задачи с неоднородными нелокальными условиями к задачам с однородными нелокальными условиями. Именно в этом месте используется условие 3.1.

Лемма 3.3 (см. лемму 8.1 в [16])**.** *Пусть* $a \in \mathbb{R}$ *и* $f_{j\sigma\mu} \in H^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}_a(\gamma_{j\sigma})$ *— правые части в соотношениях* (1.7) *такие, что* $\operatorname{supp} f_{j\sigma\mu} \subset \gamma^{\varepsilon/2}_{j\sigma}$*. Тогда существуют функции* $U_j \in H^{2m}_a(K_j)$ *такие, что* $\operatorname{supp} U_j \subset \overline{K^\varepsilon_j}$,

$$B_{j\sigma\mu j0}(y,D_y)U_j(y) = f_{j\sigma\mu}(y), \qquad (B_{j\sigma\mu ks}(y,D_y)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) = 0, \qquad y \in \gamma_{j\sigma}, \quad (k,s) \ne (j,0),$$

$$\sum_j \|U_j\|_{H^{2m}_a(K_j)} \le c\sum_{j,\sigma,\mu}\|f_{j\sigma\mu}\|_{H^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}_a(\gamma_{j\sigma})}.$$

Лемма 3.4. *Пусть* $f_{i\mu} \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. *Тогда для любого* $t \in \mathbb{C}$ *и* $|s| \le 1$ *существует функция* $u \in H_a^{2m}(G)$ *такая, что*

$$(\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu})u = f_{i\mu}, \tag{3.11}$$

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \le c_t \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}, \tag{3.12}$$

где $c_t > 0$ *не зависит от* $f_{i\mu}$ *и* s.

Доказательство. Используя лемму 3.3 и метод разбиения единицы, построим функцию $v \in H_a^{2m}(G)$ такую, что

$$\operatorname{supp} v \subset \overline{G} \setminus \overline{G}_\rho, \tag{3.13}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}^0 v = f_{i\mu}, \qquad \mathbf{B}_{i\mu}^1 v = 0, \qquad \mathbf{C}_{i\mu}^1 v = 0, \tag{3.14}$$

$$\|v\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_1 \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}, \tag{3.15}$$

где $k_1 > 0$ не зависит от $f_{i\mu}$, t и s.

В силу (3.13) и (1.3) $\operatorname{supp} \mathbf{C}_{i\mu}^2 v \subset \mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})$. Более того, по лемме 3.1 $\mathbf{C}_{i\mu}^2 v \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Следовательно, снова применяя лемму 3.3 и метод разбиения единицы, можем построить функцию $w \in H_a^{2m}(G)$ такую, что

$$\operatorname{supp} w \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K}), \tag{3.16}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu}^0 w = -(t+s)\mathbf{C}_{i\mu}^2 v, \qquad \mathbf{B}_{i\mu}^1 w = 0, \qquad \mathbf{C}_{i\mu}^1 w = 0, \tag{3.17}$$

$$\|w\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_1 \sum_{i,\mu} \|(t+s)\mathbf{C}_{i\mu}^2 v\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}.$$

Так как $|s| \le 1$, то, используя неравенства (3.2) и (3.15), из последнего неравенства выводим

$$\|w\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_1 \sum_{i,\mu} (|t|+1) \|\mathbf{C}_{i\mu}^2 v\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \le k_2 \|v\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_2 k_1 \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}, \tag{3.18}$$

где $k_2 > 0$ может зависеть от t, но не зависит от $f_{i\mu}$ и s.

В силу (3.16) и (3.2) $\mathbf{C}_{i\mu}^2 w = 0$. Отсюда, из (3.14) и (3.17) следует, что $u = v + w$ удовлетворяет соотношениям (3.11). Неравенство (3.12) вытекает из неравенств (3.15) и (3.18). □

Замечание 3.2. Нетрудно видеть, что если $(\mathbf{C}_{i\mu}^2 v)(y) = 0$ при $y \in \mathcal{O}_\varkappa(\mathcal{K})$ для некоторого $\varkappa > 0$ и любой $v \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})$, то лемма 3.4 справедлива при всех $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 3.2. 1. Нам надо доказать неравенства, аналогичные неравенству (3.6), в котором величину $\widehat{\delta}(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s})$ следует заменить на $\delta(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s})$ и $\delta(\mathbf{Q}_{t+s}, \mathbf{Q}_t)$. Докажем неравенство

$$\delta(\mathbf{Q}_t, \mathbf{Q}_{t+s}) \le c_t |s|, \qquad |s| \le s_t. \tag{3.19}$$

(Доказательство соответствующего неравенства для $\delta(\mathbf{Q}_{t+s}, \mathbf{Q}_t)$ проводится аналогично.)

Зафиксируем произвольное число t и рассмотрим функцию $u \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_t)$. Согласно определению (3.5) достаточно найти функцию $v_s \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s})$ (зависящую от u) такую, что

$$\|u - v_s\|_{L_2(G)} + \|\mathbf{A}u - \mathbf{A}v_s\|_{H_a^0(G)} \le k_1 |s| \cdot \|(u, \mathbf{A}u)\|, \tag{3.20}$$

где $|s|$ достаточно мал, а $k_1, k_2, \ldots > 0$ могут зависеть от t, но не зависят от u и s.

Будем искать $v_s \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s})$ в виде

$$v_s = u + w_s, \tag{3.21}$$

где $w_s \in H_a^{2m}(G)$ — решение задачи

$$\mathbf{A}w_s = \sum_{j=1}^{J_s} \beta_j^s f_j^s, \qquad (\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu})w_s = -s\mathbf{C}_{i\mu}u; \tag{3.22}$$

числа J_s и β_j^s и функции $f_j^s \in H_a^0(G)$ определим ниже так, чтобы существовало решение $w_s \in H_a^{2m}(G)$.

2. Чтобы решить задачу (3.22), вначале заметим, что $\mathbf{C}_{i\mu}u \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ в силу следствия 3.1. Следовательно, применяя лемму 3.4, можем построить функцию $W_s \in H_a^{2m}(G)$ такую, что

$$(\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu})W_s = -s\mathbf{C}_{i\mu}u, \tag{3.23}$$

$$\|W_s\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_2|s| \sum_{i,\mu} \|\mathbf{C}_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}. \tag{3.24}$$

Из (3.24) и (3.10) получаем

$$\|W_s\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_3|s| \cdot \|(u, \mathbf{A}u)\|. \tag{3.25}$$

Очевидно, задача (3.22) эквивалентна следующей:

$$\mathbf{A}Y_s = -\mathbf{A}W_s + \sum_{j=1}^{J_s} \beta_j^s f_j^s, \qquad (\mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu})Y_s = 0, \tag{3.26}$$

где

$$Y_s = w_s - W_s \in H_a^{2m}(G). \tag{3.27}$$

3. Чтобы решить задачу (3.26), рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathbf{L}_t = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + t\mathbf{C}_{i\mu}\}\colon\ H_a^{2m}(G) \to \mathcal{H}_a^0(G, \Gamma). \tag{3.28}$$

Заметим, что $\mathbf{C}_{i\mu}^2 v \in H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ для любой $v \in H_a^{2m}(G)$ по лемме 3.1; поэтому в определении оператора $\mathbf{L}_t$ можем писать $\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)$ вместо $\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma) \dot{+} \mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)$ (ср. (2.3)). Из теоремы 6.1 в [16] и замечания 3.1 следует, что оператор $\mathbf{L}_t$ фредгольмов для любого $t \in \mathbb{C}$.

Разложим пространство $H_a^{2m}(G)$ в ортогональную сумму $H_a^{2m}(G) = \ker \mathbf{L}_t \oplus E_t$, где E_t — замкнутое подпространство в $H_a^{2m}(G)$. Очевидно, оператор

$$\mathbf{L}_t' = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + t\mathbf{C}_{i\mu}\}\colon\ E_t \to \mathcal{H}_a^0(G, \Gamma) \tag{3.29}$$

фредгольмов и его ядро тривиально. Отсюда, в частности, имеем

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_4 \|\mathbf{L}_t' u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)} \qquad \forall u \in E_t. \tag{3.30}$$

Пусть $J = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathbf{L}_t')$. Из леммы 3.1 и теоремы А.3 следует, что оператор

$$\mathbf{L}_{ts}' = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}_{i\mu}^0 + \mathbf{B}_{i\mu}^1 + (t+s)\mathbf{C}_{i\mu}\}\colon\ E_t \to \mathcal{H}_a^0(G, \Gamma)$$

также фредгольмов, его ядро тривиально и $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{L}'_{ts}) = J$ при условии, что $|s| \le s_t$, где $s_t > 0$ достаточно мало. Более того, используя оценки (3.30), (3.1) и (3.2), имеем при всех $u \in E_t$

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_4\left(\|\mathbf{L}'_{ts}u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)} + s_t\sum_{i,\mu}\|\mathbf{C}_{i\mu}u\|_{H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\right) \le k_5\Big(\|\mathbf{L}'_{ts}u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)} + s_t\|u\|_{H_a^{2m}(G)}\Big).$$

Выбирая $s_t \le 1/(2k_6)$, получим

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_6\|\mathbf{L}'_{ts}u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)} \qquad \forall u \in E_t. \tag{3.31}$$

Так как $\mathbf{L}'_{ts}$ фредгольмов, множество $\{f \in H_a^0(G)\colon (f,0) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}'_{ts})\}$ замкнуто и имеет конечную коразмерность J_s в $H_a^0(G)$. Нетрудно видеть, что $J_s \le J$.

Пусть $f_1^s, \dots, f_{J_s}^s$ — ортонормированный базис в пространстве

$$H_a^0(G) \ominus \{f \in H_a^0(G)\colon\ (f,0) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}'_{ts})\}.$$

Положим $\beta_j^s = (\mathbf{A}W_s, f_j^s)_{H_a^0(G)}$. Тогда задача (3.26) имеет и притом единственное решение $Y_s \in E_t$; в силу (3.31) и (3.25) имеем

$$\|Y_s\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_6\left(\|\mathbf{A}W_s\|_{H_a^0(G)} + \sum_{j=1}^{J_s}|\beta_j^s|\right) \le k_7|s|\cdot\|(u,\mathbf{A}u)\| + k_6J\max\{\beta_1^s,\dots,\beta_{J_s}^s\}. \tag{3.32}$$

Оценивая $\beta_j^s = (\mathbf{A}W_s, f_j^s)_{H_a^0(G)}$ при помощи неравенства Шварца и используя (3.25), получим

$$|\beta_j^s| \le \|\mathbf{A}W_s\|_{H_a^0(G)} \le k_8|s|\cdot\|(u,\mathbf{A}u)\|.$$

Отсюда и из (3.32) вытекает

$$\|Y_s\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_9|s|\cdot\|(u,\mathbf{A}u)\|. \tag{3.33}$$

4. Учитывая равенство (3.27), из оценок (3.25) и (3.33) выводим

$$\|w_s\|_{L_2(G)} \le k_{10}\|w_s\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_{11}|s|\cdot\|(u,\mathbf{A}u)\|, \tag{3.34}$$

$$\|\mathbf{A}w_s\|_{H_a^0(G)} \le k_{12}\|w_s\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_{12}k_{11}|s|\cdot\|(u,\mathbf{A}u)\|, \tag{3.35}$$

где $w_s = Y_s + W_s$ — решение задачи (3.22).

Из ограниченности вложения $H_a^{2m}(G) \subset W^m(G)$ следует, что функция v_s, определенная в (3.21), принадлежит $W^m(G)$; более того, $v_s \in \mathrm{D}(\mathbf{Q}_{t+s})$ в силу второго соотношения в (3.22). Нужное нам неравенство (3.20) вытекает из (3.21), (3.34) и (3.35). □

Доказательство теоремы 3.1. Из леммы 2.1 в [11] следует, что спектр оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ дискретный. Следовательно, найдется число a такое, что $m-1 < a < m$ и прямые $\operatorname{Im}\lambda = a+1-2m$ и $\operatorname{Im}\lambda = a+1-m$ не содержат собственных чисел оператора $\widetilde{\mathcal{L}}(\lambda)$. Зафиксируем два произвольных числа $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. В силу леммы 2.1 и замечания 3.1 операторы $\mathbf{Q}_t$ фредгольмовы для всех t из отрезка $I_{t_1t_2} \subset \mathbb{C}$ с концами в точках t_1, t_2. Покрывая каждую точку отрезка $I_{t_1t_2}$ кругом достаточно малого радиуса, выбирая конечное подпокрытие и применяя теоремы 3.2 и A.5, видим, что $\operatorname{ind}\mathbf{Q}_{t_1} = \operatorname{ind}\mathbf{Q}_{t_2}$. Отсюда и из леммы 2.1 следует, что $\operatorname{ind}\mathbf{P}_{t_1} = \operatorname{ind}\mathbf{P}_{t_2}$. □

Замечание 3.3. Теоремы 2.1 и 3.1 справедливы и тогда, когда множество $\mathcal{K}$ состоит из конечного числа непересекающихся орбит. Изменения, которые необходимо внести в доказательства, очевидны.

А. ПРИЛОЖЕНИЕ

А.1. Некоторые свойства пространств Соболева и весовых пространств. Пусть G и Γ_i те же, что и в разд. 1.

Лемма А.1 (см. лемму 3.5 в [7]). *Пусть $k_2 > k_1$ и $k_2 - a_2 > k_1 - a_1$. Тогда пространство $H^{k_2}_{a_2}(G)$ компактно вложено в $H^{k_1}_{a_1}(G)$.*

Зафиксируем произвольный индекс i и положим $\Gamma = \Gamma_i$. Пусть $g \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$. Без ограничения общности будем считать, что $g = 0$ и Γ совпадает с осью Oy_1 в достаточно малой окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon(0)$ начала координат. Введем обозначения $G^\varepsilon = G \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)$, $\Gamma^\varepsilon = \Gamma \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)$ и положим $H^k_a(G^\varepsilon) = H^k_a(G^\varepsilon, \{0\})$.

Лемма А.2. *Если $u \in W^k(G^\varepsilon)$, $k \ge 1$, то справедливы следующие утверждения*:

1) *$u(y) = P(y) + v(y)$ для $y \in G^\varepsilon$, где $P(y) = \sum_{|\alpha| \le k-2} p_\alpha y^\alpha$, $v \in W^k(G^\varepsilon) \cap H^k_\delta(G^\varepsilon)$ $\forall \delta > 0$ (если $k = 1$, полагаем $P(y) \equiv 0$); в частности, $u \in H^k_{k-1+\delta}(G^\varepsilon)$;*
2) *$D^\alpha u|_{y=0} = D^\alpha P|_{y=0}$ для $|\alpha| \le k-2$;*
3) *$\sum_{|\alpha| \le k-2} |p_\alpha| + \|v\|_{H^k_\delta(G^\varepsilon)} \le c_\delta \|u\|_{W^k(G^\varepsilon)}$, где $c_\delta > 0$ не зависит от u.*

Доказательство вытекает из леммы 4.9 в [7] при $k = 1$ и из леммы 4.11 в [7] при $k \ge 2$.

Лемма А.3. *Если $\psi \in W^{k-1/2}(\Gamma^\varepsilon)$, $k \ge 1$, то справедливы следующие утверждения*:

1) *$\psi(r) = P_1(r) + \varphi(r)$ для $0 < r < \varepsilon$, где $P_1(r) = \sum_{\beta=0}^{k-2} p_\beta r^\beta$, $\varphi \in W^{k-1/2}(\Gamma^\varepsilon) \cap H^{k-1/2}_\delta(\Gamma^\varepsilon)$ $\forall \delta > 0$ (если $k = 1$, полагаем $P_1(r) \equiv 0$); в частности, $\psi \in H^{k-1/2}_{k-1+\delta}(\Gamma^\varepsilon)$;*
2) *$(d^\beta \psi / dr^\beta)|_{r=0} = (d^\beta P_1 / dr^\beta)|_{r=0}$ для $\beta = 0, \dots, k-2$;*
3) *$\sum_{\beta=0}^{k-2} |p_\beta| + \|\varphi\|_{H^{k-1/2}_\delta(\Gamma^\varepsilon)} \le c_\delta \|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma^\varepsilon)}$, где $c_\delta > 0$ не зависит от ψ.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $u \in W^k(G^\varepsilon)$ такую, что $u|_{\Gamma^\varepsilon} = \psi$ и $\|u\|_{W^k(G^\varepsilon)} \le 2\|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma^\varepsilon)}$. Для завершения доказательства осталось применить лемму А.2. $\square$

Лемма А.4. *Пусть $\psi \in W^{k-1/2}(\Gamma)$, $k \ge 2$, и пусть*

$$\left.\frac{d^s \psi}{dr^s}\right|_{y=0} = 0, \qquad s = 0, \dots, l, \tag{A.1}$$

для фиксированного $l \le k-2$. Тогда $\psi \in H^{k-1/2}_{k-2-l+\delta}(\Gamma)$ $\forall \delta > 0$ и

$$\|\psi\|_{H^{k-1/2}_{k-2-l+\delta}(\Gamma)} \le c_\delta \|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)}, \tag{A.2}$$

где $c_\delta > 0$ не зависит от ψ.

Доказательство. Из соотношений (А.1) и леммы А.3 (утверждения 1) и 2)) следует, что

$$\psi(r) = \sum_{\beta=l+1}^{k-2} p_\beta r^\beta + \varphi(r), \qquad 0 < r < \varepsilon, \tag{A.3}$$

где

$$\varphi \in H^{k-1/2}_\delta(\Gamma^\varepsilon) \subset H^{k-1/2}_{k-2-l+\delta}(\Gamma^\varepsilon), \qquad \delta > 0. \tag{A.4}$$

Если $l = k-2$, то сумма в (А.3) отсутствует и утверждение леммы вытекает из (А.4) и утверждения 3) леммы А.3.

Если $l \le k-3$, то сумма состоит из слагаемых вида r^β, где $\beta \ge l+1$. Непосредственно проверяется, что $r^\beta \in H^{k-1/2}_{k-2-l+\delta}(\Gamma^\varepsilon)$ для указанных β и всех $\delta > 0$. Следовательно, утверждение леммы вытекает из (А.3), (А.4) и утверждения 3) леммы А.3. $\square$

Лемма А.5. *Пусть* $\psi \in H^{k-1/2}_{a+l}(\Gamma)$, $l,k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, *и пусть* $b \in C^\infty(\overline{\Gamma})$ *— функция с компактным носителем такая, что* $\frac{\partial^s b}{\partial r^s}\big|_{r=0} = 0$, $s = 0,\dots,l-1$. *Тогда*

$$\|b\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\Gamma)} \le c\|\psi\|_{H^{k-1/2}_{a+l}(\Gamma)}. \tag{A.5}$$

Доказательство. Достаточно провести доказательство для функций ψ с компактным носителем, считая, что множества G и Γ совпадают с $K = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < \omega < \omega_0\}$ и $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon \omega = 0\}$ соответственно.

Обозначим через $\widehat{b} \in C^\infty(\mathbb{R})$ продолжение функции $b(y_1)$ на $\mathbb{R}$ и введем функцию $B(y_1,y_2) = \widehat{b}(y_1)$, $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$. Очевидно,

$$B \in C^\infty(\overline{K}), \qquad D^\sigma B|_{y=0} = 0, \quad |\sigma| \le l-1. \tag{A.6}$$

Пусть $u \in H^k_{a+l}(K)$ — продолжение функции ψ на угол K, имеющее компактный носитель и такое, что

$$\|u\|_{H^k_{a+l}(K)} \le c_1\|\psi\|_{H^{k-1/2}_{a+l}(\gamma)}. \tag{A.7}$$

Из формулы Тейлора и из (A.6) вытекает, что $|D^\sigma B| = O\bigl(r^{l-|\sigma|}\bigr)$ для любого σ; следовательно,

$$\|Bu\|^2_{H^k_a(K)} = \sum_{|\alpha|\le k}\int\limits_K r^{2(a+|\alpha|-k)}|D^\alpha(Bu)|^2\,dy \le c_2\sum_{|\sigma|+|\zeta|\le k}\int\limits_K r^{2(a+|\sigma|+|\zeta|-k)}|D^\sigma B|^2|D^\zeta u|^2\,dy \le$$
$$\le c_3\sum_{|\zeta|\le k}\int\limits_K r^{2(a+l+|\zeta|-k)}|D^\zeta u|^2\,dy = c_3\|u\|^2_{H^k_{a+l}(K)}$$

(напомним, что u имеет компактный носитель). Из этой оценки и из (A.7) окончательно получим

$$\|b\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\gamma)} \le \|Bu\|_{H^k_a(K)} \le c_3^{1/2}\|u\|_{H^k_{a+l}(K)} \le c_3^{1/2}c_1\|\psi\|_{H^{k-1/2}_{a+l}(\gamma)}. \qquad \square$$

А.2. Некоторые свойства фредгольмовых операторов. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства, и пусть $P\colon \mathrm{D}(P) \subset H_1 \to H_2$ — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор.

Определение А.1. Оператор P называется *фредгольмовым*, если он замкнут, имеет замкнутый образ и размерность его ядра $\ker P$ и коразмерность образа $\mathcal{R}(P)$ конечны. Число $\operatorname{ind} P = \dim\ker P - \operatorname{codim}\mathcal{R}(P)$ называется *индексом* фредгольмова оператора P.

Теорема А.1 (см. теорему 7.1 в [8]). *Пусть H — гильбертово пространство такое, что H_1 компактно вложено в H, и пусть оператор P замкнут. В этом случае* $\dim\ker P < \infty$ *и* $\mathcal{R}(P) = \overline{\mathcal{R}(P)}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\|u\|_{H_1} \le c(\|Pu\|_{H_2} + \|u\|_H) \qquad \forall u \in \mathrm{D}(P).$$

Доказательство следующего результата содержится в части 2 доказательства леммы 2.5 в [3].

Теорема А.2. *Пусть $\dot P\colon \mathrm{D}(\dot P) \subset H_1 \to H_2$ — фредгольмов оператор такой, что P — расширение $\dot P$, т.е. $\dot P \subset P$. Предположим, что* $\dim\ker P < \infty$, $\mathcal{R}(P) = \overline{\mathcal{R}(P)}$ *и* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(P) < \infty$. *Тогда оператор P замкнут (и, следовательно, фредгольмов).*

Пусть $A\colon \mathrm{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ — линейный оператор.

Теорема А.3 (см. § 16 в [8]). *Пусть оператор P фредгольмов, A ограничен и* $\mathrm{D}(A) = H_1$. *Тогда оператор $P + A$ фредгольмов,* $\operatorname{ind}(P + A) = \operatorname{ind} P$, $\dim\ker(P + A) \le \dim\ker P$ *и* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(P + A) \le \operatorname{codim}\mathcal{R}(P)$, *если только* $\|A\|$ *достаточно мала.*

Определение А.2 (см., например, [8, 6]). Оператор A называется *компактным относительно P* или просто *P-компактным*, если $\mathrm{D}(P) \subset \mathrm{D}(A)$ и для любой последовательности $u_n \in \mathrm{D}(P)$ такой, что $\{u_n\}$ и $\{Pu_n\}$ ограничены, последовательность $\{Au_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Теорема А.4 (см. теорему 5.26 из гл. 4 в [6]). *Пусть оператор P фредгольмов, а оператор A P-компактен. Тогда оператор $P + A$ также фредгольмов и* $\operatorname{ind}(P + A) = \operatorname{ind} P$.

Наконец, введем понятие раствора между линейными операторами. Пусть $S\colon \mathrm{D}(S) \subset H_1 \to H_2$ — линейный оператор. В пространстве $H_1 \times H_2$ зададим норму

$$\|(u, f)\| = \left(\|u\|_{H_1}^2 + \|f\|_{H_2}^2\right)^{1/2} \qquad \forall (u, f) \in H_1 \times H_2.$$

Обозначим $\delta(P, S) = \sup_{u\in \mathrm{D}(P)\colon \|(u,Pu)\|=1} \operatorname{dist}((u, Pu), \operatorname{Gr} S)$, где $\operatorname{Gr} S$ — график оператора S.

Определение А.3. Число $\widehat{\delta}(P, S) = \max\{\delta(P, S), \delta(S, P)\}$ называется *раствором между операторами P и S.*

Теорема А.5 (см. теорему 5.17 из гл. 4 в [6]). *Пусть оператор P фредгольмов, а оператор S замкнут. Тогда S фредгольмов,* $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} P$, $\dim\ker S \le \dim\ker P$ *и* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(S) \le \operatorname{codim}\mathcal{R}(P)$ *при условии, что раствор* $\widehat{\delta}(P, S)$ *достаточно мал.*

Автор выражает благодарность А.Л. Скубачевскому за внимание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
2. *Гохберг И.Ц., Сигал Е.И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. Т. 84, № 4. С. 607–629.
3. *Гуревич П.Л.* Обобщенные решения нелокальных эллиптических задач // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 5. С. 665–682.
4. *Гущин А.К.* Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 5. С. 17–36.
5. *Гущин А.К., Михайлов В.П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 1. С. 121–160.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
7. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о–ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
8. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
9. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
10. *Скубачевский А.Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Мат. сб. 1986. Т. 129, № 2. С. 279–302.
11. *Скубачевский А.Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Диф. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 120–131.
12. *Скубачевский А.Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Диф. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 128–139.
13. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
14. *Carleman T.* Sur la théorie des equations integrales et ses applications // Verhandl. Intern. Math. Kongr., Zürich, 1932. Bd. 1. S. 132–151.

15. *Gurevich P.L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces. I // Russ. J. Math. Phys. 2003. V. 10, N 4. P. 436–466.
16. *Gurevich P.L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces. II // Russ. J. Math. Phys. 2004. V. 11, N 1. P. 1–44.
17. *Picone M.* Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Atti Accad. Naz. Lincei. 1932. V. 15. P. 942–948.
18. *Skubachevskii A.L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. Math. Anal. and Appl. 1991. V. 160, N 2. P. 323–341.
19. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
20. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Proc. Intern. Congr. Math., Rome, 1908. Rome: Reale Accad. Lincei, 1909. V. 3. P. 116–124.