О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ И ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ*

П. Л. Гуревич, А. Л. Скубачевский

Оглавление

§ 1. Постановка нелокальных эллиптических задач
§ 2. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах
§ 3. Локальные эллиптические задачи в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$
§ 4. Априорные оценки в ограниченных областях
§ 5. Фредгольмова разрешимость нелокальных эллиптических задач
§ 6. Некоторые обобщения
§ 7. Постановка нелокальных эллиптических задач с параметром. Модельные операторы
§ 8. Разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром

Введение

В работе рассматриваются эллиптические уравнения порядка $2m$ в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с нелокальными краевыми условиями, связывающими значения решения и его производных на $(n-1)$-мерных гладких многообразиях Γ_i со значениями на многообразиях $\omega_i(\Gamma_i)$, где $\bigcup_i \overline{\Gamma_i} = \partial Q$ — граница области Q, а ω_i — C^∞-диффеоморфизмы. Наличие нелокальных членов приводит к появлению степенных особенностей у решений и их производных в точках множества $\mathcal{K}_1 = \bigcup_i (\overline{\Gamma_i} \setminus \Gamma_i)$ (которое будем называть *множеством точек сопряжения*). Поэтому нелокальные эллиптические задачи естественно изучать в весовых пространствах $H_a^{l+2m}(Q)$, $a \in \mathbb{R}$, $l \geqslant 0$ целое (см. определение (1.5)), изначально использовавшихся в теории эллиптических задач в негладких областях [13]. За счет преобразований ω_i, входящих в нелокальные члены, точки множества $\mathcal{K}_1$ связаны с точками множества

$$\Big\{ \bigcup_i \omega_i(\mathcal{K}_1) \Big\} \cup \Big\{ \bigcup_{i,j} \omega_j(\omega_i(\mathcal{K}_1) \cap \Gamma_j) \Big\}.$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04–01–00256) и гранта Президента РФ (проект № МК-980.2005.1).

Точки этого множества могут принадлежать как Q, так и ∂Q. Следовательно, мы должны вводить определенные условия согласования в точках множества

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \Big\{ \bigcup_i \omega_i(\mathcal{K}_1) \Big\} \cup \Big\{ \bigcup_{i,j} \omega_j(\omega_i(\mathcal{K}_1) \cap \Gamma_j) \Big\}.$$

Возможны следующие два подхода. Во-первых, можно считать, что все точки множества $\mathcal{K}$ участвуют в определении весовых пространств; это позволяет изучать нелокальные задачи при всех значениях показателя веса $a \in \mathbb{R}$ (см. [21] в случае $n = 2$). Во-вторых, можно предполагать, что лишь точки множества $\mathcal{K}_1$ или множества $\mathcal{K} \cap \partial Q$ участвуют в определении весовых пространств; это позволяет изучать нелокальные задачи только при $a > l + 2m - 1$ (см. [23, 29]).

В [17, 19] доказано, что «локальная» эллиптическая задача в ограниченной области фредгольмова (см. определение 2.1), если некоторые модельные эллиптические операторы в плоских углах (зависящие от параметра ω) имеют тривиальные ядро и коядро при всех $\omega \in S^{n-3}$, где

$$S^{n-3} = \{\omega \in \mathbb{R}^{n-2} : |\omega| = 1\}.$$

Аналогично, в случае когда точки множества $\mathcal{K} \cap Q$ участвуют в определении весовых пространств, возникают эллиптические операторы в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, зависящие от параметра $\omega \in S^{n-3}$. Однако в настоящей работе доказано, что эти операторы не являются изоморфизмами (см. § 3). Поэтому, в отличие от случая плоской области, если $n \geqslant 3$ и $\mathcal{K} \cap Q \neq \varnothing$, то только точки множества $\mathcal{K}_1$ или множества $\mathcal{K} \cap \partial Q$ могут участвовать в определении весовых пространств. Это, в свою очередь, приводит к ограничению $a > l + 2m - 1$ (более подробно см. п. 4.1).

Приведем краткий обзор статьи.

В § 1 рассматривается постановка нелокальных эллиптических задач. Там же вводятся модельные задачи в двугранных углах и определяются основные функциональные пространства. В § 2 исследуется разрешимость нелокальных задач в двугранных углах. В частности, приводится пример нелокальной задачи в двугранном угле, которая однозначно разрешима в весовых пространствах при $0 \leqslant a \leqslant 2$. В § 3 показано, что эллиптический оператор порядка $2m$, действующий из $H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n)$ в $H_a^l(\mathbb{R}^n)$, не является изоморфизмом ни при каких $a \in \mathbb{R}$ и целых $l \geqslant 0$. В данном случае особые точки, участвующие в определении весовых пространств $H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n)$ и $H_a^l(\mathbb{R}^n)$, — это точки множества

$$\mathcal{P} = \big\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\big\}.$$

В § 4 получены априорные оценки решений нелокальных задач в ограниченных областях, а в § 5 построен правый регуляризатор. Таким образом, доказывается теорема о фредгольмовой разрешимости нелокальных эллиптических задач в ограниченных областях. Параграф 6 посвящен обобщениям нелокальных задач на тот случай, когда имеются нелокальные члены с носителем вблизи множества $\mathcal{K}_1$, сосредоточенным на многообразиях $\omega_{is}(\Gamma_i)$, и абстрактные нелокальные слагаемые с носителем вне множества $\mathcal{K}_1$. В §§ 7 и 8 доказана однозначная разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром.

Отметим, что первыми эллиптические уравнения с нелокальными условиями на сдвигах различных частей границы прямоугольника рассмотрели А. В. Бицадзе и А. А. Самарский [2]. В общем случае такая задача была сформулирована ими как нерешенная. Разрешимость и гладкость решений эллиптических уравнений высокого порядка с общими нелокальными условиями вблизи границы изучались в работах [21–23, 29]. Уравнения второго порядка с нелокальными условиями вблизи границы рассматривались также в [8, 9, 11]. Описание приложений нелокальных эллиптических задач, а также обширную библиографию можно найти в [21, 27, 29, 30].

§ 1. Постановка нелокальных эллиптических задач

1.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ — ограниченная область с границей

$$\partial Q = \bigcup_{i=1}^{N_0} \overline{\Gamma_i},$$

где Γ_i — открытые, связные в топологии ∂Q, $(n-1)$-мерные C^∞-многообразия. Предположим, что в окрестности каждой точки $g \in \overline{\Gamma_i} \setminus \Gamma_i$ область Q диффеоморфна n-мерному двугранному углу

$$\Theta = \bigl\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : d_1 < \varphi < d_2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\bigr\},$$

где r, φ — полярные координаты точки $y \in \mathbb{R}^2$, $d_j = d_j(g)$, $j = 1, 2$.

Введем дифференциальные операторы

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad B_{i\mu s}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(x) D^\alpha,$$

где $a_\alpha, b_{i\mu s\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции $(i = 1, \dots, N_0;\ \mu = 1, \dots, m;$ $s = 0, \dots, S_i)$, $m_{i\mu} \leqslant 2m-1$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$. Если необходимо явно указать, по каким переменным мы дифференцируем функцию u, то будем писать $D_y^\alpha u$, $D_z^\alpha u$ и т. д.

Обозначим через ω_{is} $(i = 1, \dots, N_0;\ s = 1, \dots, S_i)$ C^∞-диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность Ω_i многообразия Γ_i на множество $\omega_{is}(\Omega_i)$ так, что $\omega_{is}(\Gamma_i) \subset Q$. Предположим, что множество

$$\mathcal{K} = \Bigl\{\bigcup_i (\overline{\Gamma_i} \setminus \Gamma_i)\Bigr\} \cup \Bigl\{\bigcup_{i,s} \omega_{is}(\overline{\Gamma_i} \setminus \Gamma_i)\Bigr\} \cup \Bigl\{\bigcup_{j,p} \bigcup_{i,s} \omega_{jp}\bigl(\omega_{is}(\overline{\Gamma_i} \setminus \Gamma_i) \cap \Gamma_j\bigr)\Bigr\} \tag{1.1}$$

представимо в виде

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3, \tag{1.2}$$

где

$$\mathcal{K}_1 = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{1\nu} = \partial Q \setminus \bigcup_i \Gamma_i, \quad \mathcal{K}_2 = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{2\nu} \subset \bigcup_i \Gamma_i, \quad \mathcal{K}_3 = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{3\nu} \subset Q$$

$(\nu = 1, \dots, N_j;\ j = 1, 2, 3)$, $\mathcal{K}_{j\nu}$ — взаимно непересекающиеся $(n-2)$-мерные связные C^∞-многообразия без края. В частности, множества $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$ могут быть пустыми.

Будем изучать следующую нелокальную задачу:

$$Au \equiv A(x, D)u(x) = f_0(x), \quad x \in Q, \tag{1.3}$$

$$B_{i\mu}u \equiv \sum_{s=0}^{S_i} (B_{i\mu s}(x, D)u)(\omega_{is}(x))\Big|_{\Gamma_i} = f_{i\mu}(x), \qquad x \in \Gamma_i; \quad i = 1, \dots, N_0; \quad \mu = 1, \dots, m, \tag{1.4}$$

где
$$(B_{i\mu s}(x,D)u)(\omega_{is}(x))\Big|_{\Gamma_i} = B_{i\mu s}(\widehat{x},D)u(\widehat{x})\Big|_{\widehat{x}=\omega_{is}(x),\ x\in\Gamma_i}, \qquad \omega_{i0}(x)\equiv x.$$

Пусть операторы $A(x,D)$ и $B_{i\mu 0}(x,D)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 1.1. *Оператор $A(x,D)$ собственно эллиптичен при каждом $x\in\overline{Q}$.*

Условие 1.2. *Система операторов $\{B_{i\mu 0}(x,D)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $A(x,D)$ и является нормальной при всех $i=1,\dots,N_0$ и $x\in\overline{\Gamma_i}$ (см.* [16, гл. 2, § 1.4]).

Через ω_{is}^{+1} обозначим преобразование $\omega_{is}:\Omega_i\to\omega_{is}(\Omega_i)$, а через $\omega_{is}^{-1}:\omega_{is}(\Omega_i)\to\Omega_i$ — обратное преобразование.

Определение 1.1. Множество всех точек, которые могут быть получены из точки $g\in\mathcal{K}_1$ последовательным применением к ней преобразований ω_{is}^{+1} или ω_{is}^{-1}, отображающих точки множества $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_1$, называется *орбитой* точки g и обозначается через $\mathcal{O}(g)$.

Другими словами, орбита $\mathcal{O}(g)$ состоит из точки $g\in\mathcal{K}_1$ и точек, которые получаются из g по следующему правилу: если некоторая точка h принадлежит $\mathcal{O}(g)$, то точка $\omega_{is}(h)$ включается в орбиту $\mathcal{O}(g)$ тогда и только тогда, когда $h\in\overline{\Gamma_i}\cap\mathcal{K}_1$ и $\omega_{is}(h)\in\mathcal{K}_1$, а точка $\omega_{is}^{-1}(h)$ включается в орбиту $\mathcal{O}(g)$ тогда и только тогда, когда $h\in\omega_{is}(\overline{\Gamma_i})\cap\mathcal{K}_1$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1.3 (конечность орбит).

1. *Для каждой точки $g\in\mathcal{K}_1$ орбита $\mathcal{O}(g)$ состоит из конечного множества точек g_j, $j=1,\dots,N=N(g)$.*
2. *Существуют такие окрестности $\widehat{V}(g_j)\subset V(g_j)\subset\mathbb{R}^n\setminus(\mathcal{K}_2\cup\mathcal{K}_3)$, $V(g_j)\cap V(g_p)=\varnothing$ $(j\ne p)$, точек $g_j\in\mathcal{O}(g)$, что если $g_j\in\overline{\Gamma_i}$ и $\omega_{is}(g_j)=g_p$, то $\widehat{V}(g_j)\subset\Omega_i$ и $\omega_{is}(\widehat{V}(g_j))\subset V(g_p)$.*

Следующее условие означает, что носитель нелокальных членов пересекает границу области в точках множества $\mathcal{K}_1$ некасательно.

Условие 1.4 (некасательный подход). *Для каждой точки $g\in\mathcal{K}_1$ и $j=1,\dots,N(g)$ существует такая гладкая невырожденная замена переменных $x\to x'=x'(g,j)$, что окрестности $V(g_j)$ при этой замене переменных отображаются на некоторую окрестность $V(0)$ начала координат, причем:*

1. *множества $Q\cap V(g_j)$ и $\Gamma_i\cap V(g_j)$ отображаются на пересечение двугранного угла Θ_j с $V(0)$ и на пересечение стороны $\Gamma_{j\rho}$ $(\rho=1$ или $\rho=2)$ угла Θ_j с $V(0)$ соответственно;*
2. *каждое преобразование $\omega_{is}(x)$ при $x\in\widehat{V}(g_j)$, $g_j\in\overline{\Gamma_i}$, сводится в новых координатах $x'=(y',z')$ (где $y'\in\mathbb{R}^2$ и $z'\in\mathbb{R}^{n-2}$) к композиции операторов поворота и гомотетии в плоскости $\{y'\}$.*

Замечание 1.1. Если $N(g)=1$, то орбита точки $g\in\mathcal{K}_1$ состоит лишь из самой точки g. Такая ситуация имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. $\omega_{is}(g)=g$ для всех таких i и s, что $g\in\overline{\Gamma_i}\cap\mathcal{K}_1$ и $\omega_{is}(g)\in\mathcal{K}_1$;
2. не существует таких индексов i и s и точки $h\in\overline{\Gamma_i}\cap\mathcal{K}_1$, что $h\ne g$ и $\omega_{is}(h)=g$.

1.2. Для любой области Ω обозначим через $W^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ ($k \geqslant 0$ целое) пространство Соболева. Через $W^{k-1/2}(\Gamma)$ ($k \geqslant 1$ целое) обозначим пространство следов на гладком $(n-1)$-мерном многообразии $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ с нормой

$$\|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)} = \inf \|v\|_{W^k(\Omega)} \quad \bigl(v \in W^k(\Omega) : v\big|_\Gamma = \psi\bigr).$$

Если X — некоторая область в $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, то через $C_0^\infty(X)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{X}$ функций, имеющих компактный носитель в X. Если M — объединение конечного числа $(n-l)$-мерных многообразий ($l = 1, \ldots, n$), лежащих в $\overline{X}$, то через $C_0^\infty(\overline{X} \setminus M)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{X}$ функций с компактным носителем в $\overline{X} \setminus M$.

Введем различные весовые пространства для различных областей Ω. Рассмотрим следующие случаи:

1. $\Omega = Q$; пусть либо $K = \mathcal{K}_1$, либо $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ (ср. условие 4.1 в § 4), и пусть $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$ — такая функция, что $\rho(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ и $\rho(x)$ эквивалентна в окрестности множества K расстоянию от точки $x \in \Omega$ до множества K;
2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^\infty$; пусть K — некоторое $(n-2)$-мерное многообразие класса C^∞, лежащее в $\overline{\Omega}$, и пусть ρ — та же функция, что в случае 1;
3. Ω — n-мерный двугранный угол Θ; обозначим $K = \mathcal{P}$, где
$$\mathcal{P} = \bigl\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\bigr\},$$
и положим $\rho(x) = |y|$;
4. $\Omega = \mathbb{R}^n$; обозначим $K = \mathcal{P}$ и положим $\rho(x) = |y|$.

Введем весовое пространство $H_a^k(\Omega) = H_a^k(\Omega, K)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus K)$ по норме

$$\|u\|_{H_a^k(\Omega)} = \Biggl(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_\Omega \rho^{2(a-k+|\alpha|)} |D^\alpha u|^2\, dx\Biggr)^{1/2}, \tag{1.5}$$

где $k \geqslant 0$ целое и $a \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $H_a^{k-1/2}(\Gamma)$ ($k \geqslant 1$ целое) пространство следов на гладком $(n-1)$-мерном многообразии $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} = \inf \|v\|_{H_a^k(\Omega)} \quad \bigl(v \in H_a^k(\Omega) : v\big|_\Gamma = \psi\bigr). \tag{1.6}$$

Аналогично вводятся весовые пространства $H_a^k(\Omega)$ и $H_a^{k-1/2}(\Gamma)$ при $n = 2$. В частности, полагаем $K = \{0\}$ в случае, когда $\Omega = \theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2,\ 0 < r\}$ или $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Далее считаем, что в задаче (1.3), (1.4) $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ и $f = \{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$, где

$$\mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) = H_a^l(Q) \times \prod_{i,\mu} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$$

и $l \geqslant 0$ целое.

1.3. Зафиксируем произвольную точку $g \in \mathcal{K}_1$. По условию 1.3 орбита $\mathcal{O}(g)$ состоит из конечного числа точек g_j, $j = 1, \dots, N = N(g)$. Сведем задачу (1.3), (1.4) к системе N эллиптических уравнений в двугранных углах с нелокальными краевыми условиями. Для этого предположим, что

$$\operatorname{supp} u \subset \Big(\bigcup_j \widehat{V}(g_j)\Big) \cap \overline{Q}.$$

Обозначим через $u_j(x)$ функцию $u(x)$ при $x \in Q \cap V(g_j)$. Если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $x \in \widehat{V}(g_j)$, то $\omega_{is}(x) \in V(g_p)$ при некотором p, $1 \leqslant p \leqslant N$, в силу условия 1.3. Обозначим функцию $u(\omega_{is}(x))$ через $u_p(\omega_{is}(x))$. Ясно, что $u(\omega_{i0}(x)) = u(x) = u_j(x)$. В введенных выше обозначениях задача (1.3), (1.4) принимает вид

$$A(x, D)u_j(x) = f_0(x), \quad x \in Q \cap \widehat{V}(g_j), \tag{1.7}$$

$$\sum_{s \in S_{ij}^g} (B_{i\mu s}(x, D)u_p)(\omega_{is}(x))\Big|_{\Gamma_i} = f_{i\mu}(x), \quad x \in \widehat{V}(g_j) \cap \Gamma_i;$$
$$i \in \big\{1 \leqslant i \leqslant N_0 : \widehat{V}(g_j) \cap \Gamma_i \neq \varnothing\big\}; \quad j = 1, \dots, N; \quad \mu = 1, \dots, m, \tag{1.8}$$

где

$$S_{ij}^g = \big\{0 \leqslant s \leqslant S_i : \omega_{is}(g_j) = g_p \in \mathcal{O}(g) \text{ для некоторого } p = 1, \dots, N\big\}.$$

Используя замену переменных $x \to x'(g, j)$ из п. 1.1, введем функции $v_j(x') = u_j(x(x'))$. В силу условия 1.4 задача (1.7), (1.8) примет вид

$$A_j(x', D_{y'}, D_{z'})v_j(x') = f_j(x'), \quad x' \in \Theta_j; \ j = 1, \dots, N, \tag{1.9}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{s=0}^{S_{j\rho k}} (B_{j\rho\mu ks}(x', D_{y'}, D_{z'})v_k)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y', z')\Big|_{\Gamma_{j\rho}} = f_{j\rho\mu}(x'), \quad x' \in \Gamma_{j\rho};$$
$$j = 1, \dots, N; \quad \rho = 1, 2; \quad \mu = 1, \dots, m. \tag{1.10}$$

Здесь A_j и $B_{j\rho\mu ks}$ — операторы с переменными коэффициентами класса C^∞;

$$\Theta_j = \big\{x' = (y', z') : 0 < d_{j1} < \varphi < d_{j2},\ z' \in \mathbb{R}^{n-2}\big\},$$
$$\Gamma_{j\rho} = \big\{x' = (y', z') : \varphi = d_{j\rho},\ z' \in \mathbb{R}^{n-2}\big\};$$

$\mathcal{G}_{j\rho ks}$ — оператор поворота на угол $\varphi_{j\rho ks}$ и гомотетии с коэффициентом $\chi_{j\rho ks}$ в плоскости $\{y'\}$, причем $d_{k1} < d_{j\rho} + \varphi_{j\rho ks} < d_{k2}$, $0 < \chi_{j\rho ks}$ при $(k, s) \neq (j, 0)$ и $\varphi_{j\rho j0} = 0$, $\chi_{j\rho j0} = 1$ (т. е. $\mathcal{G}_{j\rho j0}y' \equiv y'$); $v = (v_1, \dots v_N)$.

Замечание 1.2. Если $g \in \overline{\Gamma_i}$, $N = N(g) = 1$ (ср. замечание 1.1) и $\omega_{is}(g) \neq g$ при всех $s = 1, \dots, S_i$, то модельная задача (1.9), (1.10) не содержит нелокальных членов (в силу того факта, что многообразия $\mathcal{K}_{j\nu}$ попарно не пересекаются).

Введем следующие пространства вектор-функций:

$$\mathcal{H}_a^k(\Theta) = \prod_{j=1}^{N} H_a^k(\Theta_j), \quad \mathcal{H}_a^l(\Theta, \Gamma) = \mathcal{H}_a^l(\Theta) \times \prod_{j=1}^{N} \prod_{\rho=1,2} \prod_{\mu=1}^{m} H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho}),$$

где $m_{j\rho\mu}$ — порядок оператора $B_{j\rho\mu ks}(x', D_{y'}, D_{z'})$.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_g : \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^l(\Theta, \Gamma)$, действующий по формуле

$$\mathcal{L}_g v = \left\{ A_j(D_{y'}, D_{z'}) v_j(y', z'),\ \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=0}^{S_{j\rho k}} (B_{j\rho\mu ks}(D_{y'}, D_{z'}) v_k)(\mathcal{G}_{j\rho ks} y', z') \Big|_{\Gamma_{j\rho}} \right\}, \qquad (1.11)$$

где $A_j(D_{y'}, D_{z'})$ и $B_{j\rho\mu ks}(D_{y'}, D_{z'})$ — соответственно, главные однородные части операторов $A_j(0, D_{y'}, D_{z'})$ и $B_{j\rho\mu ks}(0, D_{y'}, D_{z'})$. Нижний индекс g указывает на то, что оператор $\mathcal{L}_g$ зависит от выбора точки $g \in \mathcal{K}_1$ (а следовательно, зависит и от орбиты $\mathcal{O}(g)$). Очевидно, каждый из операторов $A_j(D_{y'}, D_{z'})$ правильно эллиптичен, а система операторов $\{B_{j\rho\mu j0}(D_{y'}, D_{z'})\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $A_j(D_{y'}, D_{z'})$ и является нормальной при всех $j = 1, \dots, N$ и $\rho = 1, 2$.

Пример 1.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, представляющей собой поверхность вращения вокруг оси x_3. Положим

$$P = \{(0, 0, 3)\} \cup \{(0, 0, -3)\} \cup \left\{ x : x_3 = 0,\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 3 \right\}$$

и

$$P^{1/4} = \{x : \operatorname{dist}(x, P) < 1/4\}.$$

Предположим, что вне множества $P^{1/4}$ граница ∂Q совпадает с границей области

$$\left\{ x : x_3 < 3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\} \cap \left\{ x : x_3 > -3 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}.$$

Обозначим

$$\Gamma_1 = \{x \in \partial Q : x_3 < -2\}, \quad \Gamma_2 = \{x \in \partial Q : x_3 > 2\}, \quad \Gamma_3 = \partial Q \setminus (\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}).$$

Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$-\Delta u = f_0(x), \quad x \in Q, \qquad (1.12)$$

$$\begin{gathered} \big[u(x) + \alpha_j u(x + h_j) + \beta_j u(\mathcal{G}_\pi x + h_j)\big]\Big|_{\Gamma_j} = 0, \quad j = 1, 2, \\ u(x)\big|_{\Gamma_3} = 0, \end{gathered} \qquad (1.13)$$

где $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $h_j = (-1)^{j+1}(0, 0, 4)$, $j = 1, 2$, а $\mathcal{G}_\pi$ — оператор поворота вокруг оси x_3 на угол π. Очевидно (см. рис. 1),

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_{11} \cup \mathcal{K}_{12}, \quad \mathcal{K}_{1\nu} = \{x \in \partial Q : x_3 = (-1)^\nu 2\}, \quad \nu = 1, 2.$$

Орбита каждой точки $g \in \mathcal{K}_{11}$ состоит из четырех точек: $g_1 = g$, $g_2 = \mathcal{G}_\pi g_1$, $g_3 = g_1 + h_1$ и $g_4 = \mathcal{G}_\pi g_1 + h_1$. Пусть $\widehat{V}(g_j) = V(g_j) = \{x : |x - g_j| < \varepsilon\}$, где ε достаточно мало, и пусть $\operatorname{supp} u \subset \left(\bigcup_j V(g_j)\right) \cap \overline{Q}$. Для $x \in V(g_j)$ введем новые координаты $x' = (y_1', y_2', z')$ по формулам

$$y_1' = r - 1, \quad y_2' = x_3 - g_{j3}, \quad z' = \varphi - \varphi_j,$$

где r, φ, x_3 и $1, \varphi_j, g_{j3}$ — цилиндрические координаты точек x и g_j соответственно. Очевидно, $x \mapsto x'(g, j)$ — невырожденное при $x \neq 0$ преобразование, отображающее открытые множества $V(g_j)$ на одну и ту же окрестность $V(0)$ начала координат. Рассмотрим вектор-функцию $v(x')$ такую, что $v_j(x') = u_j(x(x'))$ при $x' \in V(0)$, где

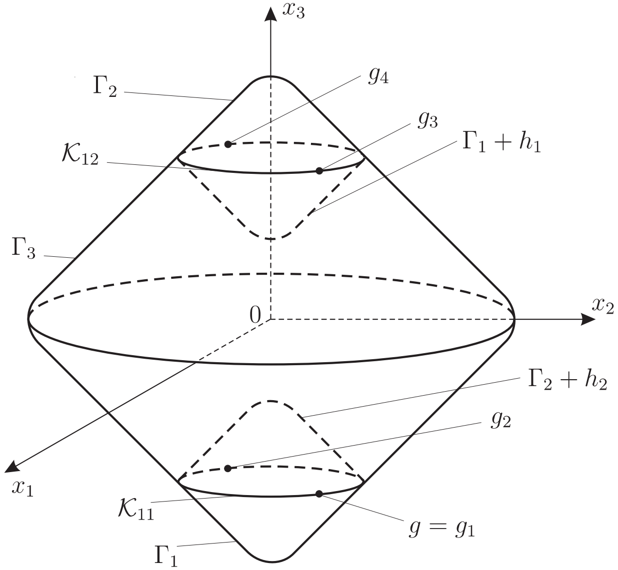

Рис. 1. Задача (1.12), (1.13)

$u_j(x) = u(x)$ при $x \in V(g_j) \cap Q$. Обозначим $x' = (y_1', y_2', z')$ снова через $x = (y_1, y_2, z)$. Тогда краевая задача (1.12), (1.13) примет вид (см. рис. 2)

$$-\frac{\partial^2 v_j}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial y_2^2} - \frac{1}{(1+y_1)^2}\frac{\partial^2 v_j}{\partial z^2} - \frac{1}{1+y_1}\frac{\partial v_j}{\partial y_1} = f_j(x), \quad x \in \Theta_j, \quad j = 1, \ldots, 4, \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered} v_j\big|_{\Gamma_{j1}} = 0, \quad j = 1, \ldots, 4, \\ (v_1 + \alpha_1 v_3 + \beta_1 v_4)\big|_{\Gamma_{12}} = (v_2 + \beta_1 v_3 + \alpha_1 v_4)\big|_{\Gamma_{22}} = 0, \\ (v_3 + \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2)\big|_{\Gamma_{32}} = (v_4 + \beta_2 v_1 + \alpha_2 v_2)\big|_{\Gamma_{42}} = 0. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Здесь

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : y_2 > y_1\}, \quad \Theta_3 = \Theta_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : y_2 < -y_1\},$$

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{21} = \{x \in \mathbb{R}^3 : y_2 = y_1,\ y_1 > 0\}, \quad \Gamma_{31} = \Gamma_{41} = \{x \in \mathbb{R}^3 : y_2 = -y_1,\ y_1 > 0\},$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{22} = \{x \in \mathbb{R}^3 : y_2 = y_1,\ y_1 < 0\}, \quad \Gamma_{32} = \Gamma_{42} = \{x \in \mathbb{R}^3 : y_2 = -y_1,\ y_1 < 0\}.$$

Легко видеть, что условия 1.1–1.4 в этом примере выполнены.

Переходя к главным однородным частям в уравнениях (1.14) и замораживая коэффициенты в начале координат, получим

$$-\Delta v_j = f_j(x), \quad x \in \Theta_j, \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Нелокальные краевые условия (1.15) при этом не меняются.

1.4. Теперь зафиксируем произвольную точку $g \in \mathcal{K}_2$. Очевидно, $g \in \mathcal{K}_{2\nu} \cap \Gamma_i$ при некоторых $1 \leqslant \nu \leqslant N_2$ и $1 \leqslant i \leqslant N_0$. В силу гладкости многообразий Γ_i и $\mathcal{K}_{2\nu}$ существует C^∞-диффеоморфизм $x \to x' = x'(g)$, определенный в малой окрестности $V(g)$ точки g и отображающий $Q \cap V(g)$ и $\mathcal{K}_{2\nu} \cap V(g)$ на пересечение полупространства

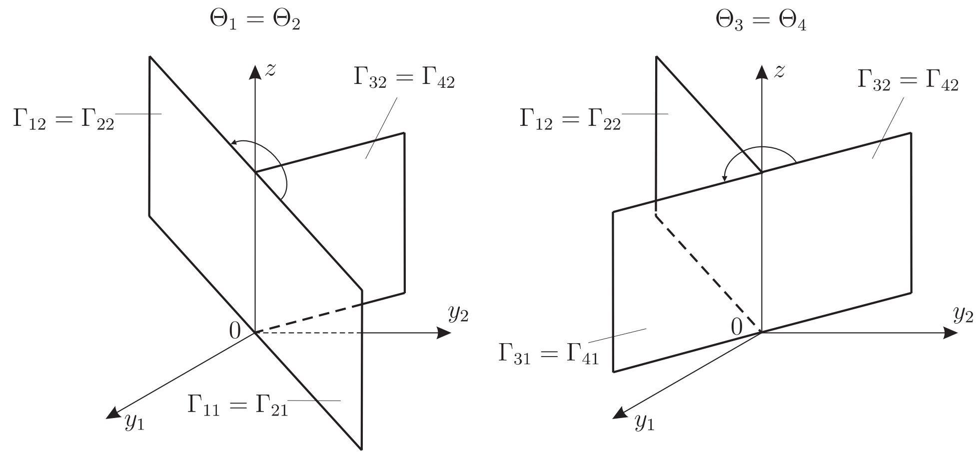

Рис. 2

$\mathbb{R}^n_+ = \{x : |\varphi| < \pi/2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ с некоторой окрестностью $V(0)$ и на пересечение множества $\mathcal{P}$ с $V(0)$ соответственно.

Пусть $A(D_{y'}, D_{z'})$ и $B_{i\mu 0}(D_{y'}, D_{z'})$ — главные однородные части операторов $A(g, D_y, D_z)$ и $B_{i\mu 0}(g, D_y, D_z)$ соответственно, записанные в новых координатах $x' = x'(g)$.

Введем линейный ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_g : H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n_+) \to \mathcal{H}_a^l(\mathbb{R}^n_+, \Gamma) = H_a^l(\mathbb{R}^n_+) \times H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}_-) \times H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}_+),$$

действующий по формуле

$$\mathcal{L}_g u = \Big\{ A(D_{y'}, D_{z'})u(y', z'),\ B_{i\mu 0}(D_{y'}, D_{z'})u(y', z')\big|_{\varphi=\mp\pi/2} \Big\}, \tag{1.16}$$

где $\mathbb{R}^{n-1}_\pm = \{x' = (y', z') \in \mathbb{R}^n : \varphi = \pm\pi/2,\ z' \in \mathbb{R}^{n-2}\}$.

§ 2. Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах

2.1. При исследовании нелокальных задач в ограниченных областях мы представим нелокальные операторы в виде суммы трех операторов. Первый оператор будет соответствовать нелокальным членам с носителем вблизи множества $\mathcal{K}_1$, второй — нелокальным членам с носителем вне множества $\mathcal{K}_1$ и третий — младшим членам (компактным возмущениям). В этом параграфе мы рассмотрим модельный оператор, соответствующий задаче с нелокальными членами, носитель которых сосредоточен вблизи множества $\mathcal{K}_1$.

При помощи преобразования Фурье по переменной z можно свести изучение оператора $\mathcal{L}_g$ в двугранных углах к исследованию некоторого модельного оператора $\mathcal{L}_g(\omega)$ в плоских углах, где ω — параметр, лежащий на единичной сфере

$$S^{n-3} = \{\omega \in \mathbb{R}^2 : |\omega| = 1\},$$

см. [22, 26]. В этом параграфе будут сформулированы некоторые результаты (большинство из которых доказано в [22, 26]), нужные в дальнейшем, и приведен иллюстрирующий их пример. Отметим, что подход, основанный на применении преобразования Фурье, ранее использовался для изучения локальных эллиптических задач в двугранных углах [17].

Для того чтобы ввести оператор $\mathcal{L}_g(\omega)$, рассмотрим весовые пространства с неоднородным весом. Обозначим через $E_a^k(\Omega)$ пополнение множества $C_0^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{0\})$ по норме

$$\|u\|_{E_a^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int\limits_{\Omega} r^{2a}(r^{2(|\alpha|-k)}+1)\left|D_y^\alpha u(y)\right|^2 dy\right)^{1/2},$$

где либо $\Omega=\theta=\{y\in\mathbb{R}^2 : d_1<\varphi<d_2\}$, либо $\Omega=\mathbb{R}^2$; r,φ — полярные координаты точки y; $k\geqslant 0$ целое. Пусть $\gamma\subset\overline{\Omega}$ — луч вида $\gamma=\{y\in\mathbb{R}^2:\varphi=\varphi_0\}$ (где $d_1\leqslant\varphi_0\leqslant d_2$, если $\Omega=\theta$). Обозначим через $E_a^{k-1/2}(\gamma)$ ($k\geqslant 1$ целое) пространство следов на луче γ с нормой

$$\|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\gamma)} = \inf\|v\|_{E_a^k(\Omega)} \quad \bigl(v\in E_a^k(\Omega): v\big|_\gamma=\psi\bigr).$$

Введем следующие пространства вектор-функций:

$$\mathcal{E}_a^k(\theta)=\prod_{j=1}^N E_a^k(\theta_j),\quad \mathcal{E}_a^l(\theta,\gamma)=\mathcal{E}_a^l(\theta)\times\prod_{j=1}^N\prod_{\rho=1,2}\prod_{\mu=1}^m E_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\gamma_{j\rho}),$$

где $\theta_j=\{y\in\mathbb{R}^2 : d_{j1}<\varphi<d_{j2}\}$ и $\gamma_{j\rho}=\{y\in\mathbb{R}^2:\varphi=d_{j\rho}\}$.

Для каждой фиксированной точки $g\in\mathcal{K}_1$ рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_g(\omega):\mathcal{E}_a^{l+2m}(\theta)\to\mathcal{E}_a^l(\theta,\gamma)$, действующий по формуле

$$\mathcal{L}_g(\omega)V=\left\{A_j(D_y,\omega)V_j(y),\ \sum_{k,s}(B_{j\rho\mu ks}(D_y,\omega)V_k)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y)\Big|_{\gamma_{j\rho}}\right\}, \tag{2.1}$$

где $\omega\in S^{n-3}$ и $V=(V_1,\dots,V_N)$, ср. (1.11).

2.2. Запишем операторы $A_j(D_y,0)$ и $B_{j\rho\mu ks}(D_y,0)$ в полярных координатах:

$$A_j(D_y,0)=r^{-2m}\widehat{A}_j(\varphi,D_\varphi,rD_r),\quad B_{j\rho\mu ks}(D_y,0)=r^{-m_{j\rho\mu}}\widehat{B}_{j\rho\mu ks}(\varphi,D_\varphi,rD_r),$$

где $D_\varphi=-i\partial/\partial\varphi$, $D_r=-i\partial/\partial r$.

Введем следующие пространства вектор-функций:

$$\mathcal{W}^k(d_1,d_2)=\prod_{j=1}^N W^k(d_{j1},d_{j2}),\quad \mathcal{W}^l[d_1,d_2]=\mathcal{W}^l(d_1,d_2)\times\mathbb{C}^{mN}\times\mathbb{C}^{mN}.$$

Рассмотрим аналитическую оператор-функцию $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda):\mathcal{W}^{l+2m}(d_1,d_2)\to\mathcal{W}^l[d_1,d_2]$, заданную формулой

$$\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)w=\left\{\widehat{A}_j(\varphi,D_\varphi,\lambda)w_j,\ \sum_{k,s}e^{(i\lambda-m_{j\rho\mu})\ln\chi_{j\rho ks}}(\widehat{B}_{j\rho\mu ks}(\varphi,D_\varphi,\lambda)w_k)(\varphi+\varphi_{j\rho ks})\Big|_{\varphi=d_{j\rho}}\right\}, \tag{2.2}$$

где $w=(w_1,\dots,w_N)$.

В силу лемм 2.1 и 2.2 в [22] существует такая конечно-мероморфная оператор-функция $\widehat{\mathcal{R}}_g(\lambda):\mathcal{W}^l[d_1,d_2]\to\mathcal{W}^{l+2m}(d_1,d_2)$, что $\widehat{\mathcal{L}}_g^{-1}(\lambda)=\widehat{\mathcal{R}}_g(\lambda)$ при любом λ, не совпадающим с полюсом $\widehat{\mathcal{R}}_g(\lambda)$. Кроме того, если $\lambda_0=\mu_0+i\nu_0$ — полюс оператор-функции $\widehat{\mathcal{R}}_g(\lambda)$, то λ_0 — собственное значение оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ и существует такое число $\delta > 0$, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \nu_0| < \delta\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$.

2.3. Определение 2.1. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. Линейный ограниченный оператор $L : H_1 \to H_2$ называется *фредгольмовым*, если $\dim \mathcal{N}(L) < \infty$, $\operatorname{codim} \mathcal{R}(L) < \infty$ и $\mathcal{R}(L)$ замкнут, где $\mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{R}(L)$ — соответственно ядро и образ оператора L.

Следующая теорема показывает, что фредгольмовость оператора $\mathcal{L}_g(\omega)$ определяется спектральными свойствами оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.4. *Если прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$, *то оператор* $\mathcal{L}_g(\omega) : \mathcal{E}_a^{l+2m}(\theta) \to \mathcal{E}_a^l(\theta, \gamma)$ *фредгольмов при всех* $\omega \in S^{n-3}$.

Если оператор $\mathcal{L}_g(\omega)$ *фредгольмов при некотором* $\omega \in S^{n-3}$, *то прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$.

Теорема 2.1, доказанная в [26], обобщает теорему 3.2 в [22], где дополнительно предполагалось, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не содержит собственных значений соответствующего «локализованного» оператора с параметром λ.

Следующая теорема вытекает из теорем 3.3, 9.2 и 9.3 в [26].

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.4. *Тогда оператор* $\mathcal{L}_g : \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^l(\Theta, \Gamma)$ — *изоморфизм в том и только том случае, если оператор* $\mathcal{L}_g(\omega) : \mathcal{E}_a^{l+2m}(\theta) \to \mathcal{E}_a^l(\theta, \gamma)$ — *изоморфизм при каждом* $\omega \in S^{n-3}$.

Положим

$$\mathcal{L}'_g v = \left\{ A_j^0(x, D_y, D_z) v_j(y, z),\ \sum_{k,s} (B_{j\rho\mu ks}^0(x, D_y, D_z) v_k)(\mathcal{G}_{j\rho ks} y, z)\Big|_{\Gamma_{j\rho}} \right\}, \tag{2.3}$$

где $A_j^0(x, D_y, D_z)$ и $B_{j\rho\mu ks}^0(x, D_y, D_z)$ — главные однородные части операторов $A_j(x, D_y, D_z)$ и $B_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z)$ соответственно. Заметим, что $A_j^0(0, D_y, D_z) = A_j(D_y, D_z)$ и $B_{j\rho\mu ks}^0(0, D_y, D_z) = B_{j\rho\mu ks}(D_y, D_z)$.

Обозначим через

$$B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

шар радиуса ε с центром в начале координат.

Для любого $\delta > 0$ рассмотрим такую функцию $\eta = \eta_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\eta(x) = 1$ при $x \in B_\delta$, $\operatorname{supp}\eta \subset B_{2\delta}$ и

$$|D^\beta \eta(x)| \leqslant k_1 \delta^{-|\beta|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

где $k_1 = k_1(\beta) > 0$ не зависит от δ.

Мы уточним значение δ в §§ 4 и 5, где будут доказаны априорные оценки и построен правый регуляризатор нелокальной задачи в ограниченной области.

Введем линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}''_g : \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^l(\Theta, \Gamma)$ по формуле

$$\mathcal{L}''_g v = \mathcal{L}_g v + \eta(\mathcal{L}'_g - \mathcal{L}_g) v.$$

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.4. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *и*

$$\dim \mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega)) = 0$$

при всех $\omega \in S^{n-3}$. *Тогда оператор*

$$\mathcal{L}''_g : \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^l(\Theta, \Gamma)$$

— изоморфизм при всех достаточно малых $\delta > 0$ *и* $\|(\mathcal{L}''_g)^{-1}\| \leqslant c_0$, *где* $c_0 > 0$ *не зависит от* δ.

Доказательство. Покажем, что

$$\left\|\eta(\mathcal{L}'_g - \mathcal{L}_g)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{2.5}$$

Для этого мы вначале докажем, что

$$\left\|\eta_1\big(B^0_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z)u - B_{j\rho\mu ks}(D_y, D_z)u\big)\right\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}}(\Theta_k)} \leqslant k_2\delta\|u\|_{H_a^{l+2m}(\Theta_k)} \tag{2.6}$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(\Theta_k)$, где $\eta_1(x) = \eta(\mathcal{G}^{-1}_{j\rho ks}y, z)$ и $k_2 > 0$ не зависит от u и δ.

Рассмотрим произвольное слагаемое

$$b\eta_1 D^\beta u, \quad |\beta| = m_{j\rho\mu},$$

входящее в выражение

$$\eta_1\big(B^0_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z)u - B_{j\rho\mu ks}(D_y, D_z)u\big),$$

где $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $b(0) = 0$. Из (2.4) и соотношения $b(0) = 0$ следует, что

$$\left|r^{|\alpha|}D^\alpha(b\eta_1)\right| \leqslant k_3\delta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |\alpha| \leqslant l + 2m - m_{j\rho\mu}, \tag{2.7}$$

где $k_3 = k_3(\alpha) > 0$ не зависит от δ. Используя (2.7) и определение весовых пространств, получаем (2.6).

Похожим образом доказываются аналогичные соотношения для пар операторов $A_j^0(x, D_y, D_z)$ и $A_j(D_y, D_z)$. Итак, утверждение (2.5) доказано.

Из условий этого следствия и из теоремы 2.1 вытекает, что оператор $\mathcal{L}_g(\omega)$ — изоморфизм при любом $\omega \in S^{n-3}$. Следовательно, по теореме 2.2 оператор $\mathcal{L}_g$ — изоморфизм. Отсюда и из соотношения (2.5) получаем утверждение следствия. ■

2.4. В этом пункте рассмотрим пример оператора, который соответствует нелокальной эллиптической задаче в двугранном угле и является изоморфизмом.

Пример 2.1. Пусть

$$\Theta = \big\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \varphi < d,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}\big\}$$

есть трехмерный двугранный угол, где r, φ — полярные координаты точки y. Пусть

$$\Gamma_1 = \big\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi = 0,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}\big\},$$
$$\Gamma_2 = \big\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi = d,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}\big\}$$

суть стороны двугранного угла Θ. Рассмотрим нелокальную эллиптическую задачу

$$-\Delta v(x) = f_0(x), \quad x \in \Theta, \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
&v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_1} - \alpha_1 v(\varphi + d/2, r, z)\big|_{\Gamma_1} = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1,\\
&v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_2} - \alpha_2 v(\varphi - d/2, r, z)\big|_{\Gamma_2} = f_2(x), \quad x \in \Gamma_2,
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, значения неизвестной функции v на сторонах Γ_1 и Γ_2 связаны со значениями v на полуплоскости $\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi = d/2,\ 0 < r,\ z \in \mathbb{R}\}$, лежащей строго внутри угла Θ. Нелокальные преобразования представляют собой только повороты в плоскости $\{y\}$ — преобразования по переменным r и z отсутствуют.

Введем линейный ограниченный оператор

$$
\mathcal{L} : H_a^2(\Theta) \to \mathcal{H}_a^0(\Theta, \Gamma) = H_a^0(\Theta) \times H_a^{3/2}(\Gamma_1) \times H_a^{3/2}(\Gamma_2)
$$

по формуле

$$
\mathcal{L}v = \Big(-\Delta v,\ v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_1} - \alpha_1 v(\varphi + d/2, r, z)\big|_{\Gamma_1},\ v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_2} - \alpha_2 v(\varphi - d/2, r, z)\big|_{\Gamma_2}\Big),
$$

ср. (1.11). Наряду с оператором $\mathcal{L}$ рассмотрим линейный ограниченный оператор

$$
\mathcal{L}(\omega) : E_a^2(\theta) \to \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma) = E_a^0(\theta) \times E_a^{3/2}(\gamma_1) \times E_a^{3/2}(\gamma_2),
$$

действующий по формуле

$$
\mathcal{L}(\omega)V = \Big(-\Delta_y V + V,\ V(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} - \alpha_1 V(\varphi + d/2, r)\big|_{\gamma_1},\ V(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} - \alpha_2 V(\varphi - d/2, r)\big|_{\gamma_2}\Big),
$$

где

$$
\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < d,\ 0 < r\},
$$

$$
\gamma_1 = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = 0,\ 0 < r\}, \quad \gamma_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = d,\ 0 < r\},
$$

$\omega = \pm 1$, ср. (2.1). (Вообще говоря, в определении оператора $\mathcal{L}(\omega)$ следует писать $-\Delta_y V + \omega^2 V$ вместо $-\Delta_y V + V$, но $\omega^2 = 1$, если $\omega = \pm 1$. Таким образом, в данном примере оператор $\mathcal{L}(\omega)$ не зависит от ω.)

Оператор-функция $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda) : W^2(0, d) \to \mathcal{W}^0[0, d] = L_2(0, d) \times \mathbb{C}^2$, соответствующая оператору $\mathcal{L}(\omega)$, имеет вид

$$
\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)u = \big(-u_{\varphi\varphi} + \lambda^2 u,\ u\big|_{\varphi=0} - \alpha_1 u\big|_{\varphi=d/2},\ u\big|_{\varphi=d} - \alpha_2 u\big|_{\varphi=d/2}\big),
$$

ср. (2.2).

Докажем, что оператор $\mathcal{L}(\omega)$ — изоморфизм при $0 \leqslant a \leqslant 2$, $0 < |\alpha_1 + \alpha_2| < 2$ и $0 < d < 2 \operatorname{arctg} \sqrt{4(\alpha_1 + \alpha_2)^{-2} - 1}$. В этом случае из теоремы 2.2 будет следовать, что оператор $\mathcal{L}$ — также изоморфизм.

Доказательство состоит из трех частей.

1. Докажем, что уравнение

$$
\mathcal{A}_\alpha w = f_0 \tag{2.10}
$$

имеет единственное решение для любой правой части $f_0 \in L_2(\theta)$, где $\mathcal{A}_\alpha : \mathrm{D}(\mathcal{A}_\alpha) \subset L_2(\theta) \to L_2(\theta)$ — линейный ограниченный оператор, действующий по формуле

$$
\mathcal{A}_\alpha w = -\Delta w + w, \quad w \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_\alpha) = \big\{w \in W_\alpha^1(\theta) : -\Delta w + w \in L_2(\theta)\big\},
$$

$$
\begin{aligned}
W_\alpha^1(\theta) = \Big\{w \in W^1(\theta) : {}& w(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} - \alpha_1 w(\varphi + d/2, r)\big|_{\gamma_1} = 0,\\
& w(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} - \alpha_2 w(\varphi - d/2, r)\big|_{\gamma_2} = 0\Big\}.
\end{aligned}
$$

Для доказательства однозначной разрешимости уравнения (2.10) мы сведем его к эллиптическому функционально-дифференциальному уравнению.

2. Покажем, что всякое решение уравнения (2.10) принадлежит $H_1^2(\theta \cap B_R)$ для всех $R > 0$.
3. Докажем, что уравнение

$$\mathcal{L}(\omega)V = f \tag{2.11}$$

имеет единственное решение для любой правой части $f = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$.

1. Докажем, что уравнение (2.10) имеет единственное решение $w \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ для любой правой части $f_0 \in L_2(\theta)$. Для этого сведем уравнение (2.10) к функционально-дифференциальному уравнению.

1а. Рассмотрим функциональный оператор $\mathcal{R} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, заданный формулой

$$\mathcal{R}u = u(\varphi, r) + \alpha_1 u(\varphi + d/2, r) + \alpha_2 u(\varphi - d/2, r).$$

Пусть $I_\theta : L_2(\theta) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ — оператор продолжения нулем в $\mathbb{R}^2$ функции, заданной на θ, а $P_\theta : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\theta)$ — оператор сужения на θ функции, определенной в $\mathbb{R}^2$. Положим

$$\mathcal{R}_\theta = P_\theta \mathcal{R} I_\theta.$$

Докажем, что оператор $\mathcal{R}_\theta$ имеет ограниченный обратный

$$\mathcal{R}_\theta^{-1} = P_\theta \mathcal{R}' I_\theta,$$

где

$$\mathcal{R}'u = \frac{u(\varphi, r) - \alpha_1 u(\varphi + d/2, r) - \alpha_2 u(\varphi - d/2, r)}{1 - \alpha_1 \alpha_2},$$

при условии, что $\alpha_1\alpha_2 \neq 1$ (это неравенство действительно выполнено, так как $|\alpha_1 + \alpha_2| < 2$). В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta u &= u(\varphi, r) + \alpha_1 u(\varphi + d/2, r) \quad \text{при} \quad y \in \theta_1 = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < d/2,\ 0 < r\}, \\ \mathcal{R}_\theta u &= u(\varphi, r) + \alpha_2 u(\varphi - d/2, r) \quad \text{при} \quad y \in \theta_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : d/2 < \varphi < d,\ 0 < r\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Следовательно,

$$\mathcal{R}_\theta^{-1}\mathcal{R}_\theta u = \frac{u(\varphi,r) + \alpha_1 u(\varphi + d/2, r) - \alpha_1 u(\varphi + d/2, r) - \alpha_1\alpha_2 u(\varphi, r)}{1 - \alpha_1\alpha_2} = u(\varphi, r) \quad \text{при } y \in \theta_1,$$

$$\mathcal{R}_\theta^{-1}\mathcal{R}_\theta u = \frac{u(\varphi,r) + \alpha_2 u(\varphi - d/2, r) - \alpha_2 u(\varphi - d/2, r) - \alpha_1\alpha_2 u(\varphi, r)}{1 - \alpha_1\alpha_2} = u(\varphi, r) \quad \text{при } y \in \theta_2,$$

откуда имеем $\mathcal{R}_\theta^{-1}\mathcal{R}_\theta u(y) = u(y)$ при $y \in \theta$. Аналогично получим $\mathcal{R}_\theta \mathcal{R}_\theta^{-1} u(y) = u(y)$ при $y \in \theta$. Более того, используя рассуждения из доказательства теоремы 8.1 в [30, гл. 2, § 8], убеждаемся в том, что операторы

$$\mathcal{R}_\theta : \mathring{W}^1(\theta) \to W_\alpha^1(\theta), \quad \mathcal{R}_\theta : \mathring{W}^1(\theta \cap B_R) \to W_\alpha^1(\theta \cap B_R)$$

суть изоморфизмы при всех $R > 0$, где

$$\mathring{W}^1(\theta) = \{u \in W^1(\theta) : u\big|_{\gamma_1} = 0,\ u\big|_{\gamma_2} = 0\},$$

$$\mathring{W}^1(\theta \cap B_R) = \{u \in W^1(\theta \cap B_R) : u\big|_{\gamma_1} = 0,\ u\big|_{\gamma_2} = 0\},$$

$$W^1_\alpha(\theta\cap B_R)=\Big\{w\in W^1(\theta\cap B_R):$$
$$w(\varphi,r)\big|_{\gamma_1}-\alpha_1 w(\varphi+d/2,r)\big|_{\gamma_1}=0,\ w(\varphi,r)\big|_{\gamma_2}-\alpha_2 w(\varphi-d/2,r)\big|_{\gamma_2}=0\Big\}.$$

1b. По доказанному в части 1a уравнение (2.10) эквивалентно уравнению

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}}u=f_0, \tag{2.13}$$

где $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}:\mathrm{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})\subset L_2(\theta)\to L_2(\theta)$ — неограниченный оператор, действующий по формуле

$$\mathcal{A}_{\mathcal{R}}u=(-\Delta+I)\mathcal{R}_\theta u,\quad u\in\mathrm{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{R}})=\big\{u\in\mathring{W}^1(\theta):(-\Delta+I)\mathcal{R}_\theta u\in L_2(\theta)\big\}$$

(здесь I — единичный оператор в $L_2(\theta)$).

Аналогично теореме 10.1 в [30, гл. 2, § 10] можно доказать, что уравнение (2.13) имеет единственное решение для любой правой части $f_0\in L_2(\theta)$. Для удобства читателя приведем это доказательство.

Рассмотрим полуторалинейную форму $b_{\mathcal{R}}[u,v]$ с областью определения $\mathrm{D}(b_{\mathcal{R}})=\mathring{W}^1(\theta)$, заданную формулой

$$b_{\mathcal{R}}[u,v]=\int\limits_\theta\bigg(\sum_{i=1,2}(\mathcal{R}_\theta u)_{y_i}\overline{v_{y_i}}+\mathcal{R}_\theta u\bar v\bigg)\,dy. \tag{2.14}$$

Очевидно,

$$\mathcal{R}_\theta u_{y_i}=(\mathcal{R}_\theta u)_{y_i}\quad\text{для}\quad u\in\mathring{W}^1(\theta). \tag{2.15}$$

Из неравенства Шварца и из (2.15) следует, что

$$\big|b_{\mathcal{R}}[u,v]\big|\leqslant k_1\|u\|_{\mathring{W}^1(\theta)}\|v\|_{\mathring{W}^1(\theta)}, \tag{2.16}$$

где $k_1>0$ не зависит от u и v.

Введем изоморфизм $\mathcal{U}:L_2(\theta)\to L_2(\theta_1)\times L_2(\theta_1)$ по формуле

$$(\mathcal{U}u)_i(y)=u(\varphi+(i-1)d/2,r),\quad y\in\theta_1,\quad i=1,2.$$

Положим $R_1=\begin{pmatrix}1&\alpha_1\\ \alpha_2&1\end{pmatrix}$. Непосредственно убеждаемся в том, что

$$R_\theta u=\mathcal{U}^{-1}R_1\mathcal{U}u=\mathcal{U}^*R_1\mathcal{U}u. \tag{2.17}$$

Симметрическая часть матрицы R_1 имеет вид

$$\frac{R_1+R_1^*}{2}=\begin{pmatrix}1&(\alpha_1+\alpha_2)/2\\ (\alpha_1+\alpha_2)/2&1\end{pmatrix}.$$

Так как $|\alpha_1+\alpha_2|<2$, то матрица $(R_1+R_1^*)/2$ положительно определена. Следовательно, используя (2.15) и (2.17), получим

$$\operatorname{Re} b_{\mathcal{R}}[u,u]=\int\limits_{\theta_1}\bigg\{\sum_i\bigg(\frac{(R_1+R_1^*)}{2}(\mathcal{U}u_{y_i}),\mathcal{U}u_{y_i}\bigg)_{\mathbb{C}^2}+\bigg(\frac{(R_1+R_1^*)}{2}\mathcal{U}u,\mathcal{U}u\bigg)_{\mathbb{C}^2}\bigg\}\,dy\geqslant$$

$$\geqslant k_2 \int\limits_{\theta_1} \left\{ \sum_i (\mathcal{U}u_{y_i}, \mathcal{U}u_{y_i})_{\mathbb{C}^2} + (\mathcal{U}u, \mathcal{U}u)_{\mathbb{C}^2} \right\} dy = k_2 \|u\|^2_{\mathring{W}^1(\theta)}, \tag{2.18}$$

где $k_2 > 0$ не зависит от u.

В силу неравенств (2.16) и (2.1) форма $b_{\mathcal{R}}$ есть замкнутая секториальная форма в $L_2(\theta)$ с областью определения $\mathrm{D}(b_{\mathcal{R}}) = \mathring{W}^1(\theta)$ и вершиной $k_2 > 0$ (см. [10, гл. 6]). Из первой теоремы о представлении (см. [10, гл. 6, § 2]) следует, что m-секториальный оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$, ассоциированный с формой $b_{\mathcal{R}}$, имеет ограниченный обратный $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}^{-1} : L_2(\theta) \to \mathring{W}^1(\theta)$.

Таким образом, доказано, что уравнение (2.10) имеет единственное решение $w = \mathcal{R}_\theta \mathcal{A}_{\mathcal{R}}^{-1} f_0 \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ для любой правой части $f_0 \in L_2(\theta)$.

2. Теперь докажем, что если $w \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ — решение уравнения (2.10), то $w \in H_1^2(\theta \cap B_R(0))$ для любого $R > 0$.

2a. Обозначим

$$\theta^{sj} = \theta \cap \{2^{s-j} < |y| < 2^{s+j}\}, \quad \gamma_\rho^{sj} = \gamma_\rho \cap \{2^{s-j} < |y| < 2^{s+j}\},$$

где

$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad \rho, j = 1, 2, 3; \quad \gamma_3 = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = d/2,\ 0 < r\}.$$

Покажем, что $w \in W^2(\theta^{s3})$ для любого s. По теореме о внутренней гладкости (см., например, теорему 3.2 в [16, гл. 2, § 3]) имеем $w\big|_{\gamma_3^{s3}} \in W^{3/2}(\gamma_3^{s3})$. Так как

$$w(\varphi, r)\big|_{\gamma_1} = \alpha_1 w(\varphi + d/2, r)\big|_{\gamma_1},$$
$$w(\varphi, r)\big|_{\gamma_2} = \alpha_2 w(\varphi - d/2, r)\big|_{\gamma_2},$$

то

$$w\big|_{\gamma_1^{s3}} \in W^{3/2}(\gamma_1^{s3}), \quad w\big|_{\gamma_2^{s3}} \in W^{3/2}(\gamma_2^{s3}).$$

Следовательно, используя теорему о гладкости решений локальных эллиптических задач в ограниченных областях (см., например, теорему 8.2 в [16, гл. 2, § 8]), получаем $w \in W^2(\theta^{s2})$. Поскольку $\theta^{s3} = \theta^{s-1,2} \cup \theta^{s+1,2}$, то $w \in W^2(\theta^{s3})$ для любого s.

2b. Докажем, что

$$\|w\|_{W^2(\theta^{01})} \leqslant k_3(\| - \Delta w\|_{L_2(\theta^{03})} + \|w\|_{W^1(\theta^{03})}), \tag{2.19}$$

где $k_3, k_4, \ldots > 0$ не зависят от w.

Для этого обозначим

$$\theta_3^{02} = \{y \in \theta^{02} : d/4 < \varphi < 3d/4\}$$

и рассмотрим такую функцию $\xi_0 \in C_0^\infty(\theta^{03})$, что $\xi_0(y) = 1$ при $y \in \theta_3^{02}$.

Используя априорную оценку решений локальных эллиптических задач (см., например, теорему 8.2 в [16, гл. 2, § 8] и теорему 9.1 в [16, гл. 2, § 9]) и формулу Лейбница, имеем

$$\|w\big|_{\gamma_3^{02}}\|_{W^{3/2}(\gamma_3^{02})} \leqslant \|w\|_{W^2(\theta_3^{02})} \leqslant \|\xi_0 w\|_{W^2(\theta^{03})} \leqslant$$
$$\leqslant k_4\| - \Delta(\xi_0 w)\|_{L_2(\theta^{03})} \leqslant k_5\big(\| - \Delta w\|_{L_2(\theta^{03})} + \|w\|_{W^1(\theta^{03})}\big). \tag{2.20}$$

Рассмотрим такую функцию $\xi_1(r) \in C_0^\infty(0, +\infty)$, что $\xi_1(r) = 1$ при $2^{-1} \leqslant r \leqslant 2$ и $\operatorname{supp} \xi_1 \subset (2^{-2}, 2^2)$. Снова применяя теорему 8.2 в [16, гл. 2, § 8] и теорему 9.1

в [16, гл. 2, § 9] и используя (2.20), получаем

$$\|w\|_{W^2(\theta^{01})} \leqslant \|\xi_1 w\|_{W^2(\theta^{02})} \leqslant k_6\Big(\| -\Delta(\xi_1 w)\|_{L_2(\theta^{02})} + \sum_{\rho=1,2} \big\|(\xi_1 w)\big|_{\gamma_\rho^{02}}\big\|_{W^{3/2}(\gamma_\rho^{02})}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant k_7\big(\| -\Delta w\|_{L_2(\theta^{03})} + \|w\|_{W^1(\theta^{03})}\big).$$

Неравенство (2.19) доказано.

2c. Теперь покажем, что $w \in H_1^2(\theta \cap B_R)$ для любого $R > 0$. Из части 2a доказательства следует, что $w \in H_1^2(\theta^{sj})$ (в определении весового пространства $H_1^2(\theta^{sj})$ считаем $\rho(y) = |y|$). Положим $y' = 2^{-s}y$. Очевидно, $y' \in \theta^{0j}$, если $y \in \theta^{sj}$. Следовательно, используя неравенства $2^{s-1} < r < 2^{s+1}$ для $y \in \theta^{s1}$, обозначая $w^s(y') = w(2^s y')$ и применяя неравенство (2.19), получаем

$$\|w\|_{H_1^2(\theta^{s1})} \leqslant k_8 \sum_{|\alpha|\leqslant 2} 2^{2s(1-2+|\alpha|)} \int\limits_{\theta^{s1}} \big|D_y^\alpha w(y)\big|^2\, dy = k_8 \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \int\limits_{\theta^{01}} \big|D_{y'}^\alpha w^s(y')\big|^2\, dy' \leqslant$$
$$\leqslant k_9\Bigg(\big\|-\Delta_{y'} w^s(y')\big\|^2_{L_2(\theta^{03})} + \sum_{|\alpha|\leqslant 1} \big\|D_{y'}^\alpha w^s(y')\big\|^2_{L_2(\theta^{03})}\Bigg) =$$
$$= k_9\Bigg(2^{2s}\big\|-\Delta_y w(y)\big\|^2_{L_2(\theta^{s3})} + \sum_{|\alpha|\leqslant 1} 2^{2s(0-1+|\alpha|)}\big\|D_y^\alpha w(y)\big\|^2_{L_2(\theta^{s3})}\Bigg), \qquad (2.21)$$

где $k_7, k_8, \ldots > 0$ не зависят от w и s. Из (2.21) следует, что

$$\|w\|_{H_1^2(\theta^{s1})} \leqslant k_{10}\big(\| -\Delta w + w\|^2_{L_2(\theta^{s3})} + \|w\|_{H_0^1(\theta^{s3})}\big) \qquad (2.22)$$

для всех $s \leqslant [\log_2 R]$.

Теперь покажем, что

$$w \in H_0^1(\theta \cap B_{8R}). \qquad (2.23)$$

Действительно, по предположению

$$w \in W_\alpha^1(\theta \cap B_{8R}). \qquad (2.24)$$

Следовательно, $\mathcal{R}_\theta^{-1} w \in \mathring{W}^1(\theta \cap B_{8R})$, так как оператор $\mathcal{R}_\theta : \mathring{W}^1(\theta \cap B_{8R}) \to W_\alpha^1(\theta \cap B_{8R})$ — изоморфизм. Из леммы 4.8 в [13] вытекает, что $\mathring{W}^1(\theta \cap B_{8R}) \subset H_0^1(\theta \cap B_{8R})$, откуда получаем $\mathcal{R}_\theta^{-1} w \in H_0^1(\theta \cap B_{8R})$. Следовательно, используя (2.12), имеем

$$w \in H_0^1(\theta_1 \cap B_{8R}), \quad w \in H_0^1(\theta_2 \cap B_{8R}).$$

Отсюда и из (2.24) вытекает (2.23).

Суммируя неравенства (2.22) по всем $s \leqslant [\log_2 R]$ и учитывая соотношение (2.23), получим

$$\|w\|_{H_1^2(\theta\cap B_R)} \leqslant k_{11}\big(\| -\Delta w + w\|^2_{L_2(\theta\cap B_{8R})} + \|w\|_{H_0^1(\theta\cap B_{8R})}\big).$$

Таким образом, доказано, что $w \in H_1^2(\theta \cap B_R)$.

3. Наконец, докажем, что уравнение (2.11) имеет единственное решение $V \in E_a^2(\theta)$ для любой правой части $f \in \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$, где $0 \leqslant a \leqslant 2$.

3a. Пусть $w \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ — решение уравнения (2.10) с правой частью $f_0 \in C_0^\infty(\overline{\theta} \setminus \{0\})$. Легко проверить, что полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)$, если $0 < d < 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{4(\alpha_1+\alpha_2)^{-2}-1}$ (см. [28, п. 9.1]). С другой стороны, по доказанному $w \in H_1^2(\theta \cap B_1)$, и выполнены неравенства $-1 \leqslant a+1-2 \leqslant 1$. Следовательно, по лемме 3.2 в [21] об асимптотике решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах $w \in H_a^2(\theta \cap B_1)$.

3b. Теперь докажем, что уравнение

$$\mathcal{L}(\omega)w = (F_0, 0, 0) \tag{2.25}$$

имеет решение $w \in E_a^2(\theta)$ для любой правой части $F_0 \in E_a^0(\theta)$.

Повторяя рассуждения из доказательства неравенства (2.4) в [19, гл. 6, § 2], убеждаемся в том, что решение $w \in \mathrm{D}(\mathcal{A}_\alpha)$ уравнения (2.10) с правой частью $f_0 \in C_0^\infty(\overline{\theta} \setminus \{0\})$ принадлежит $E_a^2(\theta \setminus B_{1/2})$. Отсюда и из части 3а нашего доказательства получаем $w \in E_a^2(\theta)$. Так как прямая $\mathrm{Im}\,\lambda = a+1-2$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)$, то из теоремы 2.1 следует, что множество функций $F_0 \in E_a^0(\theta)$, для который уравнение (2.25) разрешимо, замкнуто в $E_a^0(\theta)$. С другой стороны, множество $C_0^\infty(\overline{\theta} \setminus \{0\})$ всюду плотно в $E_a^0(\theta)$. Следовательно, уравнение (2.25) имеет решение $w \in E_a^2(\theta)$ для любой правой части $F_0 \in E_a^0(\theta)$.

3c. Покажем, что $\mathcal{R}(\mathcal{L}(\omega)) = \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$. Рассмотрим такие функции $U_\rho \in E_a^2(\theta)$, что $U_\rho|_{\gamma_\rho} = f_\rho$, $\rho = 1, 2$. Введем срезающие функции $\eta_\rho(\varphi) \in C^\infty[0, d]$ такие, что $\eta_1(\varphi) = 1$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant d/4$, $\eta_1(\varphi) = 0$ при $d/3 \leqslant \varphi \leqslant d$ и $\eta_2(\varphi) = 1$ при $3d/4 \leqslant \varphi \leqslant d$, $\eta_2(\varphi) = 0$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2d/3$. Тогда уравнение (2.11) эквивалентно уравнению (2.25), где $F_0 = \Delta U - U + f_0$, $U = \eta_1 U_1 + \eta_2 U_2 \in E_a^2(\theta)$ и $w = V - U$. В части 3b доказано, что уравнение (2.25) имеет решение $w \in E_a^2(\theta)$ для любой правой части $F_0 \in E_a^0(\theta)$. Следовательно, уравнение (2.11) имеет решение $V = w + U \in E_a^2(\theta)$ для любой правой части $f \in \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$.

3d. Осталось доказать, что $\mathcal{N}(\mathcal{L}(\omega)) = \{0\}$. Пусть $w \in E_a^2(\theta)$ — решение уравнения (2.25) с правой частью $F_0 = 0$. Используя те же соображения, что в части 3а доказательства, имеем $w \in H_1^2(\theta \cap B_1) \subset W^1(\theta \cap B_1)$. С другой стороны, $E_a^2(\theta \setminus \overline{B_{1/2}}) \subset W^1(\theta \setminus \overline{B_{1/2}})$, поскольку $a \geqslant 0$. Следовательно, $w \in W^1(\theta)$, и, значит, $w = 0$ согласно части 1 доказательства.

Отметим, что пример 2.1 ранее был изучен в работе [26, § 10] другим методом. Подход, предложенный в [26], основан на формулах Грина для нелокальных эллиптических задач (см. [26]) и на взаимосвязи между нелокальными эллиптическими задачами и краевыми задачами для функционально-дифференциальных уравнений (см. [30]). Другие примеры однозначно разрешимых нелокальных эллиптических задач в двугранных углах, обобщающие задачу (2.8), (2.9), построены в работе [20].

2.5. Для каждой точки $g \in \mathcal{K}_2$ рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_g(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}_+^2) \to \mathcal{E}_a^l(\mathbb{R}_+^2, \gamma)$, действующий по формуле

$$\mathcal{L}_g(\omega)V = \Big(A(D_y, \omega)V(y),\ B_{i\mu 0}(D_y, \omega)V(y)\big|_{\mathbb{R}_-},\ B_{i\mu 0}(D_y, \omega)V(y)\big|_{\mathbb{R}_+}\Big), \tag{2.26}$$

где

$$\mathcal{E}_a^l(\mathbb{R}_+^2, \gamma) = E_a^l(\mathbb{R}_+^2) \times E_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}_-) \times E_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}_+),$$

$\mathbb{R}_+^2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : |\varphi| < \pi/2\}$, $\mathbb{R}_\pm = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varphi = \pm\pi/2\}$, $\omega \in S^{n-3}$, ср. (1.16).

Запишем операторы $A(D_y, 0)$ и $B_{i\mu 0}(D_y, 0)$ в полярных координатах:

$$A(D_y, 0) = r^{-2m}\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, rD_r), \quad B_{i\mu 0}(D_y, 0) = r^{-m_{i\mu}}\widehat{B}_{i\mu 0}(\varphi, D_\varphi, rD_r).$$

Рассмотрим аналитическую оператор-функцию $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda) : W^{l+2m}(-\pi/2, \pi/2) \to \mathcal{W}^l[-\pi/2, \pi/2]$, заданную формулой

$$\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)w = \Big(\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w,\ \widehat{B}_{i\mu 0}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w\big|_{\varphi=-\pi/2},\ \widehat{B}_{i\mu 0}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w\big|_{\varphi=\pi/2}\Big), \qquad (2.27)$$

где $\mathcal{W}^l[-\pi/2, \pi/2] = W^l(-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, ср. (2.2).

Из результатов работ [1, 4] вытекает существование такой конечно-мероморфной оператор-функции $\widehat{\mathcal{R}}_g(\lambda) : \mathcal{W}^l[-\pi/2, \pi/2] \to \mathcal{W}^{l+2m}(-\pi/2, \pi/2)$, что $\widehat{\mathcal{L}}_g^{-1}(\lambda) = \widehat{\mathcal{R}}_g(\lambda)$ при любом λ, не совпадающим с полюсом оператор-функции $\widehat{\mathcal{R}}_g(\lambda)$. Кроме того, если $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ — полюс оператор-функции $\widehat{\mathcal{R}}_g(\lambda)$, то λ_0 — собственное значение оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ и существует такое число $\delta > 0$, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \nu_0| < \delta\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$.

Следующая теорема устанавливает связь между операторами $\mathcal{L}_g$ и $\mathcal{L}_g(\omega)$ (см. теорему 2.1 в [19, гл. 6, § 2]).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* 1.1 *и* 1.2. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *и* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega)) = 0$ *для всех* $\omega \in S^{n-3}$. *Тогда оператор* $\mathcal{L}_g : \mathcal{H}_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n_+) \to \mathcal{H}_a^l(\mathbb{R}^n_+, \Gamma)$ — *изоморфизм.*

§ 3. Локальные эллиптические задачи в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$

3.1. В пп. 3.1 и 3.2 мы напомним некоторые известные результаты о разрешимости эллиптических задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, полученные в [5, 21]. Эти результаты применяются к исследованию локальных эллиптических задач в $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}$, $n \geqslant 3$, см. пп. 3.3–3.5.

Пусть A — собственно эллиптический однородный оператор с постоянными комплексными коэффициентами, заданный формулой

$$A = A(D_y) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D_y^\alpha.$$

Оператор $A : H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to H_a^l(\mathbb{R}^2)$ ограничен при каждом фиксированном целом $l \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение

$$Av = f_0(y), \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \qquad (3.1)$$

где $f_0 \in H_a^l(\mathbb{R}^2)$.

Запишем оператор $A(D_y)$ в полярных координатах:

$$A(D_y) = r^{-2m}\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, rD_r) = r^{-2m} \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leqslant 2m} a_{\alpha_1\alpha_2}(\varphi) D_\varphi^{\alpha_1} (rD_r)^{\alpha_2},$$

где $a_{\alpha_1\alpha_2} \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$, $C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$ — множество функций, определенных на отрезке $[0, 2\pi]$ и таких, что их 2π-периодические продолжения бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$.

Полагая $\tau = \ln r$, из (3.1) получаем

$$\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, D_\tau)v = F_0(\varphi, \tau), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\infty < \tau < \infty, \qquad (3.2)$$

$$D_\varphi^j v\big|_{\varphi=0} = D_\varphi^j v\big|_{\varphi=2\pi}, \quad -\infty < \tau < \infty, \quad j = 0, \dots, l + 2m - 1, \qquad (3.3)$$

где

$$D_\tau = -\frac{i\partial}{\partial\tau}, \quad F_0(\varphi,\tau) = e^{2m\tau} f_0(\varphi,\tau), \quad D_\varphi^j F_0\big|_{\varphi=0} = D_\varphi^j F_0\big|_{\varphi=2\pi}, \quad j = 1,\ldots,l-1.$$

Используя преобразование Фурье по переменной τ, из соотношений (3.2) и (3.3) получим

$$\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\widehat{v}(\varphi,\lambda) = \widehat{F}_0(\varphi,\lambda), \quad 0<\varphi<2\pi, \tag{3.4}$$

$$D_\varphi^j \widehat{v}\big|_{\varphi=0} = D_\varphi^j \widehat{v}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad j = 0,\ldots,l+2m-1. \tag{3.5}$$

Обозначим через $W_{2\pi}^k(0,2\pi)$ замыкание множества $C_{2\pi}^\infty[0,2\pi]$ в пространстве $W^k(0,2\pi)$. Рассмотрим оператор-функцию $\widehat{A}(\lambda) : W_{2\pi}^{l+2m}(0,2\pi) \to W_{2\pi}^l(0,2\pi)$, заданную формулой

$$\widehat{A}(\lambda)w = \widehat{A}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w(\varphi).$$

Из результатов работы [21, § 1] вытекает существование такой конечно-мероморфной оператор-функции $\widehat{\mathcal{R}}(\lambda) : \mathcal{W}_{2\pi}^l(0,2\pi) \to W_{2\pi}^{l+2m}(0,2\pi)$, что $\widehat{A}^{-1}(\lambda) = \widehat{\mathcal{R}}(\lambda)$ при любом λ, не совпадающим с полюсом оператор-функции $\widehat{\mathcal{R}}(\lambda)$. Кроме того, если $\lambda_0 = \mu_0 + i\nu_0$ — полюс оператор-функции $\widehat{\mathcal{R}}(\lambda)$, то λ_0 — собственное значение оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$ и существует такое число $\delta > 0$, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \nu_0| < \delta\}$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$.

Следующий результат доказан в [21, § 1].

Лемма 3.1. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{A}(\lambda)$. *Тогда уравнение* (3.1) *имеет единственное решение* $v \in H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ *для любой правой части* $f_0 \in H_a^l(\mathbb{R}^2)$ *и*

$$\|v\|_{H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)} \leqslant c\|f_0\|_{H_a^l(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.6}$$

где $c > 0$ *не зависит от* f_0.

3.2. Теперь рассмотрим асимптотику решений эллиптических задач в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Пусть $l_1, l_2 \geqslant 0$ — целые числа, и пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что

$$h_2 = a_2 + 1 - l_2 - 2m < a_1 + 1 - l_1 - 2m = h_1.$$

В силу перечисленных выше свойств оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$ полоса $h_2 < \operatorname{Im}\lambda < h_1$ содержит конечное множество собственных значений λ_j, $j = 1,\ldots,J$, оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$. Пусть q_j — геометрическая кратность собственного значения λ_j. Обозначим через

$$\{\psi_j^{0,q}(\varphi),\ldots,\psi_j^{p_{jq}-1,q}(\varphi)\}, \quad q = 1,\ldots,q_j, \tag{3.7}$$

каноническую систему жордановых цепочек, соответствующую собственному значению λ_j, где $p_{j1} \geqslant p_{j2} \geqslant \ldots \geqslant p_{jq_j}$ — ранги собственных векторов $\psi_j^{0,1}(\varphi),\ldots,\psi_j^{0,q_j}(\varphi)$ соответственно, см. [4, § 1]. Известно, что жорданова цепочка (3.7) удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{s=0}^{p} \frac{1}{s!}\partial_\lambda^s \widehat{A}(\lambda_j)\psi_j^{p-s,q}(\varphi) = 0, \quad p = 0,\ldots,p_{jq}-1, \tag{3.8}$$

где $\partial_\lambda^s = \partial^s/\partial\lambda^s$.

Лемма 3.2. *Пусть* $u \in H^{l_1+2m}_{a_1}(\mathbb{R}^2)$ — *решение уравнения* (3.1), *и пусть* $f_0 \in H^{l_1}_{a_1}(\mathbb{R}^2) \cap H^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = h_2$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{A}(\lambda)$. *Тогда*

$$v(y) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{q=1}^{q_j} \sum_{k=0}^{p_{jq}-1} \alpha_j^{kq} v_j^{kq}(y) + w(y), \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \tag{3.9}$$

здесь

$$v_j^{kq}(y) = r^{i\lambda_j} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}(i \ln r)^n \psi_j^{k-n,q}(\varphi), \tag{3.10}$$

$\alpha_j^{kq} = \alpha_j^{kq}(f_0)$ — *линейные ограниченные функционалы на пространстве* $H^{l_1}_{a_1}(\mathbb{R}^2) \cap H^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$, *функция* $w \in H^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$ *удовлетворяет уравнению* $Aw = f_0$ *и неравенству*

$$\|w\|_{H^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)} \leqslant c\|f_0\|_{H^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2)}, \tag{3.11}$$

где $c > 0$ *не зависит от* f_0.

Эта лемма была получена в работе [21, § 3] в несколько иной форме. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.4 в [19, гл. 3, § 1]; см. также [5, § 5], где явно вычислены коэффициенты α_j^{kq}.

Замечание 3.1. Легко видеть, что $\psi_j^{s,q} \in C^\infty_{2\pi}[0, 2\pi]$, $j = 1, \ldots, J$; $q = 1, \ldots, q_j$; $s = 0, \ldots, p_{jq} - 1$.

Замечание 3.2. Лемма 3.2 справедлива также в случае $h_2 \geqslant h_1$.

Рассуждая так же, как в [19, гл. 3, § 1], получим следствия из леммы 3.2 (см. также [5, § 5]).

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия леммы* 3.2, *и пусть полоса* $h_2 < \operatorname{Im}\lambda < h_1$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{A}(\lambda)$. *Тогда* $v \in H^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$.

Следствие 3.2. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *содержит собственное значение оператор-функции* $\widehat{A}(\lambda)$. *Тогда ядро оператора* $A : H^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2) \to H^l_a(\mathbb{R}^2)$ *тривиально, а образ оператора* A *незамкнут в* $H^l_a(\mathbb{R}^2)$.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta v(y) = f_0(y), \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \tag{3.12}$$

Введем оператор $A : H^2_a(\mathbb{R}^2) \to H^0_a(\mathbb{R}^2)$ по формуле $Av = -\Delta v$.

Переходя к переменным τ, φ и используя преобразование Фурье по переменной τ, получим

$$-\widehat{v}_{\varphi\varphi}(\varphi, \lambda) + \lambda^2 \widehat{v}(\varphi, \lambda) = \widehat{F}_0(\varphi, \lambda), \quad 0 < \varphi < 2\pi, \tag{3.13}$$

$$\widehat{v}\big|_{\varphi=0} = \widehat{v}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad \widehat{v}_\varphi\big|_{\varphi=0} = \widehat{v}_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}, \tag{3.14}$$

где $F_0(\varphi, \tau) = e^{2\tau} f_0(\varphi, \tau)$, ср. (3.4), (3.5).

Изучим задачу о собственных значениях для соответствующей оператор-функции $\widehat{A}(\lambda) : W^2_{2\pi}(0, 2\pi) \to L_2(0, 2\pi)$, заданной формулой

$$\widehat{A}(\lambda)\widehat{v} = -\widehat{v}_{\varphi\varphi} + \lambda^2 \widehat{v}.$$

Общее решение уравнения

$$-\widehat{v}_{\varphi\varphi} + \lambda^2\widehat{v} = 0 \tag{3.15}$$

при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$\widehat{v}(\varphi) = c_1 e^{\lambda\varphi} + c_2 e^{-\lambda\varphi}. \tag{3.16}$$

Подставляя это решение в (3.14), имеем

$$c_1(1 - e^{\lambda 2\pi}) + c_2(1 - e^{-\lambda 2\pi}) = 0, \quad c_1\lambda(1 - e^{\lambda 2\pi}) - c_2\lambda(1 - e^{-\lambda 2\pi}) = 0.$$

Следовательно, множество ненулевых собственных значений оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$ совпадает с множеством ненулевых корней уравнения

$$e^{\lambda 2\pi} = 1,$$

которые имеют вид

$$\lambda_k = ik, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots\ . \tag{3.17}$$

Очевидно, что $\lambda_0 = 0$ — также собственное значение оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$.

1. Вначале рассмотрим собственное значение $\lambda_0 = 0$. Соответствующий собственный вектор имеет вид $\psi_0^{0,1}(\varphi) = 1$ (с точностью до постоянного множителя). Геометрическая кратность собственного значения $\lambda_0 = 0$ равна 1.

Согласно (3.8) присоединенный вектор $\psi_0^{1,1}(\varphi)$ должен удовлетворять уравнению

$$\widehat{A}(0)\psi_0^{1,1} + \partial_\lambda \widehat{A}(0)\psi_0^{0,1} = 0,$$

которое эквивалентно следующей задаче:

$$(\psi_0^{1,1})_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

$$\psi_0^{1,1}\big|_{\varphi=0} = \psi_0^{1,1}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad (\psi_0^{1,1})_\varphi\big|_{\varphi=0} = (\psi_0^{1,1})_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}.$$

Следовательно, $\psi_0^{1,1} = 0$ (отметим, что присоединенный вектор оператор-функции, в отличие от собственного вектора, может равняться нулю).

Согласно (3.8) второй присоединенный вектор $\psi_0^{2,1}(\varphi)$ должен удовлетворять уравнению

$$\widehat{A}(0)\psi_0^{2,1} + \partial_\lambda \widehat{A}(0)\psi_0^{1,1} + \frac{1}{2}\partial_\lambda^2 \widehat{A}(0)\psi_0^{0,1} = 0,$$

которое эквивалентно следующей задаче:

$$(\psi_0^{2,1})_{\varphi\varphi} = 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \tag{3.18}$$

$$\psi_0^{2,1}\big|_{\varphi=0} = \psi_0^{2,1}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad (\psi_0^{2,1})_\varphi\big|_{\varphi=0} = (\psi_0^{2,1})_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}. \tag{3.19}$$

Подставляя общее решение $\psi_0^{2,1}(\varphi) = c_0 + c_1\varphi + \varphi^2/2$ уравнения (3.18) в (3.19), получим

$$2\pi c_1 + \frac{4\pi^2}{2} = 0, \quad 2\pi = 0.$$

Эта система несовместна; следовательно, второго присоединенного вектора для собственного значения $\lambda_0 = 0$ не существует.

2. Рассмотрим собственное значение $\lambda_k = ik$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Собственному значению λ_k соответствуют два линейно независимых собственных вектора

$$\psi_k^{0,1} = \sin k\varphi, \quad \psi_k^{0,2} = \cos k\varphi$$

(каждый из которых определен с точностью до постоянного множителя). Следовательно, геометрическая кратность собственного значения λ_k равна 2.

Согласно (3.8) присоединенный вектор $\psi_k^{1,j}(\varphi)$ $(j=1,2)$ должен удовлетворять уравнению

$$\widehat{A}(ik)\psi_k^{1,j} + \partial_\lambda \widehat{A}(ik)\psi_k^{0,j} = 0,$$

которое эквивалентно следующей задаче:

$$(\psi_k^{1,j})_{\varphi\varphi} + k^2\psi_k^{1,j} = i2k\psi_k^{0,j}, \quad 0<\varphi<2\pi, \tag{3.20}$$

$$\psi_k^{1,j}\big|_{\varphi=0} = \psi_k^{1,j}\big|_{\varphi=2\pi}, \quad (\psi_k^{1,j})_\varphi\big|_{\varphi=0} = (\psi_k^{1,j})_\varphi\big|_{\varphi=2\pi}. \tag{3.21}$$

Подставляя общее решение

$$\psi_k^{1,1}(\varphi) = a_k^1\cos k\varphi + b_k^1\sin k\varphi - i\varphi\cos k\varphi \quad \text{при} \quad j=1,$$

$$\psi_k^{1,2}(\varphi) = a_k^2\cos k\varphi + b_k^2\sin k\varphi + i\varphi\sin k\varphi \quad \text{при} \quad j=2$$

уравнения (3.20) в (3.21), получим

$$0=-i2\pi, \quad 0=0 \qquad \text{при} \quad j=1,$$

$$0=0, \qquad 0=i2\pi k \quad \text{при} \quad j=2.$$

Эти системы несовместны при $k=\pm1,\pm2,\ldots$; следовательно, присоединенных векторов для собственных значений $\lambda_k = ik$, $k=\pm1,\pm2,\ldots$, не существует.

Пример 3.2. Пусть $v\in H_1^2(\mathbb{R}^2)$ — решение уравнения (3.12) с правой частью $f_0\in H_1^0(\mathbb{R}^2)\cap H_{-\varepsilon}^0(\mathbb{R}^2)$, где $0<\varepsilon<1$. Изучим асимптотику решения v. Используя результаты, полученные в примере 3.1, и лемму 3.2 при $a_1=1$, $l_1=0$, $h_1=0$ и $a_2=-\varepsilon$, $l_2=0$, $h_2=-1-\varepsilon$, получим

$$v(y) = (\alpha_1^{0,1}\sin\varphi + \alpha_1^{0,2}\cos\varphi)r + w(y) = \alpha_1^{0,1}y_2 + \alpha_1^{0,2}y_1 + w(y), \quad y\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \tag{3.22}$$

где $w\in H_{-\varepsilon}^2(\mathbb{R}^2)$, а $\alpha_1^{0,j} = \alpha_1^{0,j}(f_0)$ — линейные ограниченные функционалы на пространстве $H_1^0(\mathbb{R}^2)\cap H_{-\varepsilon}^0(\mathbb{R}^2)$. Отметим, что эти функционалы могут быть найдены в явном виде (см. [5, § 5]).

3.3. Продолжим изучение эллиптических задач в $\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{P}$ при $n\geqslant 3$, где

$$\mathcal{P} = \big\{x=(y,z)\in\mathbb{R}^n : y=0,\ z\in\mathbb{R}^{n-2}\big\}.$$

Пусть

$$A = A(D_y, D_z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}D_y^\alpha D_z^\beta$$

есть однородный собственно эллиптический оператор с постоянными комплексными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$Av = f_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{P}, \tag{3.23}$$

где $f_0\in H_a^l(\mathbb{R}^n)$. Легко видеть, что оператор $A: H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n)\to H_a^l(\mathbb{R}^n)$ ограничен при любом $a\in\mathbb{R}$ и любом целом $l\geqslant 0$.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 3.1. *Пусть $a\in\mathbb{R}$, и пусть $l\geqslant 0$ — целое число. Тогда оператор*

$$A: H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n)\to H_a^l(\mathbb{R}^n)$$

не является изоморфизмом.

Для доказательства теоремы 3.1 применим преобразование Фурье $F_{z\to\eta}$ по переменной $z \in \mathbb{R}^{n-2}$. Тогда уравнение (3.23) примет вид

$$A(D_y,\eta)\widetilde{v}(y,\eta) = \widetilde{f}_0(y,\eta), \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-2}, \tag{3.24}$$

где

$$\widetilde{v}(y,\eta) = F_{z\to\eta}v = (2\pi)^{-(n-2)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} v(y,z)e^{-i(\eta,z)}dz.$$

Положим

$$Y = |\eta|y, \quad \omega = \frac{\eta}{|\eta|}, \quad V(Y,\eta) = |\eta|^{2m}\widetilde{v}(y,\eta),$$

$F_0(Y,\eta) = \widetilde{f}_0(y,\eta)$. Тогда уравнение (3.24) запишется в виде

$$A(D_Y,\omega)V(Y,\eta) = F_0(Y,\eta), \quad y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \omega \in S^{n-3}. \tag{3.25}$$

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$, действующий по формуле

$$A(\omega)V = A(D_Y,\omega)V(Y), \quad \omega \in S^{n-3}. \tag{3.26}$$

Пусть $A(0) : H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to H_a^l(\mathbb{R}^2)$ — линейный ограниченный оператор, заданный формулой

$$A(0)v = A(D_y,0)v(y).$$

Очевидно, оператор $A(0)$ собственно эллиптичен. Запишем его в полярных координатах:

$$A(0) = r^{-2m}\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, rD_r).$$

Рассмотрим оператор-функцию $\widehat{A}(\lambda) : W_{2\pi}^{l+2m}(0,2\pi) \to W_{2\pi}^l(0,2\pi)$, заданную формулой

$$\widehat{A}(\lambda)w = \widehat{A}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w(\varphi).$$

Спектральные свойства оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$ описаны в п. 3.1.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству теоремы 2.3 в [19, гл. 6, § 2] (см. также теорему 4.2 в [22]).

Лемма 3.3. *Оператор $A(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$ фредгольмов при всех $\omega \in S^{n-3}$ в том и только том случае, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$.*

Однако ниже будет показано (см. лемму 3.10), что оператор $A(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$ не является изоморфизмом ни при каких $a \in \mathbb{R}$, $l \geqslant 0$ и $\omega \in S^{n-3}$.

Имеет место следующий результат (см. [22]).

Лемма 3.4. *Оператор $A : H_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_a^l(\mathbb{R}^n)$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда оператор $A(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$ — изоморфизм.*

Используя лемму 3.4 и тот факт, что оператор $A(\omega)$ не является изоморфизмом, мы докажем теорему 3.1. Таким образом, надо показать, что оператор $A(\omega)$ не является изоморфизмом ни при каких $a \in \mathbb{R}$, $l \geqslant 0$ и $\omega \in S^{n-3}$. Для этого мы предварительно получим априорные оценки решений уравнения (3.25) и изучим сопряженные операторы.

Доказательство априорных оценок в пространствах $E_a^l(\mathbb{R}^2)$ будет основано на следующей хорошо известной априорной оценке в пространствах Соболева (см., например, теорему 15.3 в [25] и комментарий после нее).

Лемма 3.5. *Пусть $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ — такие ограниченные области, что $\overline{Q_1} \subset Q_2$. Предположим, что оператор*

$$\mathcal{A} = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами $a_\alpha(x)$ собственно эллиптичен в $\overline{Q_2}$. Тогда для любой функции $u \in W^{l+2m}(Q_2)$ выполнена следующая оценка:

$$\|u\|_{W^{l+2m}(Q_1)} \leqslant c\big(\|\mathcal{A}u\|_{W^l(Q_2)} + \|u\|_{L_2(Q_2)}\big), \tag{3.27}$$

где $c > 0$ зависит от Q_1, Q_2 и M,

$$M = \max_{|\beta| \leqslant l_0} \max_{|\alpha| \leqslant 2m} \max_{x \in \overline{Q_2}} \big|D^\beta a_\alpha(x)\big|, \quad l_0 = \max\{l, 1\},$$

но не зависит от u.

Замечание 3.3. Из теоремы 3.1 в [16, гл. 2, § 3] вытекает справедливость оценки (3.27) со слагаемым $\|u\|_{W^{l+2m-1}(Q_2)}$ в правой части вместо $\|u\|_{L_2(Q_2)}$. Чтобы получить оценку (3.27), следует воспользоваться техникой, описанной в [18, гл. 5].

Обозначим через $W^k_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ пространство, состоящее из таких распределений v в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, что $\psi v \in W^k(\mathbb{R}^2)$ для всех $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Лемма 3.6. *Пусть $v \in W^{l+2m}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cap E^0_{a-l-2m}(\{|y| < 1\})$ и $A(\omega)v \in E_a^l(\mathbb{R}^2)$ при некотором $\omega \in S^{n-3}$. Тогда $v \in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ и*

$$\|v\|_{E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)} \leqslant c\big(\|A(\omega)v\|_{E_a^l(\mathbb{R}^2)} + \|v\|_{E^0_{a-l-2m}(\{|y|<R\})}\big), \tag{3.28}$$

где $R, c > 0$ не зависят от v и ω.

Доказательство. 1. Обозначим

$$Q_1^s = \{y \in \mathbb{R}^2 : 2^s < |y| < 2^{s+1}\}$$

и

$$Q_2^s = \{y \in \mathbb{R}^2 : 2^{s-1} < |y| < 2^{s+2}\}, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Очевидно, $\overline{Q_1^s} \subset Q_2^s$. Из соотношения $v \in W^{l+2m}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ следует, что $v \in H_a^{l+2m}(Q_2^s) \cap E_a^{l+2m}(Q_2^s)$ для любого s (в определении пространств $H_a^{l+2m}(Q_2^s)$ и $E_a^{l+2m}(Q_2^s)$ полагаем $\rho(y) = |y|$). Вначале докажем, что

$$\|v\|^2_{E_a^{l+2m}(Q_1^s)} \leqslant k_1\big(\|A(\omega)v\|^2_{E_a^l(Q_2^s)} + \|v\|^2_{E^0_{a-l-2m}(Q_2^s)}\big), \quad s \leqslant 0, \tag{3.29}$$

где $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от v, ω и s.

Положим $y' = 2^{-s}y$. Очевидно, $y' \in Q_j^0$, если $y \in Q_j^s$, $j = 1, 2$; $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Следовательно, вводя функции $v^s(y') = v(2^s y')$ и применяя лемму 3.5, получим, что для $s \leqslant 0$

$$\|v\|^2_{H_a^{l+2m}(Q_1^s)} \leqslant k_2 \sum_{|\alpha| \leqslant l+2m} 2^{2s(a-l-2m+|\alpha|)} \big\|D_y^\alpha v(y)\big\|^2_{L_2(Q_1^s)} =$$

$$= k_2 \sum_{|\alpha|\leqslant l+2m} 2^{2s(a-l-2m+1)} \left\| D^\alpha_{y'} v^s(y') \right\|^2_{L_2(Q_1^0)} \leqslant$$

$$\leqslant k_3 2^{2s(a-l-2m+1)} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant l} \left\| D^\alpha_{y'} A(D_{y'}, 2^s\omega) v^s(y') \right\|^2_{L_2(Q_2^0)} + \|v^s(y')\|^2_{L_2(Q_2^0)} \right) =$$

$$= k_3 \left(\sum_{|\alpha|\leqslant l} 2^{2s(a-l+|\alpha|)} \left\| D^\alpha_y A(D_y, \omega) v(y) \right\|^2_{L_2(Q_2^s)} + 2^{2s(a-l-2m)} \|v(y)\|^2_{L_2(Q_2^s)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant k_4 \left(\|A(D_y, \omega)v\|^2_{H^l_a(Q_2^s)} + \|v\|^2_{H^0_{a-l-2m}(Q_2^s)} \right).$$

Последняя оценка эквивалентна (3.29).

2. Осталось показать, что оценка в (3.29) верна при $s > 0$. Для этого воспользуемся леммой 3.5, полагая $\mathcal{A} = A(D_{y'}, D_z)$, $u(y', z) = \exp\{i2^s(\omega, z)\} v^s(y')$ и

$$Q_j = Q_j^0 \times \left\{ z \in \mathbb{R}^{n-2} : |z_k| < j,\ k = 1, \dots, n-2 \right\}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда получим

$$\sum_{\nu=0}^{l+2m} 2^{2s\nu} \|v^s(y')\|^2_{W^{l+2m-\nu}(Q_1^0)} \leqslant k_5 \left(\sum_{\nu=0}^{l} 2^{2s\nu} \left\| A(D_{y'}, 2^s\omega) v^s(y') \right\|^2_{W^{l-\nu}(Q_2^0)} + \|v^s(y')\|^2_{L_2(Q_2^0)} \right). \tag{3.30}$$

Так как $s > 0$, то неравенство (3.30) эквивалентно следующему:

$$2^{2s(l+2m-1)} \|v(y)\|^2_{W^{l+2m}(Q_1^s)} \leqslant k_6 \left(2^{2s(l+2m-1)} \left\| A(D_y, \omega) v(y) \right\|^2_{W^l(Q_2^s)} + 2^{-2s} \|v(y)\|^2_{L_2(Q_2^s)} \right).$$

Умножая обе части этого неравенства на $2^{2s(a-l-2m+1)}$, имеем

$$\|v\|^2_{E_a^{l+2m}(Q_1^s)} \leqslant k_1 \left(\|A(\omega)v\|^2_{E_a^l(Q_2^s)} + 2^{2s(a-l-2m)} \|v\|^2_{L_2(Q_2^s)} \right), \quad s > 0. \tag{3.31}$$

Суммируя (3.29) и (3.31) соответственно по $s = 0, -1, -2, \dots$ и $s = 1, 2, \dots$ и выбирая достаточно большое $R > 0$, получаем (3.28). ■

Докажем при помощи лемм 3.2 и 3.6 следующий результат о гладкости решений уравнения

$$A(\omega)v = f_0, \quad \omega \in S^{n-3}. \tag{3.32}$$

Лемма 3.7. *Пусть замкнутая полоса, ограниченная прямыми* $\operatorname{Im}\lambda = a_1 + 1 - l_1 - 2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda = a_2 + 1 - l_2 - 2m$, *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{A}(\lambda)$. *Предположим, что* $v \in E^{l_1+2m}_{a_1}(\mathbb{R}^2)$ *— решение уравнения* (3.32) *при некотором* $\omega \in S^{n-3}$ *с правой частью* $f_0 \in E^{l_1}_{a_1}(\mathbb{R}^2) \cap E^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда* $v \in E^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. 1. Рассмотрим такую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, что $\eta(r) = 0$ при $r \leqslant 1$ и $\eta(r) = 1$ при $r \geqslant 2$. Через $[A(\omega), \eta]$ обозначим коммутатор $A(\omega)$ и η. Очевидно, $\operatorname{supp}[A(\omega), \eta]v \subset \{y \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant |y| \leqslant 2\}$. Следовательно,

$$A(\omega)(\eta v) = \eta f_0 + [A(\omega), \eta]v \in E^{l_1}_{a_1}(\mathbb{R}^2) \cap E^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2), \tag{3.33}$$

поскольку $v \in W^{l+2m}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$, где $l = \max\{l_1, l_2\}$ (в силу теоремы 3.2 в [16, гл. 2, § 3]).

С другой стороны, функция ηv равна нулю вблизи начала координат, и, следовательно, $\eta v \in E^0_{a_2-l_2-2m}(\{|y| < R\})$ для любого $R > 0$. Отсюда, из соотношения (3.33) и леммы 3.6 заключаем, что $\eta v \in E^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$.

2. Так как $\operatorname{supp} A(\omega)((1-\eta)v) \subset \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| \leqslant 2\}$, то аналогично (3.33) получаем

$$A(\omega)((1-\eta)v) \in H^{l_1}_{a_1}(\mathbb{R}^2) \cap H^{l_2}_{a_2}(\mathbb{R}^2). \tag{3.34}$$

Следовательно, используя лемму 3.2 и замечание 3.2, получим, что [1] $(1-\eta)v \in H^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$; значит, $(1-\eta)v \in E^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$.

Таким образом, $v \in E^{l_2+2m}_{a_2}(\mathbb{R}^2)$. ■

3.4. В этом пункте мы рассмотрим сопряженные операторы. Введем оператор

$$A'(\omega) = A'(D_y, \omega) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} \overline{a_{\alpha\beta}}\, \omega^\beta D_y^\alpha.$$

Оператор $A'(D_y, \omega)$ формально сопряжен с $A(D_y, \omega)$ относительно формулы Грина, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} A(D_y, \omega)u\bar{v}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} u\overline{A'(D_y, \omega)v}\, dy, \quad \omega \in \mathbb{R}^{n-2}, \tag{3.35}$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Рассмотрим неограниченные операторы

$$\mathcal{A}(\omega) : \mathrm{D}(\mathcal{A}(\omega)) \subset E^0_{b-2m}(\mathbb{R}^2) \to E^0_b(\mathbb{R}^2),$$
$$\mathcal{A}(\omega)v = A(D_y, \omega)v, \quad v \in \mathrm{D}(\mathcal{A}(\omega)) = E^{2m}_b(\mathbb{R}^2)$$

и

$$\mathcal{A}'(\omega) : \mathrm{D}(\mathcal{A}'(\omega)) \subset E^0_{-b}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{2m-b}(\mathbb{R}^2),$$
$$\mathcal{A}'(\omega)v = A'(D_y, \omega)v, \quad v \in \mathrm{D}(\mathcal{A}'(\omega)) = E^{2m}_{2m-b}(\mathbb{R}^2).$$

Лемма 3.8. *При любом $\omega \in S^{n-3}$ оператор $\mathcal{A}'(\omega)$ сопряжен с $\mathcal{A}(\omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^2)$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}^*(\omega)$ сопряженный с $\mathcal{A}(\omega)$ оператор. Так как множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ всюду плотно в пространствах $E^{2m}_b(\mathbb{R}^2)$ и $E^{2m}_{2m-b}(\mathbb{R}^2)$, тождество (3.35) справедливо для всех $u \in E^{2m}_b(\mathbb{R}^2)$ и $v \in E^{2m}_{2m-b}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, $\mathcal{A}'(\omega) \subset \mathcal{A}^*(\omega)$.

Докажем обратное включение. Пусть $v \in \mathrm{D}(\mathcal{A}^*(\omega)) \subset E^0_{-b}(\mathbb{R}^2)$. Поскольку $\mathcal{A}^*(\omega)v \in E^0_{2m-b}(\mathbb{R}^2) \subset L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, то из теоремы 3.2 в [16, гл. 2, § 3] следует, что $v \in W^{2m}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Следовательно, по лемме 3.6 $v \in E^{2m}_{2m-b}(\mathbb{R}^2)$; значит, $\mathcal{A}^*(\omega) \subset \mathcal{A}'(\omega)$. ■

Подставим $u = u_1$ и $v = r^{2m-2}v_1$ в тождество (3.35) при $\omega = 0$ и положим $\tau = \ln r$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\limits_0^{2\pi} \Big(\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, D_\tau)u_1\overline{v_1} - u_1\overline{\widehat{A}'(\varphi, D_\varphi, D_\tau - 2i(m-1))v_1} \Big)\, d\varphi = 0 \tag{3.36}$$

[1] Поскольку оператор $A(\omega)$ содержит младшие члены, необходимо применить лемму 3.2 несколько раз, ср. [13, 14].

для всех

$$u_1, v_1 \in \Big\{ u \in C_0^\infty([0, 2\pi] \times \mathbb{R}) : D_\varphi^j u\big|_{\varphi=0} = D_\varphi^j u\big|_{\varphi=2\pi},\ j = 0, 1, \ldots \Big\},$$

где оператор $\widehat{A}'(\varphi, D_\varphi, D_\tau)$ определяется аналогично оператору $\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, D_\tau)$.

Рассмотрим такие функции $\psi, \widehat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, что

$$\psi(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad |\tau| > 1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\, d\tau = 1,$$

$$\widehat{\psi}(\tau) = 1 \quad \text{при} \quad |\tau| < 1, \qquad \widehat{\psi}(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad |\tau| > 2.$$

Подставив $u_1 = e^{i\lambda\tau}\psi(\tau)u_2(\varphi)$ и $v_1 = e^{i\overline{\lambda}\tau}\widehat{\psi}(\tau)v_2(\varphi)$ в (3.36), получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \Big(\widehat{A}(\varphi, D_\varphi, \lambda)u_2\overline{v_2} - u_2\overline{\widehat{A}'(\varphi, D_\varphi, \overline{\lambda} - 2i(m-1))v_2} \Big)\, d\varphi = 0 \tag{3.37}$$

для всех $u_2, v_2 \in C_{2\pi}^\infty[0, 2\pi]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Наряду с оператор-функцией $\widehat{A}(\lambda)$ рассмотрим оператор-функцию

$$\widehat{A}'(\lambda) : W_{2\pi}^{2m}(0, 2\pi) \to L_2(0, 2\pi),$$

заданную формулой

$$\widehat{A}'(\lambda)w = \widehat{A}'(\varphi, D_\varphi, \lambda)w.$$

Введем также неограниченные операторы

$$\widehat{\mathcal{A}}(\lambda), \widehat{\mathcal{A}}'(\lambda) : \mathrm{D}(\widehat{\mathcal{A}}(\lambda)) = \mathrm{D}(\widehat{\mathcal{A}}'(\lambda)) \subset L_2(0, 2\pi) \to L_2(0, 2\pi)$$

по формулам

$$\widehat{\mathcal{A}}(\lambda)w = \widehat{A}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w, \quad w \in \mathrm{D}(\widehat{\mathcal{A}}(\lambda)) = W_{2\pi}^{2m}(0, 2\pi),$$
$$\widehat{\mathcal{A}}'(\lambda)w = \widehat{A}'(\varphi, D_\varphi, \lambda)w, \quad w \in \mathrm{D}(\widehat{\mathcal{A}}'(\lambda)).$$

Аналогично лемме 3.8 мы заключаем из (3.37), что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\widehat{\mathcal{A}}'(\overline{\lambda} - 2i(m-1))$ сопряжен с оператором $\widehat{\mathcal{A}}(\lambda)$ относительно скалярного произведения в $L_2(0, 2\pi)$. Отсюда и из того факта, что оператор $\widehat{A}(\lambda)$ фредгольмов и $\operatorname{ind} \widehat{A}(\lambda) = 0$, получаем следующий результат.

Лемма 3.9. *Число λ является собственным значением оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда число $\overline{\lambda} - 2i(m-1)$ является собственным значением оператор-функции $\widehat{A}'(\lambda)$.*

3.5. В этом пункте, используя результаты пп. 3.1–3.4, мы докажем следующий результат.

Лемма 3.10. *Пусть $a \in \mathbb{R}$, $l \geqslant 0$ целое и $\omega \in S^{n-3}$. Тогда оператор*

$$A(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to E_a^l(\mathbb{R}^2)$$

не является изоморфизмом.

Предварительно докажем две леммы об обратимости оператора $A(\omega)$. Совместно со свойствами сопряженного оператора эти леммы позволят доказать лемму 3.10 и, следовательно, теорему 3.1.

Лемма 3.11. *Предположим, что полоса* $a_2+1-l-2m<\operatorname{Im}\lambda<a_1+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{A}(\lambda)$. *Если оператор* $A(\omega)$, $\omega\in S^{n-3}$, *— изоморфизм при некотором* $a=a_0\in(a_2,a_1)$, *то он изоморфизм при любом* $a\in(a_2,a_1)$.

Доказательство. 1. Достаточно доказать, что $\mathcal{N}(A(\omega))=\{0\}$ и $\mathcal{R}(A(\omega))=E_b^l(\mathbb{R}^2)$ при любом $a=b\in(a_2,a_1)$. Из леммы 3.7 следует, что если $v\in\mathcal{N}(A(\omega))$ при $a=b$, $a_2<b<a_1$, то $v\in\mathcal{N}(A(\omega))$ при $a=a_0$. Следовательно, $v=0$, т. е. $\mathcal{N}(A(\omega))=\{0\}$ при $a=b$.

2. Рассмотрим уравнение (3.32) с правой частью $f_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ и $a=a_0$. По предположению это уравнение имеет единственное решение $v\in E_{a_0}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$. В силу леммы 3.7 имеем $v\in E_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$. Из леммы 3.3 следует, что множество $\mathcal{R}(A(\omega))$ (при $a=b$) замкнуто в пространстве $E_b^l(\mathbb{R}^2)$. Отсюда и из плотности множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ в пространстве $E_b^l(\mathbb{R}^2)$ вытекает, что $\mathcal{R}(A(\omega))=E_b^l(\mathbb{R}^2)$. ■

Лемма 3.12. *Предположим, что на каждой из прямых* $\operatorname{Im}\lambda=a_2+1-l-2m$ *и* $\operatorname{Im}\lambda=a_1+1-l-2m$ *имеется собственное значение оператор-функции* $\widehat{A}(\lambda)$, *а в полосе* $a_2+1-l-2m<\operatorname{Im}\lambda<a_1+1-l-2m$ *собственных значений оператор-функции* $\widehat{A}(\lambda)$ *нет. Если оператор* $A(\omega)$, $\omega\in S^{n-3}$, *является изоморфизмом при некотором* $a=a_0\in(a_2,a_1)$, *то он не изоморфизм при* $a\notin(a_2,a_1)$.

Доказательство. 1. Докажем, что $\dim\mathcal{N}(A(\omega))>0$ для $a>a_1$. Положим

$$u=r^{i\lambda_0}\psi^0(\varphi),$$

где λ_0 — такое собственное значение оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$, что $\operatorname{Im}\lambda_0=a_1+1-l-2m$, а $\psi^0(\varphi)$ — соответствующий собственный вектор. В этом случае

$$A(0)u=0. \tag{3.38}$$

Следовательно,

$$A(\omega)((1-\eta)u)=[A(0),(1-\eta)]u+(A(\omega)-A(0))((1-\eta)u)\equiv F,$$

где η — та же функция, что в доказательстве леммы 3.7.

Заметим, что

$$(1-\eta)u\notin E_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2)\quad\text{для любого}\quad b\leqslant a_1, \tag{3.39}$$

$$(1-\eta)u\in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)\quad\text{для любого}\quad a>a_1. \tag{3.40}$$

Очевидно,

$$F\in E_b^l(\mathbb{R}^2)\quad\text{для любого}\quad b\in(a_1-1,+\infty). \tag{3.41}$$

По лемме 3.11 уравнение (3.32) с правой частью $f_0=F$ имеет единственное решение $v\in E_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$, где $b\in(a_2,a_1)\cap(a_1-1,+\infty)$. Отсюда, в частности, следует, что функция $w=(1-\eta)u-v$ не равна тождественно нулю (в силу (3.39)).

Далее, используя соотношение $v\in E_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2)\subset E_b^0(\mathbb{R}^2)$ и учитывая (3.41), из леммы 3.6 получим, что $v\in E_{b+l+2m}^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$. Повторяя эти рассуждения, за конечное число шагов получаем включение $v\in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ для любого $a>a_1$. Отсюда и из (3.40) вытекает, что $w\in E_a^{l+2m}(\mathbb{R}^2)$ для $a>a_1$; следовательно, $w\in\mathcal{N}(A(\omega))$ для $a>a_1$.

2. Пусть теперь $a < a_2$. Если прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ содержит собственное значение оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$, то утверждение данной леммы следует из леммы 3.3. Поэтому предположим, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$. Тогда множество $\mathcal{R}(A(\omega))$ замкнуто как в случае оператора $A(\omega) : E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$, так и в случае оператора $A(\omega) : E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2) \to E^l_a(\mathbb{R}^2)$.

2a. Вначале докажем, что $d = \dim \mathcal{R}(A(\omega))^\perp > 0$ в случае оператора

$$A(\omega) : E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2).$$

В силу леммы 3.9 прямые $\operatorname{Im}\lambda = l + 2m - a_2 + 1 - 2m$ и $\operatorname{Im}\lambda = l + 2m - a_1 + 1 – 2m$ содержат собственные значения оператор-функции $\widehat{A}'(\lambda)$, тогда как в полосе $l + 2m - a_1 + 1 – 2m < \operatorname{Im}\lambda < l + 2m - a_2 + 1 – 2m$ собственных значений оператор-функции $\widehat{A}'(\lambda)$ нет. По предположению оператор $A(\omega) : E^{l+2m}_{a_0}(\mathbb{R}^2) \to E^l_{a_0}(\mathbb{R}^2)$, $\omega \in S^{n-3}$, — изоморфизм. Следовательно, в силу лемм 3.6 и 3.3 оператор $A(\omega) : E^{2m}_{a_0-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a_0-l}(\mathbb{R}^2)$ — также изоморфизм. Тогда из леммы 3.8 вытекает, что оператор

$$A'(\omega) : E^{2m}_{l+2m-a_0}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{l+2m-a_0}(\mathbb{R}^2)$$

является изоморфизмом. Повторяя часть 1 доказательства для оператора $A'(\omega)$, получим, что $\dim \mathcal{N}(A'(\omega)) > 0$ в случае оператора $A'(\omega) : E^{2m}_b(\mathbb{R}^2) \to E^0_b(\mathbb{R}^2)$, где $b > l + 2m - a_2$. Следовательно, по лемме 3.8 $d > 0$ для оператора $A(\omega) : E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2) \to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$, где $2m - (a - l) > l + 2m - a_2$ (т. е. $a < a_2$).

2b. Осталось доказать, что $\dim \mathcal{R}(A(\omega))^\perp = d$ для оператора

$$A(\omega) : E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2) \to E^l_a(\mathbb{R}^2).$$

Согласно части 1b доказательства уравнение (3.32) с правой частью $f_0 \in E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ имеет решение $v \in E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда

$$(f_0, f_j)_{E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad j = 1, \dots, d, \tag{3.42}$$

где $f_1, \dots, f_d \in E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ — линейно независимые функции. Из леммы 3.6 следует, что условия (3.42) необходимы и достаточны для того, чтобы уравнение (3.32) с правой частью $f_0 \in E^l_a(\mathbb{R}^2)$ имело решение $v \in E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)$. Из неравенства Шварца и ограниченности вложения $E^l_a(\mathbb{R}^2) \subset E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ получим

$$\left|(f_0, f_j)_{E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)}\right| \leqslant \|f_0\|_{E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)} \|f_j\|_{E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)} \leqslant c\|f_0\|_{E^l_a(\mathbb{R}^2)} \|f_j\|_{E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)},$$

где $c > 0$ не зависит от f_0. Следовательно, по теореме Рисса существуют такие функции $F_j \in E^l_a(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, \dots, d$, что

$$(f_0, f_j)_{E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)} = (f_0, F_j)_{E^l_a(\mathbb{R}^2)} \quad \text{для всех} \quad f_0 \in E^l_a(\mathbb{R}^2),$$

причем функции F_j линейно независимы. Таким образом, $\dim \mathcal{R}(A(\omega))^\perp$ в пространстве $E^l_a(\mathbb{R}^2)$ равно d. ■

Доказательство леммы 3.10. 1. Вначале покажем, что оператор $A(\omega) : E^{l+2m}_{l+m}(\mathbb{R}^2) \to E^l_{l+m}(\mathbb{R}^2)$ не является изоморфизмом ни при каком $l \geqslant 0$. Для этого докажем, что число $\lambda_0 = i(1 - m)$ есть собственное значение оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$. Рассмотрим однородный полином $q(y)$ порядка $m-1$ и запишем его в полярных координатах: $q(y)=r^{m-1}\widetilde{q}(\varphi)$, где $\widetilde{q}\in C^\infty_{2\pi}[0,2\pi]$. Имеем

$$0=A(D_y,0)q(y)=r^{-2m}\widehat{A}(\varphi,D_\varphi,rD_r)(r^{m-1}\widetilde{q}(\varphi))=r^{-m-1}\widehat{A}(\varphi,D_\varphi,i(1-m))\widetilde{q}(\varphi).$$

Следовательно, $\lambda_0=i(1-m)$ — собственное значение и $\widetilde{q}(\varphi)$ — соответствующий ему собственный вектор. Так как прямая $\operatorname{Im}\lambda=1-m=m+1{-}2m$ содержит собственное значение λ_0, то в силу леммы 3.3 оператор $A(\omega):E^{l+2m}_{l+m}(\mathbb{R}^2)\to E^l_{l+m}(\mathbb{R}^2)$ не фредгольмов. Следовательно, он и не изоморфизм.

2. Теперь докажем, что оператор $A(\omega):E^{2m}_a(\mathbb{R}^2)\to E^0_a(\mathbb{R}^2)$ не является изоморфизмом ни при каком a, $a\neq m$. Предположим противное: пусть $A(\omega)$ — изоморфизм для некоторого $a\neq m$. Тогда в силу леммы 3.8

$$\text{оператор}\quad A'(\omega):E^{2m}_{2m-a}(\mathbb{R}^2)\to E^0_{2m-a}(\mathbb{R}^2)\ \text{— изоморфизм.}\tag{3.43}$$

Заметим, что

$$\overline{A(D_y,\omega)u(y)}\equiv\bigl[A'(D_{y'},\omega)w(y')\bigr]\big|_{y'=-y},$$

где $w(y')=\overline{u(-y')}$. Отсюда и из (3.43) следует, что оператор $A(\omega):E^{2m}_{2m-a}(\mathbb{R}^2)\to E^0_{2m-a}(\mathbb{R}^2)$ — также изоморфизм. Мы пришли к противоречию с леммой 3.12, поскольку полоса, ограниченная прямыми $\operatorname{Im}\lambda=a{+}1{-}2m$ и $\operatorname{Im}\lambda=(2m{-}a){+}1{-}2m$, содержит собственное значение $\lambda_0=i(1-m)$ оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$.

3. Наконец, докажем, что оператор $A(\omega):E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)\to E^l_a(\mathbb{R}^2)$ не является изоморфизмом ни при каких $\omega\in S^{n-3}$, $l>0$ и $a\neq l+m$. Предположим противное: пусть он изоморфизм для некоторых $\omega\in S^{n-3}$, $l>0$ и $a\neq l+m$. Тогда в силу леммы 3.3 прямая $\operatorname{Im}\lambda=a+1-l-2m$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{A}(\lambda)$. Следовательно, согласно части 2 доказательства $\dim\mathcal{N}(A(\omega))>0$ или $\dim\mathcal{R}(A(\omega))^\perp>0$ для оператора $A(\omega):E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2)\to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть для указанного оператора $A(\omega)$ выполнено $\dim\mathcal{N}(A(\omega))>0$. Тогда существует такая функция $v\in E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2)$, что $v\neq0$ и $A(\omega)v=0$. По лемме 3.6 $v\in E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)$; следовательно, для оператора $A(\omega):E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)\to E^l_a(\mathbb{R}^2)$ имеем $\dim\mathcal{N}(A(\omega))>0$. Получили противоречие.

Пусть $\dim\mathcal{R}(A(\omega))^\perp>0$ для оператора $A(\omega):E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2)\to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$. Так как оператор $A(\omega):E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)\to E^l_a(\mathbb{R}^2)$ — изоморфизм, то уравнение

$$A(\omega)v=f_0$$

имеет решение $v\in E^{l+2m}_a(\mathbb{R}^2)\subset E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ для любой правой части $f_0\in E^l_a(\mathbb{R}^2)$. С другой стороны, множество $E^l_a(\mathbb{R}^2)$ всюду плотно в пространстве $E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$, а образ $\mathcal{R}(A(\omega))$ оператора $A(\omega):E^{2m}_{a-l}(\mathbb{R}^2)\to E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$ замкнут в $E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, $\mathcal{R}(A(\omega))=E^0_{a-l}(\mathbb{R}^2)$, что противоречит предположению $\dim\mathcal{R}(A(\omega))^\perp>0$. ■

Теорема 3.1 вытекает из лемм 3.4 и 3.10.

§ 4. Априорные оценки в ограниченных областях

4.1. В этом параграфе будут получены априорные оценки решений нелокальных эллиптических задач в весовых пространствах. Используя априорные оценки и правый регуляризатор (который будет построен в следующем параграфе), мы докажем фредгольмовость соответствующего нелокального оператора. Вначале обсудим выбор весовых пространств. Для каждого множества $\mathcal{K}_j$, $j = 1, 2, 3$, можно считать, что множество K из определения пространств $H_a^k(Q) = H_a^k(Q, K)$ и $H_a^{k-1/2}(\Gamma) = H_a^{k-1/2}(\Gamma, K)$ либо содержит множество $\mathcal{K}_j$, либо не содержит. Иными словами, мы либо допускаем наличие особенностей вблизи множества $\mathcal{K}_j$ у решений и правых частей нелокальной задачи в ограниченной области, либо не допускаем. Если $\mathcal{K}_j \subset K$, то модельные операторы, соответствующие точкам множества $\mathcal{K}_j$ и играющие фундаментальную роль при доказательстве априорных оценок и построении правого регуляризатора, следует рассматривать в весовых пространствах; в противном случае эти операторы должны действовать в пространствах Соболева.

Рассмотрим множество $\mathcal{K}_1 = \partial Q \setminus \bigcup_i \Gamma_i$ точек сопряжения краевых условий. В работах [21, 31] (см. также [7]) показано, что обобщенные решения нелокальных задач могут иметь степенные особенности вблизи множества $\mathcal{K}_1$. Поэтому будем всегда предполагать, что $\mathcal{K}_1 \subset K$; при этом соответствующие модельные операторы в двугранных углах будут действовать в весовых пространствах.

Рассмотрим множество $\mathcal{K}_3 \subset Q$. Из теоремы 3.1 следует, что модельный оператор, действующий в весовых пространствах в $\mathbb{R}^n$, не является изоморфизмом (более того, можно показать, что он даже не фредгольмов в весовых пространствах, ср. замечание 2.2 в [19, гл. 6, § 2]). Поэтому будем предполагать, что правые части и решения нелокальных задач в ограниченных областях не имеют особенностей внутри области Q; при этом соответствующие модельные операторы будут действовать в пространствах Соболева. Если $\mathcal{K}_3 = \varnothing$, это допущение не вызывает никаких сложностей. Однако если $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, то возникает следующая трудность. Рассмотрим такую точку $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$, что $\omega_{is}(g) \in \mathcal{K}_3$. Пусть функция u принадлежит весовому пространству H_a^{l+2m} вблизи точки g и пространству Соболева W^{l+2m} вблизи точки $\omega_{is}(g)$. Так как преобразование ω_{is} невырождено, то функция $(B_{i\mu s}(x, D)u)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i}$, входящая в нелокальные условия (1.4), принадлежит пространству $W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}$ вблизи точки g; однако, вообще говоря, она не принадлежит пространству $H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}$ вблизи точки g. Следовательно, соответствующий нелокальный оператор не будет ограничен в весовых пространствах. Чтобы преодолеть это препятствие, мы дополнительно предположим, что $a > l + 2m - 1$, если $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$. В этом случае справедливо вложение $W^{l+2m-m_{i\mu}-1/2} \subset H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}$ в окрестности точки $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ (см. ниже лемму 4.5).

Рассмотрим множество $\mathcal{K}_2 \subset \bigcup_i \Gamma_i$. Мы можем либо включать множество $\mathcal{K}_2$ в множество K, либо не включать. В первом случае мы будем считать, что модельные локальные операторы действуют в весовых пространствах, а во втором случае — в пространствах Соболева. Преимущество «весового» случая в том, что мы можем изучать нелокальные задачи во всей шкале весовых пространств (зависящих от параметра $a \in \mathbb{R}$). Однако недостаток заключается в том, что нам придется накладывать некоторые ограничения на расположение собственных значений вспомогательной задачи с параметром λ и требовать обратимости вспомогательного оператора с параметром $\omega \in S^{n-3}$ (что часто трудно проверить), см. теорему 2.3. Преимущество «соболевского» случая в том, что модельные операторы являются изоморфизмами без дополнительных предположений. Недостаток же заключается в том, что если $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$, то мы вынуждены считать $a > l + 2m - 1$ даже тогда, когда $\mathcal{K}_3 = \varnothing$ (по причине, которую мы описали выше в случае $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$).

Следующее условие согласования учитывает различные ситуации.

Условие 4.1 (условие согласования).

1. *Если* $\mathcal{K}_3 = \varnothing$, *то либо*

   а) $a \in \mathbb{R}$ *и* $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, *либо*

   б) $a > l + 2m - 1$ *и* $K = \mathcal{K}_1$.

2. *Если* $\mathcal{K}_3 \neq \varnothing$, *то* $a > l + 2m - 1$ *и либо*

   а) $K = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, *либо*

   б) $K = \mathcal{K}_1$.

В заключение этого пункта докажем два вспомогательных результата. Для любого множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ и любого $\delta > 0$ обозначим

$$\mathcal{M}^\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) < \delta\}.$$

Лемма 4.1. *Пусть* $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *— такая функция, что* $\zeta(x) = 0$ *при* $x \in \mathcal{K}_1$. *Тогда*

$$\|\zeta v\|_{H_a^l(Q)} \leqslant c\delta \|v\|_{H_a^l(Q)} \tag{4.1}$$

для всех $v \in H_a^l(Q)$ *таких, что* $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q} \cap \mathcal{K}_1^\delta$, *где* $c > 0$ *не зависит от* δ *и* v.

Доказательство. Так как $\zeta(x) = 0$ при $x \in \mathcal{K}_1$, то в силу формулы Тейлора

$$|\zeta(x)| \leqslant k_1 \delta, \quad x \in \mathcal{K}_1^\delta. \tag{4.2}$$

Используя (4.2), получим

$$\begin{aligned}
\|\zeta v\|^2_{H_a^l(Q)} &= \sum_{|\beta| \leqslant l} \int\limits_{Q \cap \mathcal{K}_1^\delta} \rho^{2(a-l+|\beta|)} |\zeta D^\beta v|^2\, dx + \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=1}^{l} \sum_{|\beta| \leqslant l - |\alpha|} \int\limits_{Q \cap \mathcal{K}_1^\delta} \rho^{2|\alpha|} \rho^{2(a-l+|\beta|)} |D^\alpha \zeta D^\beta v|^2\, dx \leqslant \\
&\leqslant \sum_{|\beta| \leqslant l} k_1^2 \delta^2 \int\limits_{Q \cap \mathcal{K}_1^\delta} \rho^{2(a-l+|\beta|)} |D^\beta v|^2\, dx + \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=1}^{l} \sum_{|\beta| \leqslant l - |\alpha|} k_2 \delta^{2|\alpha|} \int\limits_{Q \cap \mathcal{K}_1^\delta} \rho^{2(a-l+|\beta|)} |D^\beta v|^2\, dx,
\end{aligned}$$

откуда следует (4.1). ■

Лемма 4.2. *Пусть* $\zeta_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *— семейство таких функций, что* $\operatorname{supp} \zeta_\delta \subset \mathcal{K}_1^\delta$ *и*

$$\left| D^\beta \zeta_\delta(x) \right| \leqslant c_1 \delta^{-|\beta|}, \quad x \in Q, \quad |\beta| \leqslant l, \tag{4.3}$$

где $c_1 > 0$ *не зависит от* δ. *Тогда*

$$\|\zeta_\delta u\|_{H_a^l(Q)} \leqslant c_2 \|u\|_{H_a^l(Q)} \tag{4.4}$$

для всех $u \in H_a^l(Q)$, *где* $c_2 > 0$ *не зависит от* δ *и* u.

Доказательство. Используя (4.3), получим

$$\|\zeta_\delta u\|^2_{H^l_a(Q)} = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant l} \int\limits_{Q\cap\mathcal{K}_1^\delta} \rho^{2|\alpha|}\rho^{2(a-l+|\beta|)}\left|D^\alpha\zeta_\delta D^\beta u\right|^2 dx \leqslant k\sum_{|\beta|\leqslant l}\int\limits_{Q\cap\mathcal{K}_1^\delta}\rho^{2(a-l+|\beta|)}|D^\beta u|^2\,dx.$$

Отсюда следует (4.4). ■

Замечание 4.1. Леммы 4.1 и 4.2 остаются справедливыми при замене пространств $H^l_a(Q)$ на пространства $H^{l-1/2}_a(\Gamma)$, где Γ — такое гладкое $(n-1)$-мерное многообразие, что $\overline{\Gamma}\subset\overline{Q}$, и $l-1/2\geqslant 1/2$. Для доказательства достаточно воспользоваться соответствующими операторами продолжения, которые действуют ограниченным образом из $H^{l-1/2}_a(\Gamma)$ в $H^l_a(Q)$.

4.2. Введем линейный оператор

$$\mathbf{L}=\{A, B_{i\mu}\},$$

отвечающий задаче (1.3), (1.4). В силу леммы 4.6 (см. ниже) оператор $\mathbf{L}: H^{l+2m}_a(Q)\to\mathcal{H}^l_a(Q,\Gamma)$ ограничен.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.4 *и* 4.1. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda=a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *ни для какой точки* $g\in K$ *и* $\dim\mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega))=\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega))=0$ *для любых* $g\in K$ *и* $\omega\in S^{n-3}$. *Тогда для всех* $u\in H^{l+2m}_a(Q)$ *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{H^{l+2m}_a(Q)}\leqslant c\big(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{H}^l_a(Q,\Gamma)}+\|u\|_{H^{l+2m-1}_a(Q)}\big), \tag{4.5}$$

где $c>0$ *не зависит от* u.

Обозначим через A^0 и $B^0_{i\mu s}$ главные однородные части операторов $A(x,D)$ и $B_{i\mu s}(x,D)$ соответственно. Положим

$$B^0_{i\mu}u=B^0_{i\mu0}u\big|_{\Gamma_i}.$$

Для каждого $\varepsilon>0$ рассмотрим такую функцию $\xi=\xi_\varepsilon\in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, что $\xi(x)=1$ при $x\in\mathcal{K}_1^{\varepsilon/2}$, $\operatorname{supp}\xi(x)\subset\mathcal{K}_1^\varepsilon$ и

$$|D^\beta\xi(x)|\leqslant k_1\varepsilon^{-|\beta|},\quad x\in Q, \tag{4.6}$$

где $k_1=k_1(\beta)>0$ не зависит от ε. Так как ω_{is} — C^∞-диффеоморфизмы, то

$$\operatorname{supp}\xi(\omega_{is}(x))\subset\mathcal{K}_1^{\varepsilon''}, \tag{4.7}$$

где $\varepsilon''=\varepsilon''(i,s,\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to0$ $(i=1,\dots N_1;\ s=0,\dots,S_i)$.

Будем считать число $\varepsilon>0$ настолько малым, что

$$0<\varepsilon''<\frac{\operatorname{dist}(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2\cup\mathcal{K}_3)}{4}. \tag{4.8}$$

Далее будут сделаны дополнительные предположения относительно числа ε (см. доказательства лемм 4.3 и 5.2).

Рассмотрим операторы

$$B^1_{i\mu}u=\sum_{s=1}^{S_i}\big(B^0_{i\mu s}(x,D)(\xi u)\big)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i},$$

$$B^2_{i\mu}u=\sum_{s=1}^{S_i}\big(B^0_{i\mu s}(x,D)((1-\xi)u)\big)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i},$$

$$B^3_{i\mu}=B_{i\mu}-B^1_{i\mu}-B^2_{i\mu},\quad A^1=A-A^0.$$

Операторы $B^1_{i\mu}$ соответствуют нелокальным слагаемым с носителем вблизи множества $\mathcal{K}_1$, а операторы $B^2_{i\mu}$ — нелокальным слагаемым с носителем вне множества $\mathcal{K}_1$; операторы $B^3_{i\mu}$ и A^1 соответствуют младшим членам (компактным возмущениям).

Обозначим $B^k=\{B^k_{i\mu}\}_{i,\mu}$, $k=0,\dots,3$, $B=B^0+\ldots+B^3$ и $C=B^0+B^1$.

Наряду с оператором $\mathbf{L}=(A,B)$ рассмотрим ограниченные операторы

$$\mathbf{L}^0=(A^0,B^0):H^{l+2m}_a(Q)\to\mathcal{H}^l_a(Q,\Gamma),\quad \mathbf{L}^1=(A^0,C):H^{l+2m}_a(Q)\to\mathcal{H}^l_a(Q,\Gamma).$$

Вначале мы выведем априорную оценку (аналогичную оценке (4.5)) для оператора $\mathbf{L}^1$ с достаточно малым ε. Затем установим фундаментальное свойство операторов $B^2_{i\mu}$, связанное с тем фактом, что операторы $B^2_{i\mu}$ отвечают нелокальным членам с носителем вне множества $\mathcal{K}_1$. Используя эти результаты, мы докажем теорему 4.1.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда существует такое число* $\varepsilon>0$, *что для всех* $u\in H^{l+2m}_a(Q)$ *справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^{l+2m}_a(Q)}\leqslant c\big(\|\mathbf{L}^1u\|_{\mathcal{H}^l_a(Q,\Gamma)}+\|u\|_{H^{l+2m-1}_a(Q)}\big),\tag{4.9}$$

где $c>0$ *не зависит от* u.

Доказательство. 1. Для любой точки $g\in\mathcal{K}_1$ обозначим через $\mathcal{O}(g)$ орбиту точки g, см. п. 1.1. По условию 1.3 орбита $\mathcal{O}(g)$ состоит из конечного числа точек g_j, $j=1,\dots,N(g)$. Обозначим

$$\chi_m=\chi_m(g)=\min_{j,\rho,k,s}\chi_{j\rho ks}\quad\big(j,k=1,\dots,N(g);\quad \rho=1,2;\quad s=0,1,\dots,S_{j\rho k}\big).$$

Очевидно, $\chi_m\leqslant 1$. Пусть $x'\to x(g,j)$ — преобразование переменных, обратное к преобразованию $x\to x'(g,j)$ из п. 1.1. Преобразование $x'\to x(g,j)$ отображает всякий шар $B_{\chi_m\delta}$ на некоторую окрестность $\widehat{B}_\delta(g_j)$ точки g_j так, что диаметр окрестности $\widehat{B}_\delta(g_j)$ стремится к нулю при $\delta\to0$. (Отметим, что окрестность $\widehat{B}_\delta(g_j)$ — не обязательно шар.) Для каждой орбиты $\mathcal{O}(g)$ рассмотрим настолько малое число $\delta=\delta(g)>0$, что $\widehat{B}_\delta(g_j)\subset\widehat{V}(g_j)$, $j=1,\dots,N(g)$, и оператор $\mathcal{L}''_g$ обратим для $\delta=\delta(g)$ (см. следствие 2.1).

Ясно, что объединение

$$\bigcup_{g\in\mathcal{K}_1}\bigcup_{j=1}^{N(g)}\widehat{B}_{\delta(g)}(g_j)$$

покрывает множество $\mathcal{K}_1$. Выберем такое конечное число точек $g^t\in\mathcal{K}_1$, $t=1,\dots,T$, что

$$\mathcal{K}_1\subset\bigcup_{t,j}\widehat{B}_{\delta(g^t)}(g^t_j).$$

Рассмотрим функции $\varphi_j^t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, образующие разбиение единицы для множества $\mathcal{K}_1$, подчиненное покрытию $\{\widehat{B}_{\delta(g^t)}(g_j^t)\}$. Теперь перейдем от разбиения единицы $\{\varphi_j^t\}$ к другому разбиению единицы $\{\xi_j^t\}$ такому, что каждая функция ξ_j^t, будучи записанной в локальных координатах $x' = (y', z')$, не зависит от y' в окрестности ребра $\mathcal{P}$. Для этого обозначим функцию $\varphi_j^t(x)$, записанную в координатах $x' = (y', z')$, через $\varphi_j^t(y', z')$. Очевидно, существует такое число $a' < \chi_m \delta(g^t)$, что

$$\varphi_j^t(0, z') = 0$$

при $a' < |z'| < \chi_m \delta(g^t)$. Без ограничения общности предположим, что функция $\varphi_j^t(0, z')$, будучи продолженной нулем при $|z'| \geqslant \chi_m \delta(g^t)$, остается бесконечно дифференцируемой.

Обозначим через $\psi^t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую функцию, что $\psi^t(y') = 1$ при $|y'| < \varepsilon_1'$ и $\psi_j^t(y') = 0$ при $|y'| > 2\varepsilon_1'$, где число $\varepsilon_1' > 0$ настолько мало, что

$$\left\{(2\varepsilon_1')^2 + (a')^2\right\}^{1/2} < \chi_m \delta(g^t), \tag{4.10}$$

и ε_1' не зависит от ε.

Положим

$$\xi_j^t(y', z') = \psi^t(y')\varphi_j^t(0, z').$$

В силу (4.10) имеем

$$\operatorname{supp} \xi_j^t(y', z') \subset B_{\chi_m \delta(g^t)}. \tag{4.11}$$

Ясно также, что

$$\xi_j^t(y', z') = \varphi_j^t(0, z'), \quad |y'| < \varepsilon_1'. \tag{4.12}$$

Через $\xi_j^t(x)$ обозначим функции $\xi_j^t(y', z')$, записанные в переменных $x = x(g^t, j)$. Так как $\operatorname{supp} \xi_j^t(x) \subset \widehat{B}_{\delta(g^t)}(g_j^t)$, мы можем продолжить каждую из функций $\xi_j^t(x)$ нулем вне окрестности $\widehat{B}_{\delta(g^t)}(g_j^t)$, причем продолженные функции будут бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{R}^n$.

Очевидно,

$$\sum_{j,t} \xi_j^t(x) = \sum_{j,t} \varphi_j^t(x) = 1, \quad x \in \mathcal{K}_1. \tag{4.13}$$

2. Рассмотрим произвольную функцию $u \in H_a^{l+2m}(Q)$. Если $g_j^t \in \overline{\Gamma_i}$ и $x \in \widehat{V}(g_j^t)$, то из условия 1.3 следует, что $\omega_{is}(x) \in V(g_p^t)$ для некоторого $1 \leqslant p \leqslant N(g^t)$. Обозначим $u_p^t(x) = u(x)$ при $x \in Q \cap V(g_p^t)$. Тогда $u_p^t(\omega_{is}(x)) = u(\omega_{is}(x))$ при $x \in Q \cap \widehat{V}(g_j^t)$. Пусть $x \to x'(g^t, j)$ — преобразование переменных из п. 1.1, соответствующее орбите $\mathcal{O}(g^t)$. Обозначим функции ξ_j^t и u_j^t, записанные в новых координатах x', тем же символом (в дальнейшем это не приведет к двусмысленности) и положим $u^t = (u_1^t, \ldots, u_{N(g^t)}^t)$. Применяя следствие 2.1, получим

$$\left\|\xi_q^t u\right\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1 \left\|\xi_q^t u_q^t\right\|_{H_a^{l+2m}(\Theta_q)} \leqslant k_1 \left\|\xi_q^t u^t\right\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta)} \leqslant k_2 \left\|\mathcal{L}''_{g^t}(\xi_q^t u^t)\right\|_{\mathcal{H}_a^l(\Theta,\Gamma)},$$

где $q = 1, \ldots, N(g^t)$ и $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от u.

Из (4.11) вытекает, что

$$\xi_q^t(\mathcal{G}_{j\rho ks} y', z') = 0, \quad |x'| > \delta(g^t).$$

Следовательно, $\mathcal{L}''_{g^t}(\xi^t_q u^t) = \mathcal{L}'_{g^t}(\xi^t_q u^t)$; используя формулу Лейбница, получим

$$\|\xi^t_q u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_2 \|\mathcal{L}'_{g^t}(\xi^t_q u^t)\|_{\mathcal{H}_a^l(\Theta,\Gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant k_3 \Bigg(\|\mathbf{L}^1 u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)} + \sum_{h=1,2} \sum_{j,\rho,\mu} \sum_{(k,s)\neq(j,0)} \|\Psi^h_{j\rho\mu ks}\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \Bigg), \tag{4.14}$$

где

$$\Psi^1_{j\rho\mu ks} = \big(B^0_{j\rho\mu ks}(x', D_{y'}, D_{z'})((1-\xi)\xi^t_q u^t_k)\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y', z')\big|_{\Gamma_{j\rho}},$$
$$\Psi^2_{j\rho\mu ks} = \big(\xi^t_q(\mathcal{G}_{j\rho ks}y', z') - \xi^t_q(y', z')\big)\big(B^0_{j\rho\mu ks}(x', D_{y'}, D_{z'})(\xi u^t_k)\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y', z')\big|_{\Gamma_{j\rho}}.$$

Обозначим через $\xi^t_{qk}(x)$ функции $\xi^t_q(y', z')$, записанные в переменных $x = x(g^t, k)$. Очевидно, $\operatorname{supp}\xi^t_{qk} \subset \widehat{B}_{\delta(g^t)}(g^t_k)$. Переходя к переменным $\widehat{x} = \omega_{is}(x)$, оценим норму $\Psi^1_{j\rho\mu ks}$ следующим образом:

$$\|\Psi^1_{j\rho\mu ks}\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \leqslant k_4 \|B^0_{i\mu s}(\widehat{x}, D)((1-\xi)\xi^t_{qk}u)(\widehat{x})\big|_{\omega_{is}(\Gamma_i)}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\omega_{is}(\Gamma_i))}.$$

Положим

$$Q_b = \{x \in Q : \operatorname{dist}(x, \partial Q) > b\},$$

где $b > 0$. Так как $\widehat{B}_{\delta(g^t)}(g^t_k) \subset \widehat{V}(g^t_k)$, то в силу условия 1.3 множество

$$\Omega_0 = \big(\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \widehat{B}_{\delta(g^t)}(g^t_k)\big) \setminus \mathcal{K}_1^{\varepsilon/2}$$

не пересекается ни с $\mathcal{K}_1$, ни с $\mathcal{K}_2$. Следовательно, существует такое число $b = b(\varepsilon) > 0$, что $\Omega_0 \subset Q_b$. Поскольку

$$\operatorname{supp}\big((1-\xi)\xi^t_{qk}\big)\big|_{\omega_{is}(\Gamma_i)} \subset \Omega_0 \subset Q_b,$$

используя последнее неравенство, эквивалентность норм в пространствах $H_a^{l+2m}(Q_b)$ и $W^{l+2m}(Q_b)$ и лемму 3.5, получим

$$\|\Psi^1_{j\rho\mu ks}\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \leqslant k_5\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_b)} \leqslant k_6\|u\|_{W^{l+2m}(Q_b)} \leqslant$$
$$\leqslant k_7\big(\|A^0 u\|_{W^l(Q_{b/2})} + \|u\|_{L_2(Q_{b/2})}\big) \leqslant k_8\big(\|A^0 u\|_{H_a^l(Q)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big). \tag{4.15}$$

Теперь оценим норму $\Psi^2_{j\rho\mu ks}$. Согласно (4.12) имеем

$$\xi^t_q(\mathcal{G}_{j\rho ks}y', z') - \xi^t_q(y', z') = 0, \quad |y'| < \frac{\varepsilon'_1}{\max\{1, \chi_{j\rho ks}\}}.$$

Следовательно, аналогично (4.15) получаем

$$\|\Psi^2_{j\rho\mu ks}\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \leqslant k_9\big(\|A^0 u\|_{H_a^l(Q)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big). \tag{4.16}$$

Из (4.14), (4.15) и (4.16) вытекает, что

$$\|\xi^t_q u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_{10}\big(\|\mathbf{L}^1 u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big). \tag{4.17}$$

Полагая
$$\xi_0(x) = \sum_{t,q} \xi_q^t(x) \tag{4.18}$$
и пользуясь неравенством (4.17), имеем
$$\|\xi_0 u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_{11}\big(\|\mathbf{L}^1 u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big) \tag{4.19}$$
(заметим, что константа k_{11} зависит от ε).

3. Используя разбиение единицы, теорему 2.3, формулу Лейбница и априорные оценки решений эллиптических задач строго внутри области Q и вблизи гладкой части границы, получим
$$\|(1-\xi_0)u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c_1\big(\big\|(1-\xi_0)\mathbf{L}^0 u\big\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big) \leqslant$$
$$\leqslant c_2\left(\big\|(1-\xi_0)\mathbf{L}^1 u\big\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \sum_{i,\mu}\big\|(1-\xi_0)B_{i\mu}^1 u\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\right), \tag{4.20}$$
где $c_1, c_2, \ldots > 0$ не зависят от u и ε (напомним, что функция ξ_0 не зависит от ε).

Из (4.13) и (4.18) следует, что $1 - \xi_0(x) = 0$ при $x \in \mathcal{K}_1$. С другой стороны, $\operatorname{supp}\xi(\omega_{is}(x)) \subset \mathcal{K}_1^{\varepsilon''}$ в силу (4.7). Поэтому, применяя лемму 4.1 и замечание 4.1 и учитывая, что ω_{is} — C^∞-диффеоморфизмы, имеем
$$\big\|(1-\xi_0)B_{i\mu}^1 u\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_3\varepsilon''\big\|B_{i\mu}^1 u\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_4\varepsilon''\|\xi u\|_{H_a^{l+2m}(Q)}.$$
Далее, пользуясь соотношением $\operatorname{supp}\xi \subset \mathcal{K}_1^{\varepsilon}$, неравенствами (4.6) и леммой 4.2, из последней оценки получим, что
$$\big\|(1-\xi_0)B_{i\mu}^1 u\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_5\varepsilon''\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)}.$$
Отсюда и из (4.20) следует, что
$$\big\|(1-\xi_0)u\big\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c_6\big(\|\mathbf{L}^1 u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \varepsilon''\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big). \tag{4.21}$$
Выбирая число ε в определении функции ξ настолько малым, что $c_6\varepsilon'' = 1/2$, и пользуясь неравенствами (4.19) и (4.21), получаем нужное нам утверждение. ■

4.3. В этом пункте будет доказана теорема 4.1. Вначале сформулируем некоторые результаты, касающиеся свойств весовых пространств, которые потребуются ниже.

Лемма 4.4. *Пусть $Q_1 \subset \mathbb{R}^n$ — такая ограниченная область, что $\overline{Q} \subset Q_1$. Предположим, что множество K_1 в определении пространства $H_a^k(Q_1) = H_a^k(Q_1, K_1)$ совпадает с множеством K в определении пространства $H_a^k(Q) = H_a^k(Q, K)$. Тогда для любой функции $v \in H_a^k(Q)$ существует такая функция $v_1 \in H_a^k(Q_1)$, что $v_1(x) = v(x)$ при $x \in Q$ и*
$$\|v_1\|_{H_a^k(Q_1)} \leqslant c\|v\|_{H_a^k(Q)},$$
где $c > 0$ не зависит от v.

Лемма 4.4 доказана в [29, § 3].

Лемма 4.5. *Пусть $a > l + 2m - 1$. Предположим, что число $\delta > 0$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\mathcal{K}_1^\delta \cap (\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3) = \varnothing$, *если* $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \neq \varnothing$,

2. $\mathcal{K}_2^\delta \cap (\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_2) = \varnothing$, *если* $\mathcal{K}_2 \ne \varnothing$,
3. $\mathcal{K}_3^\delta \subset Q$ *и* $\mathcal{K}_3^\delta \cap (\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_3) = \varnothing$, *если* $\mathcal{K}_3 \ne \varnothing$,
4. *число* $\delta > 0$ *произвольно, если* $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 = \varnothing$.

Тогда

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q)} \leqslant c_1 \|u\|_{W^{l+2m}(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q)} \tag{4.22}$$

для всех $u \in W^{l+2m}(\mathcal{K}_j^\delta \cap Q)$, *если* $\mathcal{K}_j \ne \varnothing$ $(j = 1, 2)$, *и*

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(\mathcal{K}_3^\delta)} \leqslant c_2 \|u\|_{W^{l+2m}(\mathcal{K}_3^\delta)} \tag{4.23}$$

для всех $u \in W^{l+2m}(\mathcal{K}_3^\delta)$, *если* $\mathcal{K}_3 \ne \varnothing$, *где* $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* u.

Лемма 4.5 доказана в [29] (см. также лемму 5.2 в [12]).

Следующий результат получен в [29, § 3]. Он выражает тот факт, что операторы $B_{i\mu}^2$ соответствуют нелокальным членам с носителем вне множества $\mathcal{K}_1$. Для удобства читателя мы приведем доказательство.

Лемма 4.6. *Пусть выполнено условие* 4.1. *Тогда существует такое число* $\varkappa = \varkappa(\varepsilon) > 0$, *что*

$$\big\|B_{i\mu}^2 u\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_1 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}})} \tag{4.24}$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}})$; *кроме того, существует такое число* $\sigma = \sigma(\varkappa)$, *что*

$$\big\|B_{i\mu}^2 u\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}})} \leqslant c_2 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)} \tag{4.25}$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q_\sigma)$; *здесь* $i = 1, \dots, N_0$; $\mu = 1, \dots, m$; $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* u.

Доказательство. 1. Достаточно показать, что неравенства (4.24) и (4.25) выполнены в случае, когда выражение $B_{i\mu}^2 u$ заменено функцией

$$\varphi_{i\mu s} = \big(B_{i\mu s}^0(x, D)((1-\xi)u)\big)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i}.$$

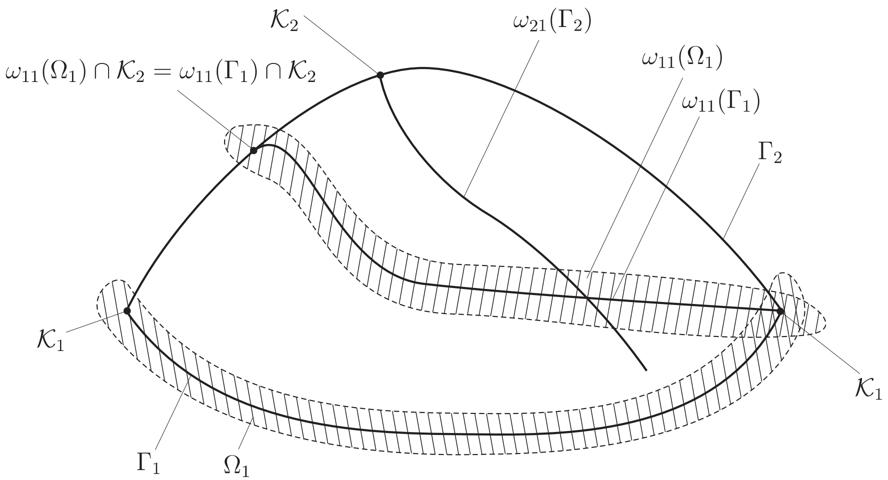

Рис. 3. Область Q

2. Пусть $\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_2 \neq \varnothing$. Без ограничения общности предположим, что $\overline{\omega_{is}(\Omega_i)} \cap \mathcal{K}_2 = \overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_2$, см. рис. 3.

Обозначим через U продолжение функции $(1-\xi)u$ в $Q \cup \omega_{is}(\Omega_i)$, определенное в лемме 4.4 и удовлетворяющее неравенству

$$\|U\|_{H_a^{l+2m}(Q\cup\omega_{is}(\Omega_i))} \leqslant k_1\|(1-\xi)u\|_{H_a^{l+2m}(Q)}, \tag{4.26}$$

где $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от u.

Положим

$$\Phi_{i\mu s}(x) = (B^0_{i\mu s}(x, D)U)(\omega_{is}(x)), \quad x \in \Omega_i.$$

Очевидно,

$$\varphi_{i\mu s} = \Phi_{i\mu s}\big|_{\Gamma_i}.$$

Вводя новые переменные $\widehat{x} = \omega_{is}(x)$, применяя лемму 4.5 (если $\mathcal{K}_j \neq \varnothing$ и $\mathcal{K}_j \not\subset K$, $j = 2, 3$) и пользуясь неравенством (4.26), получим

$$\begin{gathered}\|\varphi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant \|\Phi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}}(\Omega_i)} \leqslant \\ \leqslant k_2\big\|B^0_{i\mu s}(\widehat{x}, D)U(\widehat{x})\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}}(\omega_{is}(\Omega_i))} \leqslant k_3\|(1-\xi)u\|_{H_a^{l+2m}(Q)}.\end{gathered} \tag{4.27}$$

Таким образом, полагая $2\varkappa = \varepsilon/2$, видим, что неравенство (4.27) влечет (4.24).

Так как преобразования ω_{is} непрерывны и $\omega_{is}(\Gamma_i) \subset Q$, то $\omega_{is}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{K}_1^\varkappa}) \subset Q_{2\sigma}$ для достаточно малого $\sigma > 0$. Рассмотрим такую функцию $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\eta(x) = 1$ при $x \in Q_{2\sigma}$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin Q_\sigma$.

Будем считать, что функция ηu продолжена нулем вне Q. Положим

$$\Psi_{i\mu s}(x) = \big(B^0_{i\mu s}(x, D)(\eta(1-\xi)u)\big)(\omega_{is}(x)), \quad x \in \Omega_i.$$

Очевидно,

$$\varphi_{i\mu s}\big|_{\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{K}_1^\varkappa}} = \Psi|_{\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{K}_1^\varkappa}}.$$

Следовательно, применяя лемму 4.5 в том случае, когда $\mathcal{K}_j \neq \varnothing$ и $\mathcal{K}_j \not\subset K$, $j = 2, 3$, получаем

$$\begin{gathered}\|\varphi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i\setminus\overline{\mathcal{K}_1^\varkappa})} \leqslant \|\Psi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}}(\Omega_i)} \leqslant \\ \leqslant k_4\big\|B^0_{i\mu s}(\widehat{x}, D)(\eta(1-\xi)u)(\widehat{x})\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}}(\omega_{is}(\Omega_i)))} \leqslant k_5\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)}.\end{gathered}$$

3. Если $\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_2 = \varnothing$, то $\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \setminus \mathcal{K}_1^{\varepsilon/2} \subset Q$. Следовательно, аналогично предыдущему получим

$$\|\varphi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_5\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)}.$$

Неравенства (4.24) и (4.25) доказаны. ■

Доказательство теоремы 4.1. 1. Рассмотрим произвольную функцию $u \in H_a^{l+2m}(Q)$. В силу леммы 4.3

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1\left(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \|A^1u\|_{H_a^l(Q)} + \sum_{i,\mu}\sum_{k=2,3}\big\|B^k_{i\mu}u\big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\right), \tag{4.28}$$

где $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от u.

Из ограниченности области Q и леммы 4.5 следует, что

$$\|A^1u\|_{H_a^l(Q)} + \sum_{i,\mu} \left\|B^3_{i\mu}u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_2\|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}. \tag{4.29}$$

2. Рассмотрим такую функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что

$$\eta(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}}, \quad \eta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathcal{K}_1^{\varkappa},$$

где $\varkappa > 0$ — константа из леммы 4.6.

Из неравенства (4.24), леммы 4.3 и формулы Лейбница получаем

$$\left\|B^2_{i\mu}u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_3\|\eta u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant k_4\Bigg(\|\eta \mathbf{L}^1u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)} + \sum_{i,\mu}\sum_{s\neq 0}\|\Psi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\omega_{is}(\Gamma_i))}\Bigg), \tag{4.30}$$

где

$$\Psi_{i\mu s} = \big(\eta(x) - \eta(\omega_{is}^{-1}(x))\big)\big(B^0_{i\mu s}(x,D)(\xi u)\big)(x)\big|_{\omega_{is}(\Gamma_i)}.$$

Очевидно, что если $\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_1^\varepsilon = \varnothing$, то $\Psi_{i\mu s} = 0$. Пусть $\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_1^\varepsilon \neq \varnothing$. Покажем, что

$$\operatorname{supp}\Psi_{i\mu s} \subset Q_b \tag{4.31}$$

для некоторого $b > 0$. Действительно,

$$\omega_{is}(\Gamma_i) \subset Q \quad \text{и} \quad \operatorname{supp}\xi \subset \overline{\mathcal{K}_1^\varepsilon}. \tag{4.32}$$

Следовательно, в силу (4.8) достаточно доказать, что $\Psi_{i\mu s}(x) = 0$, когда x принадлежит некоторой окрестности множества $\mathcal{K}_1$. Так как

$$\eta(x) = 0, \quad x \in \overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_1^\varkappa, \tag{4.33}$$

то остается показать, что

$$\eta(\omega_{is}^{-1}(x)) = 0, \quad x \in \overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_1^d, \tag{4.34}$$

для достаточно малого $d > 0$. Заметим, что если $\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_1 = \varnothing$, то (4.31) следует из (4.8) и (4.32). Если $\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \mathcal{K}_1 \neq \varnothing$ для некоторых i и s, то $\mathcal{K}_{1\nu} \subset \overline{\omega_{is}(\Gamma_i)}$ для некоторого ν и $\omega_{is}^{-1}(\mathcal{K}_{1\nu}) \subset \mathcal{K}_1$. Следовательно, существует настолько малое число $d > 0$, что $\mathcal{K}_{1\nu}^d \subset \omega_{is}(\Omega_i)$ и $\omega_{is}^{-1}(\mathcal{K}_{1\nu}^d) \subset \mathcal{K}_1^\varkappa$ (в силу гладкости преобразований ω_{is}^{-1}). Очевидно, в этом случае выполнено соотношение (4.34). Таким образом, получаем (4.31).

Из (4.31) и леммы 3.5 следует, что

$$\|\Psi_{i\mu s}\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\omega_{is}(\Gamma_i))} \leqslant k_5\big(\|Au\|_{H_a^l(Q)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big).$$

Используя это неравенство, из (4.30) выводим

$$\left\|B^2_{i\mu}u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_6\Bigg(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)} + \sum_{i,\mu}\left\|\eta B^2_{i\mu}u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\Bigg). \tag{4.35}$$

В силу (4.25), леммы 3.5 и формулы Лейбница имеем

$$\left\|\eta B^2_{i\mu}u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_7\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)} \leqslant k_8\big(\|Au\|_{H_a^l(Q)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big). \tag{4.36}$$

Из оценок (4.28), (4.29), (4.35) и (4.36) получаем требуемую оценку (4.5). ∎

§ 5. Фредгольмова разрешимость нелокальных эллиптических задач

5.1. В настоящем параграфе будет доказан один из основных результатов работы, касающийся фредгольмовой разрешимости нелокальных эллиптических задач в весовых пространствах. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.4 *и* 4.1. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *ни при каком* $g \in K$ *и* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega)) = 0$ *для любых* $g \in K$ *и* $\omega \in S^{n-3}$. *Тогда оператор* $\mathbf{L} : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$ *фредгольмов.*

В силу теоремы 16.4 в [15] (о компактных возмущениях фредгольмовых операторов) достаточно доказать теорему 5.1 и остальные утверждения этого параграфа в случае, когда $A^1 = 0$ и $B^3 = 0$. Таким образом, всюду в этом параграфе считаем, что $A^1 = 0$ и $B^3 = 0$.

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда* $\operatorname{ind}\mathbf{L} = \operatorname{ind}\mathbf{L}^1$.

Доказательство. Введем оператор

$$L_t u = \{A^0 u,\ Cu + (1-t)B^2 u\}.$$

Имеем $L_0 = \mathbf{L}$ (поскольку $A^1 = 0$ и $B^3 = 0$) и $L_1 = \mathbf{L}^1$.

По теореме 5.1 операторы L_t фредгольмовы при любом t. Далее, для любых t_0 и t выполнена следующая оценка:

$$\|L_t u - L_{t_0} u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant k_{t_0}|t-t_0| \cdot \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)},$$

где $k_{t_0} > 0$ не зависит от t. Следовательно, в силу теоремы 16.2 в [15] $\operatorname{ind} L_t = \operatorname{ind} L_{t_0}$ для любого t из достаточно малой окрестности точки t_0. Поскольку t_0 произвольно, объединение всех таких окрестностей образует покрытие отрезка $[0,1]$. Выбирая конечное подпокрытие, получаем соотношения $\operatorname{ind}\mathbf{L} = \operatorname{ind} L_0 = \operatorname{ind} L_1 = \operatorname{ind}\mathbf{L}^1$. ■

Для доказательства теоремы 5.1 построим правый регуляризатор оператора $\mathbf{L}$.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда существует такой линейный ограниченный оператор* $\mathbf{R} : \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) \to H_a^{l+2m}(Q)$, *что*

$$\mathbf{LR} = \mathbf{I} + \mathbf{T},$$

где $\mathbf{I}$ *и* $\mathbf{T}$ *— соответственно единичный и компактный операторы в пространстве* $\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$.

Доказательство теоремы 5.1 Предположим, что теорема 5.2 верна. Согласно лемме 3.5 в [13] оператор вложения $H_a^{l+2m}(Q)$ в $H_a^{l+2m-1}(Q)$ компактен. Следовательно, согласно теореме 7.1 в [15] и теореме 4.1 $\dim \mathcal{N}(\mathbf{L}) < \infty$ и образ $\mathcal{R}(\mathbf{L})$ замкнут в пространстве $\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$. С другой стороны, из теоремы 15.2 в [15] и теоремы 5.2 следует, что $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{L}) < \infty$. ■

Таким образом, осталось доказать теорему 5.2.

5.2. Вначале докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 5.1. *Пусть* H *— гильбертово пространство и* I *— единичный оператор в пространстве* H. *Пусть* M_ε *и* S_ε, $\varepsilon > 0$, *— такие семейства ограниченных в пространстве* H *операторов, что*

$$\|M_\varepsilon\| \leqslant c_1\varepsilon, \quad \|S_\varepsilon\| \leqslant c_2, \tag{5.1}$$

где $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* ε, *и операторы* S_ε^2 *компактны. Тогда операторы*

$$L_\varepsilon = I + M_\varepsilon + S_\varepsilon$$

фредгольмовы при любых достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Для доказательства леммы построим правый и левый регуляризаторы для оператора L_ε. Имеем

$$L_\varepsilon(I - (M_\varepsilon + S_\varepsilon)) = I - M_\varepsilon^2 - M_\varepsilon S_\varepsilon - S_\varepsilon M_\varepsilon - S_\varepsilon^2.$$

Из (5.1) следует, что

$$\left\| M_\varepsilon^2 + M_\varepsilon S_\varepsilon + S_\varepsilon M_\varepsilon \right\| \leqslant c_3 \varepsilon,$$

где $c_3 > 0$ не зависит от ε. Отсюда и из теоремы 16.2 в [15] вытекает, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ операторы $I - M_\varepsilon^2 - M_\varepsilon S_\varepsilon - S_\varepsilon M_\varepsilon$ фредгольмовы. Далее, используя компактность операторов S_ε^2 и применяя теорему 16.4 в [15], видим, что операторы $L_\varepsilon(I - (M_\varepsilon + S_\varepsilon))$ также фредгольмовы. Теперь из теоремы 15.2 в [15] следует существование таких ограниченных операторов $R_{1\varepsilon}$ и компактных операторов $T_{1\varepsilon}$, что

$$L_\varepsilon(I - (M_\varepsilon + S_\varepsilon))R_{1\varepsilon} = I + T_{1\varepsilon}. \tag{5.2}$$

Аналогично доказывается существование таких ограниченных операторов $R_{2\varepsilon}$ и компактных операторов $T_{2\varepsilon}$, что

$$R_{2\varepsilon}(I - (M_\varepsilon + S_\varepsilon))L_\varepsilon = I + T_{2\varepsilon}. \tag{5.3}$$

Утверждение леммы вытекает из соотношений (5.2) и (5.3) и из теорем 15.2 и 14.3 в [15]. ■

Для доказательства теоремы 5.2 мы предварительно изучим оператор $\mathbf{L}^1$ (т. е. вначале будем считать, что носитель нелокальных членов сосредоточен вблизи множества $\mathcal{K}_1$).

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1, *и пусть число* ε *достаточно мало. Тогда существуют ограниченный оператор* $\mathbf{R}_1 : \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) \to H_a^{l+2m}(Q)$ *и компактный оператор* $\mathbf{T}_1 : \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$ *такие, что*

$$\mathbf{L}^1 \mathbf{R}_1 = \mathbf{I} + \mathbf{T}_1.$$

Доказательство. 1. При построении правого регуляризатора мы будем использовать разбиение единицы $\{\xi_j^t\}$, отличающееся от разбиения единицы в доказательстве леммы 4.3.

Для каждой орбиты $\mathcal{O}(g)$, $g \in \mathcal{K}_1$, обозначим через $\widehat{B}_\delta(g_j)$ те же окрестности, что и в доказательстве леммы 4.3, а через $\{\varphi_j^t\}$ — то же разбиение единицы для множества $\mathcal{K}_1$. Обозначим функцию $\varphi_j^t(x)$, записанную в координатах $x' = (y', z')$, через $\varphi_j^t(y', z')$. Очевидно, найдется такое число $a' < \chi_m \delta(g^t)$, что

$$\varphi_j^t(0, z') = 0$$

при $a' < |z'| < \chi_m \delta(g^t)$. Как и ранее, предположим, что функция $\varphi_j^t(0, z')$ продолжена нулем при $|z'| \geqslant \chi_m \delta(g^t)$, причем продолженная функция бесконечно дифференцируема.

Пусть $\widehat{\varphi}^t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$ — такая функция, что

$$\widehat{\varphi}^t(z') = 1, \quad |z'| < a', \qquad \widehat{\varphi}^t(z') = 0, \quad |z'| > \widehat{a}',$$

где $a' < \widehat{a}' < \chi_m \delta(g^t)$.

Обозначим через $\psi^t, \widehat{\psi}^t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такие функции, что $\psi^t(y') = 1$ при $|y'| \leqslant \varepsilon_1'$ и $\psi^t(y') = 0$ при $|y'| \geqslant 3\varepsilon_1'/2$, $\widehat{\psi}^t(y') = 1$ при $|y'| \leqslant 3\varepsilon_1'/2$ и $\widehat{\psi}^t(y') = 0$ при $|y'| \geqslant 2\varepsilon_1'$, где число $\varepsilon_1' > 0$ настолько мало, что

$$\big\{(2\varepsilon_1')^2 + (\widehat{a}')^2\big\}^{1/2} < \chi_m \delta(g^t), \tag{5.4}$$

и ε_1' не зависит от ε.

Положим

$$\xi_j^t(y', z') = \psi^t(y')\varphi_j^t(0, z'), \quad \widehat{\xi}^t(y', z') = \widehat{\psi}^t(y')\widehat{\varphi}^t(z').$$

Согласно (5.4) имеем

$$\operatorname{supp} \xi_j^t(y', z') \subset B_{\chi_m\delta(g^t)}, \quad \operatorname{supp} \widehat{\xi}^t(y', z') \subset B_{\chi_m\delta(g^t)}. \tag{5.5}$$

Ясно также, что

$$\xi_j^t(y', z') = \varphi_j^t(0, z'), \quad \widehat{\xi}^t(y', z') = \widehat{\varphi}^t(z'), \quad |y'| < \varepsilon_1', \tag{5.6}$$

$$\widehat{\xi}^t(y', z')\xi_j^t(y', z') = \xi_j^t(y', z'), \quad (y', z') \in \mathbb{R}^n. \tag{5.7}$$

Обозначим через $\xi_j^t(x)$ и $\widehat{\xi}_j^t(x)$ функции $\xi_j^t(y', z')$ и $\widehat{\xi}^t(y', z')$ соответственно, записанные в переменных $x = x(g^t, j)$. Так как $\operatorname{supp} \xi_j^t(x) \subset \widehat{B}_{\delta(g^t)}(g_j^t)$ и $\operatorname{supp} \widehat{\xi}_j^t(x) \subset \widehat{B}_{\delta(g^t)}(g_j^t)$, то, продолжая эти функции нулем вне окрестности $\widehat{B}_{\delta(g^t)}(g_j^t)$, получим бесконечно дифференцируемые в $\mathbb{R}^n$ функции.

Очевидно,

$$\sum_{j,t} \xi_j^t(x) = \sum_{j,t} \varphi_j^t(x) = 1, \quad x \in \mathcal{K}_1. \tag{5.8}$$

2. Положим

$$M_H^t = \Bigg\{u \in H_a^{l+2m}(Q) : \operatorname{supp} u \subset \bigcup_{j=1}^{N(g^t)} V(g_j^t)\Bigg\}, \quad \mathcal{M}_H^t = \big\{v \in \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta) : \operatorname{supp} v \subset V(0)\big\}.$$

Для любой функции $u \in M_H^t$ обозначим $u_j^t(x) = u(x)$, $x \in V(g_j^t)$. Зададим изоморфизм $U^t : M_H^t \to \mathcal{M}_H^t$ формулами

$$(U^t u)_j(x') = u_j^t(x(x')), \quad x' \in \Theta_j \cap V(0); \quad (U^t u)_j(x') = 0, \quad x' \in \Theta_j \setminus V(0);$$

$j = 1, \dots, N(g^t)$.

Положим

$$G_H^t = \Bigg\{f \in \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) : \operatorname{supp} f \subset \bigcup_{j=1}^{N(g^t)} V(g_j^t)\Bigg\},$$

$$\mathcal{G}_H^t = \big\{\Phi \in \mathcal{H}_a^l(\Theta, \Gamma) : \operatorname{supp} \Phi \subset V(0)\big\}.$$

Если $f = \{f_0, f_{i\mu}\} \in G_H^t$, то обозначим через $f_j^t(x)$ и $f_{j\rho\mu}^t(x)$ функции $f_0(x)$ и $f_{i\mu}(x)$ при $x \in V(g_j^t)$ и $x \in \Gamma_i \cap V(g_j^t)$ соответственно, где ρ и j таковы, что преобразование $x \mapsto x'(g^t, j)$ отображает $\Gamma_i \cap V(g_j^t)$ на $\Gamma_{j\rho} \cap V(0)$. Далее, зададим изоморфизм $F^t : G_H^t \to \mathcal{G}_H^t$ формулой

$$(F^t f)(x') = \big\{(F^t f)_j(x'),\ (F^t f)_{j\rho\mu}(x')\big\}.$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
(F^t f)_j(x') = f_j^t(x(x')), \quad x' \in \Theta_j \cap V(0); \qquad (F^t f)_j(x') = 0, \quad x' \in \Theta_j \setminus V(0);\\
(F^t f)_{j\rho\mu}(x') = f_{j\rho\mu}^t(x(x')), \quad x' \in \Gamma_{j\rho} \cap V(0); \quad (F^t f)_{j\rho\mu}(x') = 0, \quad x' \in \Gamma_{j\rho} \setminus V(0);\\
j = 1, \dots, N(g^t); \quad \rho = 1, 2; \quad \mu = 1, \dots, m.
\end{gathered}
$$

3. Положим

$$
R_{\mathcal{K}_1} f = \sum_t (U^t)^{-1} \Bigl(\widehat{\xi}^t (\mathcal{L}''_{g^t})^{-1} F^t \Bigl(\sum_q \xi_q^t f \Bigr) \Bigr). \tag{5.9}
$$

Так как функции $\widehat{\xi}^t$ и ξ_q^t не зависят от ε, то в силу следствия 2.1

$$
\|R_{\mathcal{K}_1} f\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c_1 \|f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}, \tag{5.10}
$$

где $c_1, c_2, \dots > 0$ не зависят ни от ε, ни от функции, стоящей под знаком нормы в правой части.

Очевидно,

$$
\mathbf{L}^1 R_{\mathcal{K}_1} f = \mathbf{L} R_{\mathcal{K}_1} f + T_1 f, \tag{5.11}
$$

где $T_1 : \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$ — линейный ограниченный оператор, действующий по формуле

$$
T_1 f = \Bigl\{ 0, \ -\sum_{s=1}^{S_i} \bigl(B_{i\mu s}^0(x,D)((1-\xi) R_{\mathcal{K}_1} f) \bigr)(\omega_{is}(x)) \big|_{\Gamma_i} \Bigr\}
$$

(напомним, что $A^1 = 0$ и $B^3 = 0$). Более того, пользуясь леммами 4.6 и 4.2 и оценкой (5.10), получим

$$
\|T_1 f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant c_2 \bigl(\|R_{\mathcal{K}_1} f\|_{H_a^{l+2m}(Q)} + \|\xi R_{\mathcal{K}_1} f\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \bigr) \leqslant c_3 \|f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}. \tag{5.12}
$$

Далее, в силу (5.5) имеем

$$
\operatorname{supp} \widehat{\xi}^t(y', z') \subset B_{\delta(g^t)}.
$$

Следовательно,

$$
\widehat{\xi}^t \mathcal{L}'_{g^t} v = \widehat{\xi}^t \mathcal{L}''_{g^t} v, \quad v \in \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta). \tag{5.13}
$$

Из формулы Лейбница вытекает, что

$$
\mathcal{L}'_{g^t}(\widehat{\xi}^t v) = \widehat{\xi}^t \mathcal{L}'_{g^t} v + \widetilde{\mathcal{L}}_{g^t} v + \bigl\{0, \mathcal{T}_{j\rho\mu}^t v\bigr\}, \tag{5.14}
$$

где $\widetilde{\mathcal{L}}_{g^t} : \mathcal{H}_a^{l+2m-1}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^l(\Theta,\Gamma)$ — такой ограниченный оператор, что $\operatorname{supp} \widetilde{\mathcal{L}}_{g^t} v \subset B_{\delta(g^t)}$,

$$
\mathcal{T}_{j\rho\mu}^t v = \sum_{(k,s) \ne (j,0)} \bigl(\widehat{\xi}^t(\mathcal{G}_{j\rho k s} y', z') - \widehat{\xi}^t(y', z') \bigr) \bigl(B_{j\rho\mu k s}^0(x', D) v_k \bigr)(\mathcal{G}_{j\rho k s} y', z') \big|_{\Gamma_{j\rho}}
$$

и $\operatorname{supp} \mathcal{T}_{j\rho\mu}^t v \subset B_{\delta(g^t)}$. Очевидно, оператор

$$
\mathcal{T}_{j\rho\mu}^t : \mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta) \to H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})
$$

ограничен. Более того, так как функция $\widehat{\xi}^t$ не зависит от ε, то

$$
\bigl\| \widetilde{\mathcal{L}}_{g^t} v \bigr\|_{\mathcal{H}_a^l(\Theta,\Gamma)} \leqslant c_4 \|v\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m-1}(\Theta)}, \tag{5.15}
$$

$$\big\|\mathcal{T}^t_{j\rho\mu}v\big\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \leqslant c_5\|v\|_{\mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta)}. \tag{5.16}$$

Пользуясь определением (5.9) оператора $R_{\mathcal{K}_1}$, изоморфизмами U^t и F^t и соотношениями (5.14), (5.13) и (5.7), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{L}R_{\mathcal{K}_1}f &= \sum_t (F^t)^{-1}\mathcal{L}'_{g^t}\widehat{\xi}^t(\mathcal{L}''_{g^t})^{-1}F^t\Big(\sum_q \xi^t_q f\Big) = \\ &= \sum_t (F^t)^{-1}\widehat{\xi}^t F^t\Big(\sum_q \xi^t_q f\Big) + T_2 f + T_3 f = \\ &= \sum_t (F^t)^{-1}F^t\Big(\sum_q \widehat{\xi}^t_q\xi^t_q f\Big) + T_2 f + T_3 f = \\ &= \sum_{t,q} \xi^t_q f + T_2 f + T_3 f,\end{aligned} \tag{5.17}$$

где

$$T_2 f = \sum_t (F^t)^{-1}\widetilde{\mathcal{L}}_{g^t}(\mathcal{L}''_{g^t})^{-1}F^t\Big(\sum_q \xi^t_q f\Big),$$

$$T_3 f = \sum_t (F^t)^{-1}\Big\{0, \mathcal{T}^t_{j\rho\mu}(\mathcal{L}''_{g^t})^{-1}F^t\Big(\sum_q \xi^t_q f\Big)\Big\}.$$

Так как оператор $\widetilde{\mathcal{L}}_{g^t} : \mathcal{H}_a^{l+2m-1}(\Theta) \to \mathcal{H}_a^l(\Theta, \Gamma)$ ограничен, $\operatorname{supp}\widetilde{\mathcal{L}}_{g^t}v \subset B_{\delta(g^t)}$ и пространство $\mathcal{H}_a^{l+2m}(\Theta\cap B_{\delta(g^t)})$ компактно вложено в $\mathcal{H}_a^{l+2m-1}(\Theta\cap B_{\delta(g^t)})$, то оператор

$$T_2 : \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$$

компактен. Далее, в силу (5.15), (5.16) и следствия 2.1 имеем

$$\|T_i f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant c_6\|f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}, \quad i = 2, 3 \tag{5.18}$$

(мы также воспользовались независимостью оператора $\mathcal{L}''_{g^t}$ и функций ξ^t_q от ε).

Теперь докажем, что квадрат оператора T_3 компактен. Действительно,

$$\big\|(T_3)^2 f\big\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant c_7 \sum_{t,j,\rho,\mu}\Big\|\mathcal{T}^t_{j\rho\mu}(\mathcal{L}''_{g^t})^{-1}F^t\Big(\sum_q \xi^t_q T_3 f\Big)\Big\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})}. \tag{5.19}$$

Из (5.5) и (5.6) следует, что

$$\operatorname{supp}\big(\widehat{\xi}^t(\mathcal{G}_{j\rho ks}y', z') - \widehat{\xi}^t(y', z')\big) \subset B_{\delta(g^t)}$$

и $\widehat{\xi}^t(\mathcal{G}_{j\rho ks}y', z') - \widehat{\xi}^t(y', z') = 0$ при $|y'| \leqslant \varepsilon'_1/\chi_M$, где $\chi_M = \max\limits_{j,\rho,k,s}\chi_{j\rho ks}$. Отсюда и из условия $d_{k1} < d_{j\rho} + \varphi_{j\rho ks} < d_{k2}$ (справедливого при $(k, s) \neq (j, 0)$) имеем

$$\big\|\mathcal{T}^t_{j\rho\mu}v\big\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \leqslant c_8\sum_{k=1}^{N(g^t)}\|v_k\|_{H_a^{l+2m}(\Omega^t_k)}, \tag{5.20}$$

где

$$\Omega^t_k = \big\{x' = (y', z') : d_{k1} + d_0 < \varphi < d_{k2} - d_0,\ |y'| > \varepsilon'_1/\chi_M,\ |x'| < \delta(g^t)\big\}$$

и

$$d_0 = \frac{1}{2} \min_{j,\rho,k,s} \left\{ d_{j\rho} + \varphi_{j\rho ks} - d_{k1},\ d_{k2} - (d_{j\rho} + \varphi_{j\rho ks}) \right\} \quad ((k,s) \ne (j,0)). \tag{5.21}$$

Используя неравенство (5.20), лемму 3.5 и эквивалентность норм в подпространствах пространств $H_a^l(\Theta_k)$ и $W^l(\Theta_k)$, состоящих из функций с компактным носителем, отделенным от ребра $\mathcal{P}$, получим

$$\left\| \mathcal{T}_{j\rho\mu}^t (\mathcal{L}_{g^t}'')^{-1} F^t \left(\sum_q \xi_q^t T_3 f \right) \right\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \leqslant$$
$$\leqslant c_9 \sum_k \left(\left\| A_k'' \left[(\mathcal{L}_{g^t}'')^{-1} F^t \left(\sum_q \xi_q^t T_3 f \right) \right]_k \right\|_{H_a^l(\Theta_k)} + \right.$$
$$\left. + \left\| \left[(\mathcal{L}_{g^t}'')^{-1} F^t \left(\sum_q \xi_q^t T_3 f \right) \right]_k \right\|_{H_a^0(\Theta_k \cap B_{2\delta(g^t)})} \right),$$

где

$$A_k'' = A_k(D_{x'}) + \eta\big(A_k^0(x', D_{x'}) - A_k(D_{x'})\big).$$

Однако первые $N(g^t)$ компонент вектора $F^t\left(\sum\limits_q \xi_q^t T_3 f\right)$ равны нулю. Следовательно,

$$A_k'' \left[(\mathcal{L}_{g^t}'')^{-1} F^t \left(\sum_q \xi_q^t T_3 f \right) \right]_k = 0, \quad k = 1, \ldots, N(g^t); \tag{5.22}$$

поэтому

$$\left\| \mathcal{T}_{j\rho\mu}^t (\mathcal{L}_{g^t}'')^{-1} F^t \left(\sum_q \xi_q^t T_3 f \right) \right\|_{H_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \leqslant$$
$$\leqslant c_9 \sum_k \left\| \left[(\mathcal{L}_{g^t}'')^{-1} F^t \left(\sum_q \xi_q^t T_3 f \right) \right]_k \right\|_{H_a^0(\Theta_k \cap B_{2\delta(g^t)})}. \tag{5.23}$$

Из неравенств (5.19) и (5.23) и компактности вложения $H_a^{l+2m}(\Theta_k) \subset H_a^0(\Theta_k \cap B_{2\delta(g^t)})$ вытекает, что квадрат оператора T_3 компактен.

Аналогично можно показать, что квадрат оператора T_1 компактен. Для этого надо воспользоваться соотношением

$$\left[\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)} \cap \left(\bigcup_{t,j} \widehat{B}_{\delta(g_j^t)}(g_j^t) \right) \right] \setminus \mathcal{K}_1^{\varepsilon/2} \subset Q_b, \quad i = 1, \ldots, N_0, \quad s = 1, \ldots S_i,$$

справедливым при некотором $b > 0$.

Таким образом, из (5.11) и (5.17) следует, что

$$\mathbf{L}^1 R_{\mathcal{K}_1} f = \xi_0 f + T_{\mathcal{K}_1} f, \tag{5.24}$$

где

$$\xi_0(x) = \sum_{t,q} \xi_q^t(x) \tag{5.25}$$

и $T_{\mathcal{K}_1} : \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$ — ограниченный оператор, квадрат которого компактен. Более того, из неравенств (5.12) и (5.18) следует, что

$$\|T_{\mathcal{K}_1} f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant c_{10}\|f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}. \tag{5.26}$$

4. Выберем число ε в определении функции ξ настолько малым, что

$$\mathcal{K}_1^{4\varepsilon} \subset \bigcup_{t,j} \widehat{B}_{\delta(g^t)}(g_j^t)$$

и

$$\xi_0(x) \geqslant \frac{1}{2}, \quad x \in \mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$$

(существование такого числа ε следует из (5.8) и (5.25)). В дальнейшем мы наложим некоторые дополнительные условия на число ε.

Для каждого ε рассмотрим такую функцию $\zeta_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, зависящую от ε, что

$$\operatorname{supp}\zeta_0 \subset \mathcal{K}_1^{4\varepsilon}; \quad \zeta_0(x) = 1, \quad x \in \mathcal{K}_1^{2\varepsilon}; \quad \left|D^\alpha \zeta_0(x)\right| \leqslant c_{11}\varepsilon^{-|\alpha|}. \tag{5.27}$$

Для каждой точки $g \in \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$ рассмотрим ее $(\varepsilon/2)$-окрестность $B_{\varepsilon/2}(g)$. Объединение всех таких окрестностей образует покрытие множества $\overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$. Выберем конечное подпокрытие $\{B_{\varepsilon/2}(h^\tau)\}_{\tau=1}^{\tau_1}$, где $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon)$. Пусть $\widetilde{\zeta}^\tau \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — функции, образующие разбиение единицы для множества $\overline{Q}\setminus\mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$, подчиненное покрытию $\{B_{\varepsilon/2}(h^\tau)\}_{\tau=1}^{\tau_1}$. Тогда функции

$$\zeta = \xi_0 + \zeta_0(1-\xi_0), \quad \zeta^\tau = (1-\zeta)\widetilde{\zeta}^\tau, \quad \tau = 1, \dots, \tau_1, \tag{5.28}$$

образуют разбиение единицы для множества $\overline{Q}$, подчиненное покрытию множествами $\bigcup_{t,j} \widehat{B}_{\delta(g^t)}(g_j^t)$ и $B_{\varepsilon/2}(h^\tau)$, $\tau = 1, \dots, \tau_1$.

Из теоремы 2.3 и общей теории эллиптических краевых задач внутри области и вблизи гладкой части границы (см., например, [3]) вытекает существование таких ограниченных операторов

$$R_{\tau 0} : \bigl\{f \in \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) : \operatorname{supp} f \subset B_{\varepsilon/2}(h^\tau)\bigr\} \to \bigl\{u \in H_a^{l+2m}(Q) : \operatorname{supp} u \subset B_\varepsilon(h^\tau)\bigr\}$$

и компактных операторов

$$T_{\tau 0} : \bigl\{f \in \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) : \operatorname{supp} f \subset B_{\varepsilon/2}(h^\tau)\bigr\} \to \bigl\{f \in \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) : \operatorname{supp} f \subset B_\varepsilon(h^\tau)\bigr\},$$

что

$$\mathbf{L}^0 R_{\tau 0} f = f + T_{\tau 0} f. \tag{5.29}$$

Для любой функции $f \in \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$ положим

$$Rf = R_{\mathcal{K}_1} f + R_{\mathcal{K}_1}(\eta f) + \sum_\tau R_{\tau 0}(\zeta^\tau f), \tag{5.30}$$

где $\eta(x) = \zeta_0(x)(1-\xi_0(x))/\xi_0(x)$ при $x \in \mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin \mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$. Отметим, что $\operatorname{supp}\zeta_0 \subset \mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$ и $\xi_0(x) \geqslant 1/2$ при $x \in \mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$; следовательно, носитель функции η содержится в $\mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$, а сама функция η бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$. Имеем

$$\mathbf{L}^1 Rf = \mathbf{L}^1 R_{\mathcal{K}_1} f + \mathbf{L}^1 R_{\mathcal{K}_1}(\eta f) + \sum_\tau \mathbf{L}^0 R_{\tau 0}(\zeta^\tau f) + \sum_\tau \bigl\{0, B_{i\mu}^1 R_{\tau 0}(\zeta^\tau f)\bigr\}. \tag{5.31}$$

Заметим, что $\zeta(x) = 1$ при $x \in \mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$; следовательно, $\operatorname{supp} \zeta^\tau f \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$. Таким образом, $\operatorname{supp} R_{\tau 0}(\zeta^\tau f) \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{\varepsilon}$ и $\operatorname{supp} \xi \subset \mathcal{K}_1^{\varepsilon}$. Тогда

$$B_{i\mu}^1 R_{\tau 0}(\zeta^\tau f) = 0.$$

Отсюда и из равенств (5.24), (5.29) и (5.31) получаем

$$\mathbf{L}^1 R f = \xi_0 f + T_{\mathcal{K}_1} f + \zeta_0(1-\xi_0) f + T_{\mathcal{K}_1}(\eta f) + \sum_\tau \zeta^\tau f + T f = f + T_{\mathcal{K}_1} f + M f + T f, \tag{5.32}$$

где

$$M f = T_{\mathcal{K}_1}(\eta f),$$

а оператор

$$T : \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$$

компактен (но его норма может, вообще говоря, возрастать при $\varepsilon \to 0$). В силу (5.26) имеем

$$\|M f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant c_{10} \|\eta f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}.$$

Однако $(1 - \xi_0(x))/\xi_0(x) = 0$ при $x \in \mathcal{K}_1$, носитель функции ζ_0 содержится в $\mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$ и имеет место неравенство в (5.27). Поэтому из последней оценки, лемм 4.1 и 4.2 и замечания 4.1 следует, что

$$\|M f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant c_{11} \varepsilon \|f\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}. \tag{5.33}$$

Из (5.26), (5.33) и леммы 5.1 вытекает, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ оператор $\mathbf{I} + T_{\mathcal{K}_1} + M$ фредгольмов. Применяя теорему 16.4 в [15], мы видим, что оператор

$$\mathbf{L}^1 R = \mathbf{I} + T_{\mathcal{K}_1} + M + T$$

также фредгольмов. Следовательно, в силу теоремы 15.2 в [15] существуют ограниченный оператор $R' : \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$ и компактный оператор $\mathbf{T}_1 : \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$ такие, что

$$\mathbf{L}^1 R R' = \mathbf{I} + \mathbf{T}_1.$$

Обозначая $\mathbf{R}_1 = R R'$, получаем утверждение леммы. ■

Обозначим

$$\mathcal{H}_a^l(\partial Q) = \prod_{i,\mu} H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i).$$

При построении правого регуляризатора для оператора $\mathbf{L}$ нам понадобится «правый регуляризатор» $\mathbf{R}_1'$ для оператора $\mathbf{L}^1$, определенный на функциях $f' \in \mathcal{H}_a^l(\partial Q)$ и обладающий следующими свойствами: носитель функции $\mathbf{R}_1' f'$ сосредоточен вблизи границы ∂Q при любой f' и носитель функции $\mathbf{R}_1' f'$ сосредоточен вблизи множества $\mathcal{K}_1$, если носитель f' сосредоточен вблизи $\mathcal{K}_1$.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда существуют линейный ограниченный оператор* $\mathbf{R}_1' : \mathcal{H}_a^l(\partial Q) \to H_a^{l+2m}(Q)$ *и компактный оператор* $\mathbf{T}_1' : \mathcal{H}_a^l(\partial Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$ *такие, что*

$$\mathbf{L}^1 \mathbf{R}_1' f' = \{0, f'\} + \mathbf{T}_1' f', \tag{5.34}$$

$$\operatorname{supp} \mathbf{R}_1' f' \subset \overline{Q} \setminus Q_\sigma \tag{5.35}$$

для любой функции $f' \in \mathcal{H}^l_a(\partial Q)$ *и*

$$\operatorname{supp} \mathbf{R}'_1 f' \subset \mathcal{K}_1^{2\varkappa} \tag{5.36}$$

для $f' \in \mathcal{H}^l_a(\partial Q)$, $\operatorname{supp} f' \subset \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}}$, *где* $\varkappa, \sigma > 0$ — *константы из леммы* 4.6.

Доказательство. 1. Зафиксируем произвольное число $\widehat{\varepsilon} > 0$, не зависящее от ε. Аналогично доказательству леммы 5.2 построим функции $\widehat{\zeta}, \widehat{\zeta}^{\,\tau} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\tau = 1, \dots, \widehat{\tau}_1$, $\widehat{\tau}_1 = \widehat{\tau}_1(\widehat{\varepsilon})$, которые образуют разбиение единицы для множества $\overline{Q}$, подчиненное покрытию множествами $\mathcal{K}_1^{2\widehat{\varepsilon}}$ и $B_{\widehat{\varepsilon}/2}(h^\tau)$, $\tau = 1, \dots, \widehat{\tau}_1$, где $h^\tau \in \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{2\widehat{\varepsilon}}$. В частности, функцию $\widehat{\zeta}$ можно выбрать так, что

$$\widehat{\zeta}(x) = 1, \quad x \in \mathcal{K}_1^{\widehat{\varepsilon}}. \tag{5.37}$$

2. Из теоремы 2.3 и общей теории эллиптических краевых задач вблизи гладкой части границы (см., например, [3]) вытекает существование ограниченных операторов

$$R'_{\tau 0} : \{f' \in \mathcal{H}^l_a(\partial Q) : \operatorname{supp} f' \subset B_{\widehat{\varepsilon}/2}(h^\tau)\} \to \{u \in H_a^{l+2m}(Q) : \operatorname{supp} u \subset B_{\widehat{\varepsilon}}(h^\tau)\}$$

и компактных операторов

$$T'_{\tau 0} : \{f' \in \mathcal{H}^l_a(\partial Q) : \operatorname{supp} f' \subset B_{\widehat{\varepsilon}/2}(h^\tau)\} \to \{f \in \mathcal{H}^l_a(Q, \Gamma) : \operatorname{supp} f \subset B_{\widehat{\varepsilon}}(h^\tau)\}$$

таких, что

$$\mathbf{L}^0 R'_{\tau 0} f' = \{0, f'\} + T'_{\tau 0} f'. \tag{5.38}$$

Для любой функции $f' \in \mathcal{H}^l_a(\partial Q)$ положим

$$\mathbf{R}'_1 f' = \widehat{\zeta} u + \sum_\tau u^\tau, \tag{5.39}$$

где

$$u = \mathbf{R}_1\{0, f'\}, \quad u^\tau = R'_{\tau 0}\big(\widehat{\zeta}^{\,\tau}\{0, f'\}\big).$$

Очевидно, свойство (5.35) выполнено, если $2\widehat{\varepsilon} < \sigma$, а свойство (5.36) выполнено, если $2\widehat{\varepsilon} < 2\varkappa$ и $\varkappa + \widehat{\varepsilon}/2 < 2\varkappa$. Докажем соотношение (5.34).

Используя (5.39) и формулу Лейбница, имеем

$$\mathbf{L}^1 \mathbf{R}'_1 f' = \widehat{\zeta} \mathbf{L}^1 u + \left\{0, \sum_{s=1}^{S_i} T_{i\mu s} f'\right\} + T u + \sum_\tau \mathbf{L}^0 u^\tau + \{0, B^1_{i\mu} u^\tau\}, \tag{5.40}$$

где

$$T_{i\mu s} f' = \big(\widehat{\zeta}(\omega_{is}(x)) - \widehat{\zeta}(x)\big)\big(B^0_{i\mu s}(x, D_x)(\xi u)\big)\big(\omega_{is}(x)\big)\big|_{\Gamma_i} \tag{5.41}$$

и оператор $T : H_a^{l+2m-1}(Q) \to \mathcal{H}^l_a(Q, \Gamma)$ ограничен. В силу компактности вложения $H_a^{l+2m}(Q) \subset H_a^{l+2m-1}(Q)$ оператор $T : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}^l_a(Q, \Gamma)$ компактен.

Теперь из леммы 5.2 и соотношений (5.38) и (5.40) следует, что

$$\mathbf{L}^1 \mathbf{R}'_1 f' = \{0, f'\} + T' f' + \left\{0, \sum_{s=1}^{S_i} T_{i\mu s} f'\right\} + \{0, B^1_{i\mu} u^\tau\}, \tag{5.42}$$

где $T' : \mathcal{H}^l_a(\partial Q) \to \mathcal{H}^l_a(Q, \Gamma)$ — компактный оператор.

3. Докажем, что оператор $T_{i\mu s}:\mathcal{H}_a^l(\partial Q)\to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ компактен. Так как ω_{is} — C^∞-диффеоморфизмы, то в силу леммы 4.5

$$\|T_{i\mu s}f'\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\leqslant$$
$$\leqslant k_1\Big\|\big(\widehat{\zeta}(x)-\widehat{\zeta}(\omega_{is}^{-1}(x))\big)\big(B^0_{i\mu s}(x,D_x)(\xi u)\big)\big|_{\omega_{is}(\Gamma_i)}\Big\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\omega_{is}(\Gamma_i))},\qquad(5.43)$$

где $k_1,k_2,\ldots>0$ не зависят от f'.

Обозначим $\mathcal{M}_{is}=\overline{\omega_{is}(\Gamma_i)}\setminus\omega_{is}(\Gamma_i)$. Пусть $x\in\mathcal{M}_{is}$; тогда либо $x\in\mathcal{K}_1$, либо $x\in\mathcal{K}_2$, либо $x\in\mathcal{K}_3$. Если $x\in\mathcal{M}_{is}\cap\mathcal{K}_1$, то обе точки x и $\omega_{is}^{-1}(x)$ принадлежат $\mathcal{K}_1$. Следовательно,

$$\widehat{\zeta}(x)-\widehat{\zeta}(\omega_{is}^{-1}(x))=0,\quad x\in(\mathcal{M}_{is}\cap\mathcal{K}_1)^d,$$

где $(\mathcal{M}_{is}\cap\mathcal{K}_1)^d$ — d-окрестность множества $\mathcal{M}_{is}\cap\mathcal{K}_1$ и $d>0$ достаточно мало.

Если $\mathcal{M}_{is}\cap(\mathcal{K}_2\cup\mathcal{K}_3)\neq\varnothing$, то

$$\xi(x)=0,\quad x\in(\mathcal{M}_{is}\cap(\mathcal{K}_2\cup\mathcal{K}_3))^d,$$

где $(\mathcal{M}_{is}\cap(\mathcal{K}_2\cup\mathcal{K}_3))^d$ — d-окрестность множества $\mathcal{M}_{is}\cap(\mathcal{K}_2\cup\mathcal{K}_3)$ и $d>0$ достаточно мало.

Во всех этих случаях

$$\operatorname{supp}\big(\widehat{\zeta}(x)-\widehat{\zeta}(\omega_{is}^{-1}(x))\big)\big(B^0_{i\mu s}(x,D_x)(\xi u)\big)\big|_{\omega_{is}(\Gamma_i)}\subset Q_b,$$

где $b>0$ достаточно мало.

Пользуясь оценкой (5.43), леммой 3.5 и эквивалентностью норм в пространствах $H_a^l(Q_b)$ и $W^l(Q_b)$, получим

$$\|T_{i\mu s}f'\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\leqslant k_2\|u\|_{W^{l+2m}(Q_b)}\leqslant k_3\big(\|A^0u\|_{H_a^l(Q)}+\|u\|_{H_a^0(Q)}\big).\qquad(5.44)$$

В силу леммы 5.2 $A^0u=A^0\mathbf{R}^1\{0,f'\}=\mathbf{T}_{11}f'$, где $\mathbf{T}_{11}:\mathcal{H}_a^l(\partial Q)\to H_a^l(Q)$ — компактный оператор. Следовательно, неравенство (5.44) принимает вид

$$\|T_{i\mu s}f'\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\leqslant k_3\big(\|\mathbf{T}_{11}f'\|_{H_a^l(Q)}+\|\mathbf{R}^1\{0,f'\}\|_{H_a^0(Q)}\big),$$

откуда вытекает, что оператор $T_{i\mu s}$ компактен (поскольку оператор $\mathbf{T}_{11}$ компактен и пространство $H_a^{l+2m}(Q)$ компактно вложено в $H_a^0(Q)$).

4. Выражение $B^1_{i\mu}u^\tau$ состоит из слагаемых вида

$$\big(B^0_{i\mu s}(x,D_x)\big(\xi R'_{\tau 0}\big(\widehat{\zeta}^\tau\{0,f'\}\big)\big)\big)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i},\quad s=1,\ldots,S_i.\qquad(5.45)$$

Так как $\operatorname{supp}R'_{\tau0}\big(\widehat{\zeta}^\tau\{0,f'\}\big)\subset B_{\widehat{\varepsilon}}(h^\tau)$, где $h^\tau\in\overline{Q}\setminus\mathcal{K}_1^{2\widehat{\varepsilon}}$, то $\operatorname{supp}R'_{\tau0}\big(\widehat{\zeta}^\tau\{0,f'\}\big)\subset\overline{Q}\setminus\mathcal{K}_1^{\widehat{\varepsilon}}$. С другой стороны, $\operatorname{supp}\xi\subset\mathcal{K}_1^{\varepsilon}$. Значит,

$$\operatorname{supp}B^0_{i\mu s}(x,D_x)\big(\xi R'_{\tau0}\big(\widehat{\zeta}^\tau\{0,f'\}\big)\big)\big|_{\omega_{is}(\Gamma_i)}\subset Q_b,$$

где $b>0$ достаточно мало. Следовательно, используя лемму 3.5 и равенство (5.38), аналогично предыдущему можно показать, что все операторы в (5.45) компактны. Таким образом (5.42) эквивалентно (5.34). ■

Теперь мы можем доказать теорему 5.2.

Доказательство теоремы 5.2. 1. Положим

$$\Phi = B^2\mathbf{R}_1 f, \quad f = \{f_0, f'\} \in \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma). \tag{5.46}$$

Введем ограниченный оператор $\mathbf{R} : \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) \to H_a^{l+2m}(Q)$ по формуле

$$\mathbf{R}f = \mathbf{R}_1 f - \mathbf{R}_1'\Phi + \mathbf{R}_1' B^2 \mathbf{R}_1'\Phi,$$

где $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_1'$ — операторы из лемм 5.2 и 5.3 соответственно. Покажем, что $\mathbf{R}$ — нужный нам оператор.

Для простоты будем обозначать различные компактные операторы одной и той же буквой T.

Из лемм 5.2 и 5.3 следует, что

$$A\mathbf{R}f = A^0\mathbf{R}f = A^0\mathbf{R}_1 f - A^0\mathbf{R}_1'(\Phi - B^2\mathbf{R}_1'\Phi) = f_0 + Tf \tag{5.47}$$

(напоминаем, что $A^1 = 0$) и

$$\begin{aligned} C\mathbf{R}f &= C\mathbf{R}_1 f - C\mathbf{R}_1'\Phi + C\mathbf{R}_1' B^2\mathbf{R}_1'\Phi = \\ &= (f' + Tf) - (\Phi + T\Phi) + (B^2\mathbf{R}_1'\Phi + T\mathbf{B}^2\mathbf{R}_1'\Phi) = \\ &= f' - \Phi + B^2\mathbf{R}_1'\Phi + Tf. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Действуя оператором B^2 на функцию $\mathbf{R}f$ и пользуясь определением функции Φ в (5.46), получим

$$B^2\mathbf{R}f = \Phi - B^2\mathbf{R}_1'\Phi + B^2\mathbf{R}_1'B^2\mathbf{R}_1'\Phi. \tag{5.49}$$

Складывая соотношения (5.48) и (5.49) и вспоминая, что $B^3 = 0$, получаем

$$B\mathbf{R}f = f' + Tf + B^2\mathbf{R}_1'B^2\mathbf{R}_1'\Phi. \tag{5.50}$$

2. Покажем, что

$$B^2\mathbf{R}_1'B^2\mathbf{R}_1'\Phi = 0. \tag{5.51}$$

Из соотношения (5.35) в лемме 5.3 вытекает, что

$$\operatorname{supp} \mathbf{R}_1'\Phi \subset \overline{Q} \setminus Q_\sigma.$$

Следовательно, из оценки (4.25) получим

$$\operatorname{supp} B^2\mathbf{R}_1'\Phi \subset \overline{\mathcal{K}_1^\varkappa}.$$

Далее, в силу соотношения (5.36) в лемме 5.3

$$\operatorname{supp} \mathbf{R}_1'B^2\mathbf{R}_1'\Phi \subset \mathcal{K}_1^{2\varkappa}.$$

Отсюда и из неравенства (4.24) следует (5.51).

Из соотношений (5.47), (5.50) и (5.51) получаем утверждение теоремы. ■

Замечание 5.1. Используя результаты работы [6], можно доказать, что теорема 5.1 справедлива и в том случае, когда вблизи множества $\mathcal{K}_1$ преобразования ω_{is} нелинейны, а их линейные части в точках множества $\mathcal{K}_1$ удовлетворяют условию 1.4. Более того, индекс задачи с нелинейными преобразованиями ω_{is} равен индексу соответствующей задачи с преобразованиями, линеаризованными вблизи множества $\mathcal{K}_1$.

§ 6. Некоторые обобщения

6.1. В этом параграфе мы обобщим результаты §§ 4 и 5 на случай, когда диффеоморфизмы ω_{is} определены лишь в окрестности множества $\mathcal{K}_1$, операторы $B^2_{i\mu}$ — абстрактные операторы с носителем вне множества $\mathcal{K}_1$, а A^1 и $B^3_{i\mu}$ — произвольные компактные возмущения в соответствующих весовых пространствах.

Рассмотрим дифференциальные операторы

$$A^0 \equiv A^0(x,D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)D^\alpha, \quad B^0_{i\mu s} \equiv B^0_{i\mu s}(x,D) = \sum_{|\alpha|=m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha}(x)D^\alpha,$$

где $a_\alpha, b_{i\mu s\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции ($i=1,\dots,N_0$; $\mu=1,\dots,m$; $s=0,\dots,S_i$), $m_{i\mu} \leqslant 2m-1$.

Пусть для области $Q \subset \mathbb{R}^n$ выполнены предположения § 1. Как и в § 1 обозначим

$$\mathcal{K}_1 = \bigcup_{\nu=1}^{N_1} \mathcal{K}_{1\nu} = \partial Q \setminus \bigcup_i \Gamma_i,$$

где $\mathcal{K}_{1\nu}$ — взаимно непересекающиеся $(n-2)$-мерные связные многообразия класса C^∞ без края.

Пусть ω_{is} ($i=1,\dots,N_0$; $s=1,\dots,S_i$) — C^∞-диффеоморфизм, отображающий $(\overline{\Gamma_i}\setminus\Gamma_i)^{\varepsilon_0}$ на множество $\omega_{is}((\overline{\Gamma_i}\setminus\Gamma_i)^{\varepsilon_0})$, где $\varepsilon_0>0$ — некоторое число, причем

1. $\omega_{is}(\Gamma_i \cap \mathcal{K}_1^{\varepsilon_0}) \subset Q$,
2. если η $(1\leqslant\eta\leqslant N_1)$ и i $(1\leqslant i\leqslant N_0)$ таковы, что $\mathcal{K}_{1\eta}\subset\overline{\Gamma_i}\setminus\Gamma_i$, то для каждого s $(1\leqslant s\leqslant S_i)$ найдется такое число ν $(1\leqslant\nu\leqslant N_1)$, что $\omega_{is}(\mathcal{K}_{1\eta})=\mathcal{K}_{1\nu}$.

Наряду с множеством $\mathcal{K}_1$ введем множество

$$K_2 = \bigcup_{\nu=1}^{N_2} K_{2\nu} \subset \bigcup_i \Gamma_i,$$

где $K_{2\nu}$ — взаимно непересекающиеся $(n-2)$-мерные связные C^∞-многообразия без края. В частности, множество K_2 может быть пусто. В определении пространства $H^l_a(Q)=H^l_a(Q,K)$ будем использовать либо множество

$$K=\mathcal{K}_1,$$

либо множество

$$K=\mathcal{K}_1\cup K_2.$$

Изучим следующую нелокальную эллиптическую задачу:

$$Au \equiv A^0u + A^1u = f_0(x), \quad x\in Q, \tag{6.1}$$

$$B_{i\mu}u \equiv \sum_{j=0}^{3} B^j_{i\mu}u = f_{i\mu}(x), \quad x\in\Gamma_i; \quad i=1,\dots,N_0; \quad \mu=1,\dots,m. \tag{6.2}$$

Здесь

$$B^0_{i\mu} = B^0_{i\mu 0}u\big|_{\Gamma_i}, \quad B^1_{i\mu}u = \sum_{s=1}^{S_i} \bigl(B^0_{i\mu s}(x,D)(\xi u)\bigr)\bigl(\omega_{is}(x)\bigr)\big|_{\Gamma_i},$$

функция $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\xi(x) = 1$ при $x \in \mathcal{K}_1^{\varepsilon/2}$ и $\operatorname{supp} \xi \subset K_1^\varepsilon$, а число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что если $\omega_{is}(\mathcal{K}_{1\eta}) = \mathcal{K}_{1\nu}$, то $\mathcal{K}_{1\nu}^\varepsilon \subset \omega_{is}(\mathcal{K}_{1\eta}^{\varepsilon_0})$.

Предположим, что операторы A^0 и $B_{i\mu 0}^0$ удовлетворяют условиям 1.1 и 1.2, а преобразования ω_{is} — условиям 1.3 и 1.4. Кроме того, предположим, что выполнены следующие условия на операторы A^1, $B_{i\mu}^2$ и $B_{i\mu}^3$.

Условие 6.1 (компактность возмущений). *Линейные операторы*

$$A^1 : H_a^{l+2m-1}(Q) \to H_a^l(Q) \quad \text{и} \quad B_{i\mu}^3 : H_a^{l+2m-1}(Q) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$$

ограничены $(i = 1, \dots, N_0;\ \mu = 1, \dots, m)$.

Условие 6.2 (отделимость от точек сопряжения). *Линейные операторы*

$$B_{i\mu}^2 : H_a^{l+2m}(Q) \to H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$$

ограничены, и существуют такие числа $\sigma > 0$ *и* $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$, *что*

$$\left\|B_{i\mu}^2 u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_1 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa_1}})} \tag{6.3}$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa_1}})$ *и*

$$\left\|B_{i\mu}^2 u\right\|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa_2}})} \leqslant c_2 \|u\|_{H_a^{l+2m}(Q_\sigma)} \tag{6.4}$$

для всех $u \in H_a^{l+2m}(Q_\sigma)$; *здесь* $i = 1, \dots, N_0$; $\mu = 1, \dots, m$; $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* u.

Замечание 6.1. Из леммы 4.6 следует, что задача (1.3), (1.4) представима в виде (6.1), (6.2) с операторами A^1, $B_{i\mu}^2$ и $B_{i\mu}^3$, удовлетворяющими условиям 6.1 и 6.2.

Замечание 6.2. В доказательствах теорем 4.1 и 5.2 на самом деле используются лишь условия 6.1 и 6.2, при этом явный вид операторов A^1, $B_{i\mu}^2$ и $B_{i\mu}^3$ не важен. В §§ 1–5 для доказательства того, что эти операторы удовлетворяли условиям 6.1 и 6.2, мы пользовались условием 4.1, которое обеспечивало выбор множества K и числа a. Однако в настоящем параграфе условие 4.1 не потребуется, так как, вместо того чтобы доказывать условия 6.1 и 6.2, мы изначально предполагаем их выполненными.

6.2. Введем линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{L} = \{A, B_{i\mu}\} : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma),$$

соответствующий задаче (6.1), (6.2).

Для каждой фиксированной точки $g \in \mathcal{K}_1$ рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_g(\omega) : \mathcal{E}_a^{l+2m}(\theta) \to \mathcal{E}_a^l(\theta, \gamma)$, заданный формулой (2.1), где $\omega \in S^{n-3}$. Рассмотрим также аналитическую оператор-функцию $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda) : \mathcal{W}^{l+2m}(d_1, d_2) \to \mathcal{W}^l[d_1, d_2]$, заданную формулой (2.2).

Для каждой фиксированной точки $g \in K_2$ рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_g(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}_+^2) \to \mathcal{E}_a^l(\mathbb{R}_+^2, \gamma)$, заданный формулой (2.26), где $\omega \in S^{n-3}$. Рассмотрим также аналитическую оператор-функцию $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda) : W^{l+2m}(-\pi/2, \pi/2) \to \mathcal{W}^l[-\pi/2, \pi/2]$, заданную формулой (2.27).

Аналогично доказательству теорем 4.1 и 5.2, используя условия 6.1 и 6.2 и считая число $\varepsilon > 0$ в определении функции ξ достаточно малым, получим следующие два утверждения.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.4, 6.1 *и* 6.2. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *ни для какой точки* $g \in K$ *и* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega)) = 0$ *для любых* $g \in K$ *и* $\omega \in S^{n-3}$. *Тогда для всех функций* $u \in H_a^{l+2m}(Q)$ *выполнена оценка*

$$\|u\|_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \|u\|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}),$$

где $c > 0$ *не зависит от* u.

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Тогда существует такой линейный ограниченный оператор*

$$\mathbf{R} : \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) \to H_a^{l+2m}(Q),$$

что

$$\mathbf{LR} = \mathbf{I} + \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T} : \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$ — *компактный оператор.*

Наряду с оператором $\mathbf{L}$ рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathbf{L}^1 = \{A^0,\ B_{i\mu}^0 + B_{i\mu}^1\} : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma).$$

Из теоремы 5.1 следует, что оператор $\mathbf{L}^1$ фредгольмов.

Аналогично доказательству теоремы 5.1 и следствия 5.1, используя теоремы 6.1 и 6.2, получим следующий результат.

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Тогда оператор*

$$\mathbf{L} : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$$

фредгольмов и $\operatorname{ind}\mathbf{L} = \operatorname{ind}\mathbf{L}^1$.

Теорема 6.3 показывает, что добавление операторов A^1, $B_{i\mu}^2$ и $B_{i\mu}^3$, удовлетворяющих условиям 6.1 и 6.2, не только не нарушает фредгольмовость оператора, но даже не меняет его индекс.

6.3. Рассмотрим пример эллиптической задачи с распределенными нелокальными членами, удовлетворяющими условию 6.2.

Пример 6.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область, граница ∂Q которой является поверхностью вращения вокруг оси x_3. Обозначим $P = \{0,0,1\} \cup \{0,0,-1\}$. Предположим, что вне множества $P^{1/4}$ поверхность ∂Q совпадает с границей области

$$\Big\{x : x_3 < 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\Big\} \cap \Big\{x : x_3 > -1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\Big\}.$$

Обозначим

$$\Gamma_1 = \{x \in \partial Q : x_3 < 0\}, \quad \Gamma_2 = \{x \in \partial Q : x_3 > 0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{K}_1 = \{x : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\}.$$

Будем считать, что граница ∂Q бесконечно гладкая вне множества $\mathcal{K}_1$.

Введем операторы

$$B_l^1 u = -\alpha_l (\xi u)(\omega_l(x))\big|_{\Gamma_l}, \quad l = 1, 2. \tag{6.5}$$

Преобразования $\omega_l(x)$ в (6.5) при $x \in \mathcal{K}_1^{\varepsilon_0}$ зададим формулой

$$\omega_l(x) = \Bigg(\cos\varphi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\big((1-r) + (-1)^l x_3\big)\right], \\ \sin\varphi\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\big((1-r) + (-1)^l x_3\big)\right], \ \frac{1}{\sqrt{2}}\big((-1)^{l+1}(1-r) + x_3\big)\Bigg), \tag{6.6}$$

где r, φ, x_3 — цилиндрические координаты точки x, число $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, функция $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ такова, что $\xi(x) = 1$ при $x \in \mathcal{K}_1^{\varepsilon/2}$ и $\operatorname{supp}\xi \subset \mathcal{K}_1^{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Очевидно, $\omega_l(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_1$.

Так как $\Gamma_l \in C^\infty$, то найдется достаточно малое число $\varkappa > 0$, обладающее следующим свойством: для любой точки $x \in \Gamma_l^{5\varkappa} \cap Q$ существует единственная пара (y, t), $y \in \Gamma_l$, $t > 0$, такая, что $x = y + n_y t$, где n_y — единичная нормаль к Γ_l в точке y, направленная внутрь области Q. Можно показать, что если число $\varkappa > 0$ достаточно мало, то преобразование $x \mapsto (y, t)$ — C^∞-диффеоморфизм, отображающий $\Gamma_l^{5\varkappa} \cap Q$ на $\Gamma_l \times (0, 5\varkappa)$.

Введем такую функцию $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\eta(t) = 1$ при $t \in (3\varkappa, 4\varkappa)$ и $\operatorname{supp}\eta \subset (2\varkappa, 5\varkappa)$. Рассмотрим операторы

$$B_l^2 u = F^{-1}(b_l F(\eta u))\big|_{t=0}, \quad l = 1, 2, \tag{6.7}$$

где

$$F(\eta u)(y, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} \eta(t) u(y, t)\, dt$$

есть преобразование Фурье по переменной t, F^{-1} — обратное преобразование Фурье, $b_l(\lambda)$ — такая непрерывная в $\mathbb{R}$ функция, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |b_l(\lambda)| < \infty. \tag{6.8}$$

Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$-\Delta u = f_0(x), \quad x \in Q, \tag{6.9}$$

$$u\big|_{\Gamma_l} + B_l^1 u + B_l^2 u = f_l(x), \quad x \in \Gamma_l, \quad l = 1, 2. \tag{6.10}$$

Положим $K = \mathcal{K}_1$ в определении пространства $H_a^l(Q) = H_a^l(Q, K)$.

Запишем якобиан $D\omega_l / Dx$ на $\mathcal{K}_1$ следующим образом:

$$\frac{D\omega_l}{Dx}\bigg|_{\mathcal{K}_1} = \frac{D\omega_l}{D(r, \varphi, x_3)}\bigg|_{\mathcal{K}_1} \frac{D(r, \varphi, x_3)}{Dx}\bigg|_{\mathcal{K}_1}.$$

Так как

$$\frac{D(r, \varphi, x_3)}{Dx}\bigg|_{\mathcal{K}_1} = 1,$$

то

$$\frac{D\omega_l}{Dx}\Big|_{\mathcal{K}_1} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\omega_{l1}}{\partial r} & \dfrac{\partial\omega_{l1}}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\omega_{l1}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\omega_{l2}}{\partial r} & \dfrac{\partial\omega_{l2}}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\omega_{l2}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\omega_{l3}}{\partial r} & \dfrac{\partial\omega_{l3}}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial\omega_{l3}}{\partial x_3} \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathcal{K}_1} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi & -\sin\varphi & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{l+1}\cos\varphi \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi & \cos\varphi & \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{l+1}\sin\varphi \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1)^l & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1.$$

Следовательно, можно выбрать число $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, что преобразование $\omega_l : \mathcal{K}_1^{\varepsilon_0} \to \omega_l(\mathcal{K}_1^{\varepsilon_0})$ будет C^∞-диффеоморфизмом. Кроме того, имеем $\omega_l(\mathcal{K}_1^{\varepsilon_0}) = \mathcal{K}_1^{\varepsilon_0}$ и $\omega_l(\Gamma_l \cap \mathcal{K}_1^{\varepsilon_0}) = \{x : 1-\varepsilon_0 < r < 1,\ x_3 = 0\} \subset Q$.

Так как $\omega_l(g) = g$ для $g \in \mathcal{K}_1$ и $l = 1, 2$, то орбита любой точки $g \in \mathcal{K}_1$ состоит лишь из самой точки $g_1 = g$. При $x \ne 0$ введем новые переменные $x' = (y', z')$ по формулам

$$y_1' = 1 - r, \quad y_2' = x_3, \quad z' = \varphi - \varphi_1,$$

где $y' = (y_1', y_2')$, а r, φ, x_3 и $1, \varphi_1, 0$ — цилиндрические координаты точек x и g_1 соответственно.

Положим $V(0) = \{x' : |y'| < \varepsilon_1,\ |z'| < \varepsilon_1\}$, где $\varepsilon_1 < \min\{\varepsilon_0, 2\varkappa\}$. Пусть $\widehat{V}(g_1) = V(g_1)$ — прообраз множества $V(0)$ при замене переменных $x \mapsto x'$. Предположим, что $\operatorname{supp} u \subset V(g_1) \cap \overline{Q}$. Введем функцию $v(x') = u(x(x'))$ и обозначим $x' = (y', z')$ через $x = (y_1, y_2, z)$. Тогда краевая задача (6.9), (6.10) примет вид

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} - \frac{1}{(1-y_1)^2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{1-y_1}\frac{\partial v}{\partial y_1} = f_0'(x), \quad x \in \Theta, \tag{6.11}$$

$$v(y,z)\big|_{\Gamma_{1l}} - \alpha_l v(\mathcal{G}_l y, z)\big|_{\Gamma_{1l}} = f_l'(x), \quad x \in \Gamma_{1l}, \quad l = 1, 2, \tag{6.12}$$

где $\mathcal{G}_l$ — оператор поворота на угол $(-1)^{l+1}\pi/4$,

$$\Theta = \{x : r > 0,\ |\varphi| < \pi/4,\ z \in \mathbb{R}\}, \quad \Gamma_{1l} = \{x : r > 0,\ \varphi = (-1)^l \pi/4,\ z \in \mathbb{R}\}$$

и r, φ — полярные координаты точки y.

Очевидно, условия 1.1–1.4 в этом примере выполнены.

Переходя в уравнении (6.11) к главной однородной части с коэффициентами, замороженными в начале координат, получим

$$-\Delta v = f_0'(x), \quad x \in \Theta. \tag{6.13}$$

Нелокальные краевые условия (6.12) при этом не меняются.

В случае задачи (6.13), (6.12) оператор

$$\mathcal{L}_g = \mathcal{L} : H_a^2(\Theta) \to \mathcal{H}_a^0(\Theta, \Gamma),$$

заданный формулой (1.11), принимает вид

$$\mathcal{L}v = \Big(-\Delta v,\, v(\varphi,r,z)\big|_{\Gamma_{11}} - \alpha_1 v(\varphi+\pi/4,r,z)\big|_{\Gamma_{11}},\, v(\varphi,r,z)\big|_{\Gamma_{12}} - \alpha_2 v(\varphi-\pi/4,r,z)\big|_{\Gamma_{12}}\Big). \tag{6.14}$$

Следовательно, операторы

$$\mathcal{L}_g(\omega) = \mathcal{L}(\omega) : E_a^2(\theta) \to \mathcal{E}_a^0(\theta,\gamma)$$

и

$$\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda) = \widehat{\mathcal{L}}(\lambda) : W^2(-\pi/4,\pi/4) \to \mathcal{W}^0[-\pi/4,\pi/4],$$

заданные формулами (2.1) и (2.2), имеют вид

$$\mathcal{L}(\omega)V = \Big(-\Delta_y V + V,\, V(\varphi,r)\big|_{\gamma_{11}} - \alpha_1 V(\varphi+\pi/4,r)\big|_{\gamma_{11}},\, V(\varphi,r)\big|_{\gamma_{12}} - \alpha_2 V(\varphi-\pi/4,r)\big|_{\gamma_{12}}\Big) \tag{6.15}$$

и

$$\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)w = \big(-w_{\varphi\varphi} + \lambda^2 w,\ w(-\pi/4) - \alpha_1 w(0),\ w(\pi/4) - \alpha_2 w(0)\big) \tag{6.16}$$

соответственно, где

$$\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ |\varphi| < \pi/4\}, \quad \gamma_{1l} = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \varphi = (-1)^l\pi/4\}$$

и $\omega = \pm 1$ (ср. пример 2.1 при $d = \pi/2$).

Полоса $-1 \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1$ не содержит собственных значений оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)$, и оператор $\mathcal{L}(\omega)$, $\omega = \pm 1$, — изоморфизм при тех $0 \leqslant a \leqslant 2$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, для которых выполнены неравенства $0 < |\alpha_1 + \alpha_2| < 2$ и $\pi/4 < \operatorname{arctg}\sqrt{4(\alpha_1+\alpha_2)^{-2} - 1}$ (см. пример 2.1). Следовательно, по теореме 2.2 оператор $\mathcal{L}$ — изоморфизм для указанных a и α_l.

Предположим, что $a > 1$, и докажем, что операторы B_l^2 удовлетворяют условию 6.2 с $\varkappa_1 = 2\varkappa$, $\varkappa_2 = \varkappa$ и $\sigma = \varkappa$. Используя лемму 4.5, имеем

$$\begin{aligned}\big\|B_l^2 u\big\|_{H_a^{3/2}(\Gamma_l)} &\leqslant k_1 \big\|F^{-1}(b_l F(\eta u))\big\|_{W^2(\Gamma_l\times(-\infty,\infty))} = \\ &= \frac{k_1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\alpha|+\beta\leqslant 2} \bigg\| D_y^\alpha D_t^\beta \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} b_l(\lambda) F(\eta u)(y,\lambda)\, d\lambda \bigg\|_{L_2(\Gamma_l\times(-\infty,\infty))} = \\ &= \frac{k_1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\alpha|+\beta\leqslant 2} \bigg\| \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \lambda^\beta b_l(\lambda) D_y^\alpha F(\eta u)(y,\lambda)\, d\lambda \bigg\|_{L_2(\Gamma_l\times(-\infty,\infty))},\end{aligned}$$

где $D_t = -i\partial/\partial t$. Применяя теорему Планшереля и пользуясь свойством (6.8), получим

$$\begin{aligned}\big\|B_l^2 u\big\|_{H_a^{3/2}(\Gamma_l)} &\leqslant \frac{k_1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\alpha|+\beta\leqslant 2} \big\|\lambda^\beta b_l(\lambda) D_y^\alpha F(\eta u)(y,\lambda)\big\|_{L_2(\Gamma_l\times(-\infty,\infty))} \leqslant \\ &\leqslant k_2 \sum_{|\alpha|+\beta\leqslant 2} \big\|\lambda^\beta D_y^\alpha F(\eta u)(y,\lambda)\big\|_{L_2(\Gamma_l\times(-\infty,\infty))}.\end{aligned}$$

Применяя еще раз теорему Планшереля и учитывая, что $\operatorname{supp}\eta \subset (2\varkappa, 5\varkappa)$, имеем

$$\big\|B_l^2 u\big\|_{H_a^{3/2}(\Gamma_l)} \leqslant k_3 \|u\|_{W^2(\Omega_{l\varkappa}^1)},$$

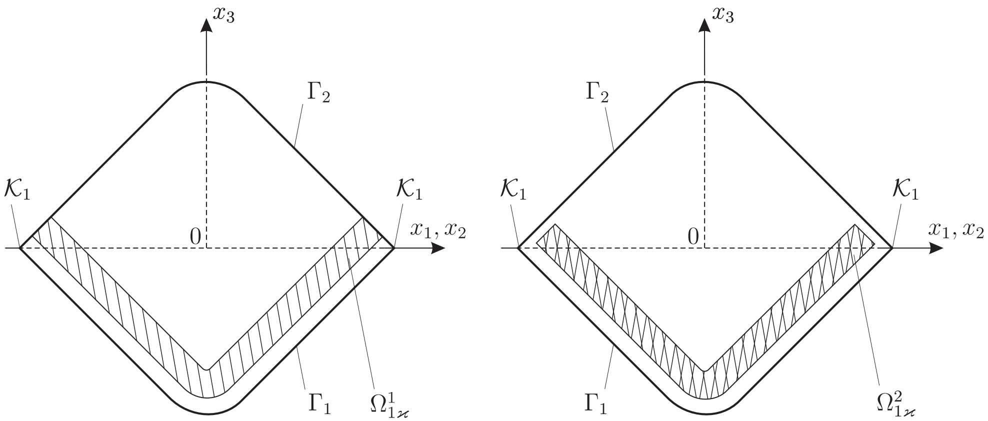

Рис. 4. Задача (6.9), (6.10)

где

$$\Omega^1_{l\varkappa} = \{x = y + n_y t : y \in \Gamma_l,\ t \in (2\varkappa, 5\varkappa)\}$$

(см. рис. 4).

Так как

$$\Omega^1_{l\varkappa} \subset Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}}$$

и нормы в пространствах

$$W^2(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}})$$

и

$$H^2_a(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}})$$

эквивалентны, то из последнего неравенства вытекает, что

$$\left\|B^2_l u\right\|_{H^{3/2}_a(\Gamma_l)} \leqslant k_4 \|u\|_{H^2_a(Q\setminus\overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}})}. \tag{6.17}$$

Обозначим

$$\Omega^2_{l\varkappa} = \{x = y + n_y t : y \in \Gamma_l \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}},\ t \in (2\varkappa, 5\varkappa)\}.$$

Поскольку $\Omega^2_{l\varkappa} \subset Q_\varkappa$, то аналогично (6.17) получим

$$\left\|B^2_l u\right\|_{H^{3/2}_a(\Gamma_l\setminus\overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}})} \leqslant k_5 \|u\|_{H^2_a(Q_\varkappa)}. \tag{6.18}$$

Из (6.17) и (6.18) следует, что при $a > 1$ операторы B^2_l удовлетворяют условию 6.2.

Рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$\mathbf{L}, \mathbf{L}^1 : H^2_a(Q) \to H^0_a(Q) \times H^{3/2}_a(\Gamma_1) \times H^{3/2}_a(\Gamma_2),$$

заданные формулами

$$\mathbf{L}u = \{-\Delta u,\ u|_{\Gamma_l} + B^1_l u + B^2_l u\}, \quad \mathbf{L}^1 u = \{-\Delta u,\ u|_{\Gamma_l} + B^1_l u\}.$$

Из теоремы 5.1 следует, что оператор $\mathbf{L}^1$ фредгольмов, если $0 \leqslant a \leqslant 2$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что $0 < |\alpha_1 + \alpha_2| < 2$ и $\pi/4 < \operatorname{arctg}\sqrt{4(\alpha_1+\alpha_2)^{-2} - 1}$. По теореме 6.3 оператор $\mathbf{L}$ фредгольмов и $\operatorname{ind}\mathbf{L} = \operatorname{ind}\mathbf{L}^1$, если $1 < a \leqslant 2$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что $0 < |\alpha_1 + \alpha_2| < 2$ и $\pi/4 < \operatorname{arctg}\sqrt{4(\alpha_1+\alpha_2)^{-2} - 1}$, а непрерывная функция $b(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (6.8).

§ 7. Постановка нелокальных эллиптических задач с параметром. Модельные операторы

7.1. В §§ 7 и 8 будет доказана однозначная разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$, где $d \geqslant 1$. Как и ранее, вначале мы установим однозначную разрешимость модельных нелокальных задач с параметром в двугранных углах. Используя эти результаты, результаты работ [1, 17] и метод разбиения единицы, мы изучим нелокальные задачи в ограниченных областях.

Пусть область Q, преобразования ω_{is} и множества $\mathcal{K}_1$, K_2 и K — те же, что в § 6.

При исследовании нелокальных задач с параметром будем пользоваться нормами в весовых пространствах, зависящими от этого параметра. Вначале введем нормы функций, заданных в двугранном угле

$$\Theta = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : d_1 < \varphi < d_2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\} \tag{7.1}$$

и на полуплоскости

$$\Gamma = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : \varphi = d',\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}, \quad d_1 \leqslant d' \leqslant d_2. \tag{7.2}$$

Введем пространство $V_a^k(\Theta) = H_a^k(\Theta) \cap H_a^0(\Theta)$ с нормой

$$|||u|||_{V_a^k(\Theta)} = \left(\|u\|^2_{H_a^k(\Theta)} + |p|^{2k}\|u\|^2_{H_a^0(\Theta)}\right)^{1/2} \quad \big(u \in V_a^k(\Theta)\big), \tag{7.3}$$

где $k \geqslant 0$ — целое.

Для целых $\nu \geqslant 0$ обозначим

$$\|\psi\|^2_{H_a^\nu(\Gamma)} = \sum_{|\alpha| \leqslant \nu} \int_\Gamma r^{2(a-\nu+|\alpha|)} |D^\alpha \psi|^2 \, d\Gamma.$$

Введем пространство $V_a^{k-1/2}(\Gamma) = H_a^{k-1/2}(\Gamma) \cap H_a^0(\Gamma)$ с нормой

$$|||\psi|||_{V_a^{k-1/2}(\Gamma)} = \left(\|\psi\|^2_{H_a^{k-1/2}(\Gamma)} + |p|^{2(k-1/2)}\|\psi\|^2_{H_a^0(\Gamma)}\right)^{1/2} \quad \big(\psi \in V_a^{k-1/2}(\Gamma),\ k \geqslant 1\big). \tag{7.4}$$

Теперь определим нормы функций, заданных в области Q и на многообразиях Γ_i. Положим [2)]

$$|||u|||_{H_a^k(Q)} = \left(\|u\|^2_{H_a^k(Q)} + |p|^{2k}\|u\|^2_{H_a^0(Q)}\right)^{1/2} \quad \big(u \in H_a^k(Q)\big),$$

$$|||\psi|||_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_i)} = \left(\|\psi\|^2_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_i)} + |p|^{2(k-1/2)}\|\psi\|^2_{H_a^0(\Gamma_i)}\right)^{1/2} \quad \big(\psi \in H_a^{k-1/2}(\Gamma_i),\ k \geqslant 1\big),$$

где

$$\|\psi\|^2_{H_a^0(\Gamma_i)} = \int_{\Gamma_i} \rho^{2a} |\psi|^2 \, d\Gamma_i$$

и $\rho(x)$ — функция из определения пространств $H_a^k(Q)$.

Введем также норму

$$|||f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} = \left(|||f_0|||^2_{H_a^l(Q)} + \sum_{i,\mu} |||f_{i\mu}|||^2_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\right)^{1/2} \quad \big(f = \{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)\big).$$

[2)] Мы не вводим пространств $V_a^k(Q) = H_a^k(Q) \cap H_a^0(Q)$ и $V_a^{k-1/2}(\Gamma_i) = H_a^{k-1/2}(\Gamma_i) \cap H_a^0(\Gamma_i)$, поскольку в случае ограниченной области Q они совпадают соответственно с $H_a^k(Q)$ и $H_a^{k-1/2}(\Gamma_i)$.

Лемма 7.1.

1. *Для всех* $u \in V_a^k(\Theta)$, $k \geqslant 2$ *целое*, $p \in \mathbb{R}^d$ *и целых* s, $0 < s < k$, *выполнено неравенство*
$$|p|^{k-s}\|u\|_{H_a^s(\Theta)} \leqslant c_1 |||u|||_{V_a^k(\Theta)}, \tag{7.5}$$
где Θ — *определенный в* (7.1) *двугранный угол и* $c_1 = c_1(k,s) > 0$ *не зависит от* u *и* p.
2. *Для всех* $u \in H_a^k(Q)$, $k \geqslant 2$ *целое*, $p \in \mathbb{R}^d$ *и целых* s, $0 < s < k$, *выполнено неравенство*
$$|p|^{k-s}\|u\|_{H_a^s(Q)} \leqslant c_2 |||u|||_{H_a^k(Q)}, \tag{7.6}$$
где $c_2 = c_2(k,s) > 0$ *не зависит от* u *и* p.

Доказательство. 1. Вначале докажем интерполяционное неравенство (7.5).

Пусть $\{\xi_l\}_{l=-\infty}^{+\infty}$ — такое разбиение единицы, подчиненное покрытию угла $\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2\}$ множествами $\theta_l = \{y \in \theta : 2^{l-1} < r < 2^{l+1}\}$, что
$$\left|D^\alpha \xi_l(y)\right| \leqslant k_\alpha 2^{-|\alpha| l}, \quad y \in \theta_l, \ l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{7.7}$$
где $k_\alpha > 0$ не зависит от l.

Обозначим $\Theta_l = \theta_l \times \mathbb{R}^{n-2}$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Используя соотношения (7.7) и тот факт, что $\operatorname{supp} \xi_l \cap \overline{\Theta_j} = \varnothing$ при $j \neq l-1, l, l+1$, нетрудно проверить, что
$$\|u\|_{H_a^s(\Theta)} \approx \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \|\xi_l u\|^2_{H_a^s(\Theta_l)} \right)^{1/2} \tag{7.8}$$
для $s = 0, 1, 2, \ldots$, где символ $\approx$ обозначает эквивалентность норм.

Пользуясь теоремой о продолжении функций из области с липшицевой границей в $\mathbb{R}^n$ и применяя интерполяционное неравенство в пространстве Соболева $W^k(\mathbb{R}^n)$ (см. [1, § 1]), получим
$$q^{2(k-s)}\|v\|^2_{W^s(\Theta_0)} \leqslant k_1 \left(\|v\|^2_{W^k(\Theta_0)} + q^{2k}\|v\|^2_{L_2(\Theta_0)} \right) \tag{7.9}$$
для всех $v \in W^k(\Theta_0)$ и $q > 0$, где $k_1 > 0$ не зависит от v и q.

Введем новые переменные $x' = 2^{-l}x$. Используя эквивалентность норм (7.8) и интерполяционное неравенство (7.9) с $q = |p|2^l$, а затем возвращаясь к переменным $x = 2^l x'$, имеем
$$|p|^{2(k-s)}\|u\|^2_{H_a^s(\Theta)} \leqslant k_2 |p|^{2(k-s)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{(2(a-s)+n)l} \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_{\Theta_0} \left| D^\alpha_{x'}(\xi_l u)(x') \right|^2 dx' \leqslant$$
$$\leqslant k_3 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{(2(a-k)+n)l} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_{\Theta_0} \left| D^\alpha_{x'}(\xi_l u)(x') \right|^2 dx' + |p|^{2k} 2^{2lk} \int_{\Theta_0} \left| (\xi_l u)(x') \right|^2 dx' \right) \leqslant$$
$$\leqslant k_4 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\|\xi_l u\|^2_{H_a^k(\Theta_l)} + |p|^{2k}\|\xi_l u\|^2_{H_a^0(\Theta_l)} \right),$$
где $k_2, k_3, k_4 > 0$ не зависят от u и p. Отсюда и из (7.8) следует неравенство (7.5).

2. Если функция u имеет компактный носитель, то из соотношения $u \in H_a^k(\Theta)$ вытекает, что $u \in V_a^k(\Theta)$. Поэтому, пользуясь разбиением единицы, интерполяционным неравенством (7.5) и интерполяционным неравенством типа (7.9) в пространствах Соболева, получим неравенство (7.6) для всех $u \in H_a^k(Q)$ и $p \in \mathbb{R}^d$. ■

Лемма 7.2.

1. *Для всех* $u \in V_a^1(\Theta)$ *и* $p \in \mathbb{R}^d$ *выполнено неравенство*

$$|p|^{1/2} \big\| u|_\Gamma \big\|_{H_a^0(\Gamma)} \leqslant c_1 |||u|||_{V_a^1(\Theta)}, \tag{7.10}$$

где Θ — *двугранный угол, определенный в* (7.1), Γ — *полуплоскость, определенная в* (7.2), *и* $c_1 > 0$ *не зависит от* u *и* p.

2. *Для всех* $u \in H_a^1(Q)$ *и* $p \in \mathbb{R}^d$ *выполнено неравенство*

$$|p|^{1/2} \big\| u|_{\Gamma_i} \big\|_{H_a^0(\Gamma_i)} \leqslant c_2 |||u|||_{H_a^1(Q)}, \tag{7.11}$$

где $c_2 > 0$ *не зависит от* u *и* p.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 7.1 достаточно проверить неравенство (7.10).

Обозначим $\Gamma_l = \{x = (y, z) \in \Gamma : 2^{l-1} < r < 2^{l+1}\}$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Пусть ξ_l — те же функции, что в доказательстве леммы 7.1.

Аналогично (7.8) имеем

$$\big\| u|_\Gamma \big\|_{H_a^0(\Gamma)} \approx \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \big\| (\xi_l u)|_{\Gamma_l} \big\|^2_{H_a^0(\Gamma_l)} \right)^{1/2}, \tag{7.12}$$

где символ $\approx$ обозначает эквивалентность норм.

Пользуясь теоремой о продолжении функций из области с липшицевой границей в $\mathbb{R}^n$ и применяя интерполяционное неравенство в пространстве Соболева $W^1(\mathbb{R}^n)$ (см. [1, § 1]), получим

$$q \big\| v|_{\Gamma_0} \big\|^2_{L_2(\Theta_0)} \leqslant k_1 \big(\|v\|^2_{W^1(\Theta_0)} + q^2 \|v\|^2_{L_2(\Theta_0)} \big) \tag{7.13}$$

для всех $v \in W^1(\Theta_0)$ и $q > 0$, где $k_1 > 0$ не зависят от v и q.

Введем новые переменные $x' = 2^{-l}x$. Используя эквивалентность норм (7.12) и интерполяционное неравенство (7.13) с $q = |p|2^l$, а затем возвращаясь к переменным $x = 2^l x'$, имеем

$$|p| \cdot \big\| u|_\Gamma \big\|^2_{H_a^0(\Gamma)} \leqslant k_2 |p| \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{(2a+n-1)l} \int\limits_{\Gamma_0} \big| (\xi_l u)(x')|_{\Gamma_0} \big|^2 \, d\Gamma_0 \leqslant$$

$$\leqslant k_3 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{(2a+n-2)l} \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant 1} \int\limits_{\Theta_0} \big| D^\alpha_{x'} (\xi_l u)(x') \big|^2 \, dx' + |p|^2 2^{2l} \int\limits_{\Theta_0} \big| (\xi_l u)(x') \big|^2 \, dx' \right\} \leqslant$$

$$\leqslant k_4 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \big(\|\xi_l u\|^2_{H_a^1(\Theta_l)} + |p|^2 \|\xi_l u\|^2_{H_a^0(\Theta_l)} \big),$$

где $k_2, k_3, k_4 > 0$ не зависят от u и p. Отсюда и из (7.8) вытекает неравенство (7.10). ■

Из лемм 7.1 и 7.2, в частности, следует, что

$$|||u|_\Gamma|||_{V_a^{k-1/2}(\Gamma)} \leqslant c|||u|||_{V_a^k(\Theta)}, \tag{7.14}$$

$$|||u|_{\Gamma_i}|||_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant C|||u|||_{H_a^k(Q)}, \tag{7.15}$$

где $c, C > 0$ не зависят от u и p.

Лемма 7.3. *Для всех $\psi \in V_a^{k-1/2}(\Gamma)$, $k \geqslant 2$ целое, $p \in \mathbb{R}^d$ и целых s, $0 < s < k$, выполнено неравенство*

$$|p|^{k-s-1/2}\|\psi\|_{H_a^s(\Gamma)} \leqslant c|||\psi|||_{V_a^{k-1/2}(\Gamma)}, \tag{7.16}$$

где Γ — полуплоскость, определенная соотношением (7.2), *и $c > 0$ не зависит от ψ и p.*

Доказательство. Доказательство основано на следующем интерполяционном неравенстве для пространств Соболева в $\mathbb{R}^{n-1}$ (см. [1, § 1]):

$$q^{2(k-s-1/2)}\|v\|^2_{W^s(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant k_1\big(\|v\|^2_{W^{k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} + q^{2(k-1/2)}\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}\big) \tag{7.17}$$

для всех $v \in W^{k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, $q > 0$ и целых s, $0 < s < k$, где $k_1 > 0$ не зависит от v и q. Будем использовать следующую эквивалентную норму в пространстве $W^{k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$\left(\sum_{|\alpha|=k-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \big|D^\alpha v(x_1) - D^\alpha v(x_2)\big|^2 \frac{dx_1\,dx_2}{|x_1-x_2|^n} + \sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |D^\alpha v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \tag{7.18}$$

(см., например, [24]).

Обозначим $\Gamma_l = \{x = (y,z) \in \Gamma : 2^{l-1} < r < 2^{l+1}\}$, $l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Пусть ξ_l — те же функции, что в доказательствах лемм 7.1 и 7.2.

Используя соотношения (7.7) и тот факт, что $\operatorname{supp}\xi_l \cap \overline{\Theta_j} = \varnothing$ для $j \neq l-1, l, l+1$, нетрудно проверить, что

$$\|\psi\|_{H_a^s(\Gamma)} \approx \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\|\xi_l\psi\|^2_{H_a^s(\Gamma_l)}\right)^{1/2} \tag{7.19}$$

для $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$, где символ $\approx$ обозначает эквивалентность норм (см., в частности, лемму 1.1 в [17] для нецелых s).

Далее, вводя новые переменные $x' = 2^{-l}x$ и пользуясь эквивалентностью норм (7.19), интерполяционным неравенством (7.17) с $q = |p|2^l$ и эквивалентной нормой (7.18) в пространстве Соболева (напомним, что функции ξ_l имеют компактный носитель), получим

$$|p|^{2(k-s-1/2)}\|\psi\|^2_{H_a^s(\Gamma)} \leqslant$$

$$\leqslant k_2\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{2l(a-k+1/2)}2^{l(n-1)}\cdot|p|^{2(k-s-1/2)}2^{2l(k-s-1/2)}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int\limits_{\Gamma_0}\big|D^\alpha_{x'}(\xi_l\psi)(x')\big|^2\,dx' \leqslant$$

$$\leqslant k_3\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{2l(a-k+1/2)}2^{l(n-1)}\Bigg(\sum_{|\alpha|=k-1}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma\big|D^\alpha_{x'}(\xi_l\psi)(x_1') - D^\alpha_{x'}(\xi_l\psi)(x_2')\big|^2\frac{dx_1'\,dx_2'}{|x_1'-x_2'|^n} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\int\limits_{\Gamma_0}\big|D^\alpha_{x'}(\xi_l\psi)(x')\big|^2\,dx' + |p|^{2(k-1/2)}2^{2l(k-1/2)}\int\limits_{\Gamma_0}\big|(\xi_l\psi)(x')\big|^2\,dx'\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant k_4 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2^{2l(a-k+1/2)} 2^{l(n-1)} \Biggl(\sum_{|\alpha|=k-1} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \bigl| |y_1'|^a D^\alpha_{x'}(\xi_l\psi)(x_1') -$$
$$- |y_2'|^a D^\alpha_{x'}(\xi_l\psi)(x_2') \bigr|^2 \frac{dx_1'\,dx_2'}{|x_1'-x_2'|^n} + \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \int\limits_{\Gamma_0} |y'|^{2(a+|\alpha|-k+1/2)} \bigl| D^\alpha_{x'}(\xi_l\psi)(x') \bigr|^2\,dx' +$$
$$+ |p|^{2(k-1/2)} 2^{2l(k-1/2)} \int\limits_{\Gamma_0} |y'|^{2a} \bigl| (\xi_l\psi)(x') \bigr|^2\,dx' \Biggr),$$

где $k_2, k_3, \ldots > 0$ не зависят от ψ и p, $x_i' = (y_i', z_i') \in \Gamma$, $y_i' \in \mathbb{R}^2$ и $z_i' \in \mathbb{R}^{n-2}$, $i = 1, 2$. В последнем неравенстве мы использовали также тот факт, что $\operatorname{supp}\xi_l \cap \overline{Q_j} = \varnothing$ при $j \neq l-1, l, l+1$. Возвращаясь к переменным $x = 2^l x'$, имеем

$$|p|^{2(k-s-1/2)} \|\psi\|^2_{H_a^s(\Gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant k_5 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Biggl(\sum_{|\alpha|=k-1} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \bigl| |y_1|^a D^\alpha(\xi_l\psi)(x_1) - |y_2|^a D^\alpha(\xi_l\psi)(x_2) \bigr|^2 \frac{dx_1\,dx_2}{|x_1-x_2|^n} +$$
$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \int\limits_{\Gamma_l} |y|^{2(a+|\alpha|-k+1/2)} \bigl| D^\alpha(\xi_l\psi)(x) \bigr|^2\,dx + |p|^{2(k-1/2)} \int\limits_{\Gamma_l} |y|^{2a} \bigl| (\xi_l\psi)(x) \bigr|^2\,dx \Biggr),$$

где $x_i = (y_i, z_i) \in \Gamma$, $y_i \in \mathbb{R}^2$ и $z_i \in \mathbb{R}^{n-2}$, $i = 1, 2$. Из этого неравенства и леммы 1.3 в [17] (об эквивалентных нормах в следовых пространствах с весом) следует оценка

$$|p|^{2(k-s-1/2)} \|\psi\|^2_{H_a^s(\Gamma)} \leqslant k_6 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \bigl(\|\xi_l\psi\|^2_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_l)} + |p|^{2(k-1/2)} \|\xi_l\psi\|^2_{H_a^0(\Gamma_l)} \bigr). \tag{7.20}$$

Объединяя (7.20) и (7.19), получаем требуемое неравенство (7.16). ■

7.2. Рассмотрим дифференциальные операторы

$$A^0(p) \equiv A^0(x, D, p) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}(x) p^\beta D^\alpha,$$
$$B^0_{i\mu s}(p) \equiv B^0_{i\mu s}(x, D, p) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m_{i\mu}} b_{i\mu s\alpha\beta}(x) p^\beta D^\alpha,$$

где $a_{\alpha\beta}, b_{i\mu s\alpha\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначные функции ($i = 1, \ldots, N_0$; $\mu = 1, \ldots, m$; $s = 0, \ldots, S_i$), $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$, $|\beta| = |\beta_1| + \ldots + |\beta_d|$, $p^\beta = p_1^{\beta_1} \ldots p_d^{\beta_d}$ и $m_{i\mu} \leqslant 2m-1$.

Будем изучать следующую нелокальную эллиптическую задачу:

$$A(p)u \equiv A^0(p)u + A^1(p)u = f_0(x), \quad x \in Q, \tag{7.21}$$

$$B_{i\mu}(p)u \equiv \sum_{j=0}^{3} B^j_{i\mu}(p)u = f_{i\mu}(x), \quad x \in \Gamma_i; \quad i = 1, \ldots, N_0; \quad \mu = 1, \ldots, m. \tag{7.22}$$

Здесь

$$B^0_{i\mu}(p)u = B^0_{i\mu 0}(p)u\bigr|_{\Gamma_i}, \quad B^1_{i\mu}(p)u = \sum_{s=1}^{S_i} \bigl(B^0_{i\mu s}(x, D, p)(\xi u) \bigr) \bigl(\omega_{is}(x) \bigr) \bigr|_{\Gamma_i},$$

функция ξ и преобразования ω_{is} — те же, что в § 6. В частности, мы считаем выполненными условия 1.3 и 1.4.

Введем переменную $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ и формально заменим в операторах $A^0(x, D_x, p)$ и $B^0_{i\mu 0}(x, D_x, p)$ выражения p^β на дифференциальные операторы D_t^β. Пусть выполнены следующие условия (ср. [1, 17]).

Условие 7.1. *Оператор $A^0(x, D_x, D_t)$ правильно эллиптичен при $(x, t) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^d$.*

Условие 7.2. *Система операторов $\{B^0_{i\mu 0}(x, D_x, D_t)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $A^0(x, D_x, D_t)$ и является нормальной для всех $i = 1, \dots, N_0$ и $(x, t) \in \overline{\Gamma_i} \times \mathbb{R}^d$.*

Предположим, что операторы $A^1(p)$, $B^2_{i\mu}(p)$ и $B^3_{i\mu}(p)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 7.3 (малость возмущений). *Выполнены неравенства*

$$|||A^1(p)u|||_{H^l_a(Q)} \leqslant c_1 |||u|||_{H^{l+2m-1}_a(Q)},$$

$$|||B^3_{i\mu}(p)u|||_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_2 |||u|||_{H^{l+2m-1}_a(Q)},$$

где $i = 1, \dots, N_0$, $\mu = 1, \dots, m$ и $c_1, c_2 > 0$ не зависят от u и p.

Условие 7.4 (отделимость от точек сопряжения). *Существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$, что*

$$|||B^2_{i\mu}(p)u|||_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_1 |||u|||_{H^{l+2m}_a(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa_1}})} \tag{7.23}$$

для всех $u \in H^{l+2m}_a(Q \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa_1}})$ и

$$|||B^2_{i\mu}(p)u|||_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa_2}})} \leqslant c_2 |||u|||_{H^{l+2m}_a(Q_\sigma)} \tag{7.24}$$

для всех $u \in H^{l+2m}_a(Q_\sigma)$; здесь $i = 1, \dots, N_0$; $\mu = 1, \dots, m$; $c_1, c_2 > 0$ не зависят от u и p.

Замечание 7.1. 1. Из условия 7.3 и леммы 7.1 вытекает, что

$$|||A^1(p)u|||_{H^l_a(Q)} \leqslant c_1 |p|^{-1} |||u|||_{H^{l+2m}_a(Q)},$$

$$|||B^3_{i\mu}(p)u|||_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant c_2 |p|^{-1} |||u|||_{H^{l+2m}_a(Q)}.$$

Следовательно, при больших значениях $|p|$ нормы операторов $A^1(p)$ и $B^3_{i\mu}(p)$ малы.

2. Условие 7.4 представляет собой аналог условия 6.2.

Замечание 7.2. Пусть преобразования ω_{is} и множество K — те же, что в §§ 1–5. Рассмотрим задачу

$$\sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant 2m} a_{\alpha\beta}(x) p^\beta D^\alpha u(x) = f_0(x), \quad x \in Q,$$

$$\sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant m_{i\mu}} \sum_{s=0}^{S_i} b_{i\mu s\alpha\beta}(\omega_{is}(x)) p^\beta (D^\alpha u)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i} = f_{i\mu}(x), \quad x \in \Gamma_i;$$

$$i = 1, \dots, N_0; \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Эта задача представима в виде (7.21), (7.22). Действительно, положим

$$A^0(p) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}(x)p^\beta D^\alpha,$$

$$A^1(p) = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant 2m-1} a_{\alpha\beta}(x)p^\beta D^\alpha,$$

$$B^0_{i\mu}(p)u = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m_{i\mu}} b_{i\mu 0\alpha\beta}(x)p^\beta D^\alpha u\big|_{\Gamma_i},$$

$$B^1_{i\mu}(p)u = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m_{i\mu}} \sum_{s=1}^{S_i} b_{i\mu s\alpha\beta}(\omega_{is}(x))p^\beta (D^\alpha(\xi u))(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i},$$

$$B^2_{i\mu}(p)u = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m_{i\mu}} \sum_{s=1}^{S_i} b_{i\mu s\alpha\beta}(\omega_{is}(x))p^\beta \big(D^\alpha((1-\xi)u)\big)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i},$$

$$B^3_{i\mu}(p)u = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant m_{i\mu}-1} \sum_{s=0}^{S_i} b_{i\mu s\alpha\beta}(\omega_{is}(x))p^\beta (D^\alpha u)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i}.$$

Очевидно, оператор $A^1(p)$ удовлетворяет условию 7.3.

Пусть $s = 0, \ldots, S_i$ и $|\alpha| + |\beta| \leqslant m_{i\mu} - 1$. Обозначим через u_1 продолжение функции u в $Q \cup \omega_{is}(\Omega_i)$, определенное в лемме 4.4 и удовлетворяющее неравенствам

$$\|u_1\|_{H^\nu_a(Q\cup\omega_{is}(\Omega_i))} \leqslant k_1\|u\|_{H^\nu_a(Q)}, \quad \nu = 0, \ldots, l + 2m - 1. \tag{7.25}$$

Очевидно,

$$b_{i\mu s\alpha\beta}(\omega_{is}(x))p^\beta (D^\alpha u)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i} = b_{i\mu s\alpha\beta}(\omega_{is}(x))p^\beta (D^\alpha u_1)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i}.$$

Следовательно, используя (7.15) и (7.25), получим

$$\Big|\!\Big|\!\Big| b_{i\mu s\alpha\beta}(\omega_{is}(x))p^\beta (D^\alpha u)(\omega_{is}(x))\big|_{\Gamma_i} \Big|\!\Big|\!\Big|_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant \leqslant k_2 |\!|\!| u_1 |\!|\!|_{H_a^{l+2m-1}(\omega_{is}(\Omega_i))} \leqslant k_3 |\!|\!| u |\!|\!|_{H_a^{l+2m-1}(Q)}$$

для α и β таких, что $|\alpha| + |\beta| \leqslant m_{i\mu} - 1$. Отсюда вытекает, что операторы $B^3_{i\mu}(p)$ удовлетворяют условию 7.3.

Чтобы доказать, что операторы $B^2_{i\mu}(p)$ удовлетворяют условию 7.4, нужно повторить доказательство леммы 4.6, заменяя в нем нормы $\|\cdot\|$ нормами $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ и учитывая неравенство (7.15).

Рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$\mathbf{L}^0(p), \mathbf{L}^1(p), \mathbf{L}(p) : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma),$$

заданные формулами

$$\mathbf{L}^0(p) = \big\{A(p), B^0_{i\mu}(p)\big\}, \quad \mathbf{L}^1(p) = \big\{A(p), B^0_{i\mu}(p) + B^1_{i\mu}(p)\big\}, \quad \mathbf{L}(p) = \big\{A(p), B_{i\mu}(p)\big\}.$$

Обратимость оператора $\mathbf{L}^0(p)$ доказана в [17]. Наша цель — изучить оператор $\mathbf{L}^1(p)$ и затем $\mathbf{L}(p)$. Вначале рассмотрим модельные задачи с параметром, соответствующие точкам множеств $\mathcal{K}_1$ и K_2.

7.3. Зафиксируем точку $g \in \mathcal{K}_1$. Повторяя рассуждения из § 1, приходим к следующей модельной задаче (ср. (1.9), (1.10)):

$$A_j(x, D_y, D_z, p)v_j(x) = f_j(x), \quad x \in \Theta_j; \quad j = 1, \dots, N, \tag{7.26}$$

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=0}^{S_{j\rho k}} \big(B_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z, p)v_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y, z)\big|_{\Gamma_{j\rho}} = f_{j\rho\mu}(x), \quad x \in \Gamma_{j\rho};\\ j = 1, \dots, N; \quad \rho = 1, 2; \quad \mu = 1, \dots, m,\end{gathered} \tag{7.27}$$

где $A_j(x, D_y, D_z, p)$ и $B_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z, p)$ — дифференциальные операторы порядков $2m$ и $m_{j\rho\mu}$ соответственно с параметром p и переменными коэффициентами класса C^∞; множества Θ_j и $\Gamma_{j\rho}$ и операторы $\mathcal{G}_{j\rho ks}$ — те же, что в (1.9), (1.10).

Введем пространства вектор-функций

$$\mathcal{V}_a^k(\Theta) = \prod_{j=1}^{N} V_a^k(\Theta_j), \quad \mathcal{V}_a^l(\Theta, \Gamma) = \mathcal{V}_a^l(\Theta) \times \prod_{j=1}^{N}\prod_{\rho=1,2}\prod_{\mu=1}^{m} V_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho}),$$

где $m_{j\rho\mu}$ — порядок оператора $B_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z, p)$. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}_g(p) : \mathcal{V}_a^{l+2m}(\Theta) \to \mathcal{V}_a^l(\Theta, \Gamma)$, действующий по формуле

$$\mathcal{L}_g(p)v = \left\{A_j(D_y, D_z, p)v_j(y, z),\ \sum_{k,s} \big(B_{j\rho\mu ks}(D_y, D_z, p)v_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y, z)\big|_{\Gamma_{j\rho}}\right\}, \tag{7.28}$$

где $A_j(D_y, D_z, p)$ и $B_{j\rho\mu ks}(D_y, D_z, p)$ — главные однородные части[3)] операторов $A_j(0, D_y, D_z, p)$ и $B_{j\rho\mu ks}(0, D_y, D_z, p)$ соответственно. Очевидно, после замены p^β на D_t^β каждый из получившихся операторов $A_j(D_y, D_z, D_t)$ правильно эллиптичен при $(x, t) \in \overline{\Theta_j} \times \mathbb{R}^d$, а система операторов $\{B_{j\rho\mu j0}(D_y, D_z, D_t)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $A_j(D_y, D_z, D_t)$ и является нормальной при всех $(x, t) \in \Gamma_{j\rho} \times \mathbb{R}^d$, $j = 1, \dots, N$ и $\rho = 1, 2$.

Кроме того, рассмотрим оператор

$$\mathcal{L}'_g(p)v = \left\{A_j^0(x, D_y, D_z, p)v_j(y, z),\ \sum_{k,s} \big(B^0_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z, p)v_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y, z)\big|_{\Gamma_{j\rho}}\right\},$$

где $A_j^0(x, D_y, D_z, p)$ и $B^0_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z, p)$ — главные однородные части операторов $A_j(x, D_y, D_z, p)$ и $B_{j\rho\mu ks}(x, D_y, D_z, p)$ соответственно.

Положим

$$\mathcal{L}_g(\eta, p)V = \left\{A_j(D_y, \eta, p)V_j(y),\ \sum_{k,s} \big(B_{j\rho\mu ks}(D_y, \eta, p)V_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y)\big|_{\Gamma_{j\rho}}\right\}, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-2}.$$

Заменяя (η, p) на $\omega = (\eta, p)/|(\eta, p)|$, получим ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_g(\omega) : \mathcal{E}_a^{l+2m}(\theta) \to \mathcal{E}_a^l(\theta, \gamma),$$

[3)] В этом параграфе понятие «главной однородной части» включает в себя наличие параметра p; так, оператор $A_j(D_y, D_z, p)$ состоит из слагаемых вида $a_{j\alpha\beta}(x)p^\beta D^\alpha$, где $|\alpha| + |\beta| = 2m$.

действующий по формуле

$$\mathcal{L}_g(\omega)V = \Big\{A_j(D_y,\omega)V_j(y),\ \sum_{k,s}\big(B_{j\rho\mu ks}(D_y,\omega)V_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y)\big|_{\Gamma_{j\rho}}\Big\},\quad \omega\in S^{n+d-3}. \tag{7.29}$$

Наконец, рассмотрим аналитическую оператор-функцию

$$\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda):\mathcal{W}^{l+2m}(d_1,d_2)\to\mathcal{W}^l[d_1,d_2],$$

заданную формулой (2.2).

В этом пункте мы докажем, что отсутствие собственных значений оператор-функции $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ и тривиальность ядра и коядра оператора $\mathcal{L}_g(\omega)$ гарантируют существование ограниченных обратных операторов $\mathcal{L}_g^{-1}(p)$ для $p\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, равномерно ограниченных в соответствующих нормах $|||\cdot|||$. Эти нормы введем следующим образом:

$$|||u|||_{\mathcal{V}_a^k(\Theta)} = \Big(\sum_j |||u|||^2_{V_a^k(\Theta_j)}\Big)^{1/2},$$

$$|||f|||_{\mathcal{V}_a^l(\Theta,\Gamma)} = \Big(\sum_j |||f_j|||^2_{V_a^l(\Theta_j)} + \sum_{j,\rho,\mu}|||f_{j\rho\mu}|||^2_{V_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_j)}\Big)^{1/2},\quad f=\{f_j,f_{j\rho\mu}\}.$$

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* 7.1, 7.2, 1.3 *и* 1.4. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *и* $\dim\mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega)) = \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega)) = 0$ *для любого* $\omega\in S^{n+d-3}$. *Тогда оператор* $\mathcal{L}_g(p)$ *является изоморфизмом для* $p\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ *и*

$$|||u|||_{\mathcal{V}_a^{l+2m}(\Theta)} \leqslant c|||\mathcal{L}_g(p)u|||_{\mathcal{V}_a^l(\Theta,\Gamma)},\quad p\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}, \tag{7.30}$$

где $c>0$ *не зависит от* u *и* p.

Для доказательства теоремы 7.1 рассмотрим вначале оператор

$$\mathcal{L}_g(p):\mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta)\to\mathcal{E}_a^l(\Theta,\Gamma),$$

заданный формулой (7.28) при $p\in S^{d-1}$, где

$$\mathcal{E}_a^k(\Theta) = \prod_{j=1}^N E_a^k(\Theta_j),\quad \mathcal{E}_a^l(\Theta,\Gamma) = \mathcal{E}_a^l(\Theta)\times\prod_{j=1}^N\prod_{\rho=1,2}\prod_{\mu=1}^m E_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho}),$$

пространство $E_a^k(\Theta_j)$ определено как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{\Theta_j}\setminus\{0\})$ по норме

$$\|v\|_{E_a^k(\Theta_j)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_{\Theta_j}|y|^{2a}\big(|y|^{2(|\alpha|-k)}+1\big)\big|D_x^\alpha v(x)\big|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

и $E_a^{k-1/2}(\Gamma_{j\rho})$ ($k\geqslant 1$ целое) — пространство следов на $\Gamma_{j\rho}$ с нормой

$$\|\psi\|_{E_a^{k-1/2}(\Gamma_{j\rho})} = \inf\|v\|_{E_a^k(\Theta_j)}\quad\big(v\in E_a^k(\Theta_j): v|_{\Gamma_{j\rho}}=\psi\big).$$

Лемма 7.4. *Пусть выполнены условия* 7.2, 1.3 *и* 1.4, *и пусть* $f_{j\rho\mu} \in E_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})$. *Тогда существует такая функция* $u \in \mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta)$, *что*

$$\sum_{k,s} \big(B_{j\rho\mu ks}(D_y, D_z, p)u_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y, z)\big|_{\Gamma_{j\rho}} = f_{j\rho\mu}, \quad p \in S^{d-1},$$

$$\|u\|_{\mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta)} \leqslant c \sum_{j,\rho,\mu} \|f_{j\rho\mu}\|_{E_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})}, \quad p \in S^{d-1},$$

где $c > 0$ *не зависит от* u *и* p.

Доказательство. По лемме 9.2′ в [17] существует такая функция

$$v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta),$$

что $B_{j\rho\mu j0}(D_y, D_z, p)v_j\big|_{\Gamma_{j\rho}} = f_{j\rho\mu}$ и

$$\|v\|_{\mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta)} \leqslant k_1 \sum_{j,\rho,\mu} \|f_{j\rho\mu}\|_{E_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})}, \quad p \in S^{d-1}.$$

Пусть d_0 — число, определенное в (5.21). Рассмотрим функции $\xi_k \in C^\infty(\mathbb{R})$, зависящие от полярного угла φ точки $y \in \mathbb{R}^2$, такие, что $\xi_k(\varphi) = 1$ при $d_{k1} \leqslant \varphi \leqslant d_{k1} + d_0/2$ и $d_{k2} - d_0/2 \leqslant \varphi \leqslant d_{k2}$ и $\xi_k(\varphi) = 0$ при $d_{k1} + d_0 \leqslant \varphi \leqslant d_{k2} - d_0$.

Так как оператор умножения на функцию ξ_j ограничен в весовом пространстве $E_a^{l+2m}(\Theta_j)$, то $u = (\xi_1 v_1, \dots, \xi_N v_N)$ и есть искомая функция. ∎

Лемма 7.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.1. *Тогда оператор*

$$\mathcal{L}_g(p) : \mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta) \to \mathcal{E}_a^l(\Theta, \Gamma)$$

является изоморфизмом для $p \in S^{d-1}$ *и*

$$\|u\|_{\mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta)} \leqslant c\|\mathcal{L}_g(p)u\|_{\mathcal{E}_a^l(\Theta,\Gamma)}, \quad p \in S^{d-1},$$

где $c > 0$ *не зависит от* u *и* p.

Доказательство. 1. В силу леммы 7.4 достаточно установить однозначную разрешимость задачи

$$A_j(D_y, D_z, p)u_j(y, z) = f_j(y, z), \quad (y, z) \in \Theta_j, \tag{7.31}$$

$$\sum_{k,s} \big(B_{j\rho\mu ks}(D_y, D_z, p)u_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y, z)\big|_{\Gamma_{j\rho}} = 0 \tag{7.32}$$

и показать, что

$$\|u\|_{\mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta)} \leqslant k_1\big\|\{f_j\}\big\|_{\mathcal{E}_a^l(\Theta)}, \quad p \in S^{d-1},$$

где $k_1 > 0$ не зависит от u и p.

2. Делая преобразование Фурье по переменной z, видим, что задача (7.31), (7.32) эквивалентна следующей:

$$A_j(D_y, \eta, p)\widetilde{u}_j(y, \eta) = \widetilde{f}_j(y, \eta), \quad y \in \theta_j, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-2}, \tag{7.33}$$

$$\sum_{k,s} \big(B_{j\rho\mu ks}(D_y, \eta, p)\widetilde{u}_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y, \eta)\big|_{\gamma_{j\rho}} = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-2}, \tag{7.34}$$

где $\widetilde{u}_j(y, \eta)$ — преобразование Фурье функции $u_j(y, z)$ по переменной z.

Обозначим
$$\widetilde{u}_j(y,\eta)=|(\eta,p)|^{-2m}U_j\big(|(\eta,p)|y,\eta\big) \quad \text{и} \quad \widetilde{f}_j(y,\eta)=F_j\big(|(\eta,p)|y,\eta\big).$$
Тогда задача (7.33), (7.34) примет вид
$$A_j(D_Y,\omega)U_j(Y,\eta)=F_j(Y,\eta), \quad y\in\theta_j, \quad \eta\in\mathbb{R}^{n-2}, \tag{7.35}$$
$$\sum_{k,s}\big(B_{j\rho\mu ks}(D_Y,\omega)U_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}Y,\eta)\big|_{\gamma_{j\rho}}=0, \quad \eta\in\mathbb{R}^{n-2}, \tag{7.36}$$
где
$$\omega=\frac{(\eta,p)}{|(\eta,p)|}\in S^{n+d-3} \quad \text{и} \quad Y=|(\eta,p)|y.$$

Из условий леммы и из теоремы 2.1 следует, что задача (7.35), (7.36) имеет единственное решение $U\in\mathcal{E}_a^{l+2m}(\theta)$ для любой правой части $\{F_j\}\in\mathcal{E}_a^l(\theta)$ и
$$\|U\|_{\mathcal{E}_a^{l+2m}(\theta)}\leqslant k_2\big\|\{F_j\}\big\|_{\mathcal{E}_a^l(\theta)}, \quad \omega\in S^{n+d-3},$$
где $k_2>0$ не зависит от u и ω.

Таким образом, лемма будет доказана, если мы покажем, что
$$\big\|\{f_j\}\big\|^2_{\mathcal{E}_a^l(\Theta)}\approx\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}|(\eta,p)|^{-2(a-l+1)}\big\|\{F_j(\cdot,\eta)\}\big\|^2_{\mathcal{E}_a^l(\theta)}\,d\eta, \tag{7.37}$$
$$\|u\|^2_{\mathcal{E}_a^{l+2m}(\Theta)}\approx\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}|(\eta,p)|^{-2(a-l+1)}\big\|U(\cdot,\eta)\big\|^2_{\mathcal{E}_a^{l+2m}(\theta)}\,d\eta; \tag{7.38}$$
здесь символ $\approx$ между двумя выражениями означает, что первое выражение оценивается снизу и сверху через второе выражение, умноженное на некоторую положительную константу, не зависящую от $p\in S^{d-1}$.

3. Докажем соотношение (7.37). Используя равенство Парсеваля, имеем
$$\|f_j\|^2_{E_a^l(\Theta_j)}=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant l}\int\limits_{\theta_j}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}|y|^{2a}\big(|y|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)}+1\big)\big|D_y^\alpha D_z^\beta f_j(y,z)\big|^2\,dy\,dz=$$
$$=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant l}\int\limits_{\theta_j}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}|y|^{2a}\big(|y|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)}+1\big)|\eta^\beta|^2\big|D_y^\alpha\widetilde{f}_j(y,\eta)\big|^2\,dy\,d\eta.$$
Пользуясь теоремой Фубини и делая замену переменных $Y=|(\eta,p)|y$ при каждом фиксированном η, получим
$$\|f_j\|^2_{E_a^l(\Theta_j)}=\sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant l}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}\int\limits_{\theta_j}|(\eta,p)|^{-2(a+1-|\alpha|)}|Y|^{2a}\times$$
$$\times\big(|(\eta,p)|^{-2(|\alpha|+|\beta|-l)}|Y|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)}+1\big)|\eta^\beta|^2\big|D_Y^\alpha F(Y,\eta)\big|^2\,dY\,d\eta=$$
$$=\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sum_{\nu=0}^{l-|\alpha|}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}\int\limits_{\theta_j}\Phi_{\alpha\nu}(\eta,p,Y)\big|D_Y^\alpha F(Y,\eta)\big|^2\,dY\,d\eta, \tag{7.39}$$

где

$$\Phi_{\alpha\nu}(\eta, p, Y) = \sum_{|\beta|=\nu} |(\eta, p)|^{-2(a-l+1)} |Y|^{2a} \frac{|\eta^\beta|^2}{|(\eta, p)|^{2|\beta|}} \big(|Y|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)} + |(\eta, p)|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)}\big).$$

Заметим, что $p \in S^{d-1}$ и $|\alpha| + |\beta| - l \leqslant 0$, откуда

$$|(\eta, p)|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)} \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$|Y|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)} + |(\eta, p)|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)} \leqslant |Y|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)} + 1. \tag{7.40}$$

Далее, поскольку $p \in S^{d-1}$, то

$$\sum_{|\beta|=\nu} \frac{|\eta^\beta|^2}{|(\eta, p)|^{2|\beta|}} \leqslant k_3, \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad p \in S^{d-1}, \quad \nu = 0, \dots, l, \tag{7.41}$$

где $k_3 > 0$ не зависит от η и p.

Из соотношений (7.39)–(7.41) вытекает, что

$$\|f_j\|^2_{E^l_a(\Theta_j)} \leqslant k_3 \sum_{|\alpha|\leqslant l} \sum_{\nu=0}^{l-|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} \int\limits_{\theta_j} |(\eta,p)|^{-2(a-l+1)} |Y|^{2a} \big(|Y|^{2(|\alpha|+\nu-l)} + 1\big) \big|D^\alpha_Y F_j(Y,\eta)\big|^2 \, dY\, d\eta. \tag{7.42}$$

Очевидно,

$$|Y|^{2(|\alpha|-l)} + 1 \leqslant \sum_{\nu=0}^{l-|\alpha|} |Y|^{2(|\alpha|+\nu-l)} \leqslant k_4\big(|Y|^{2(|\alpha|-l)} + 1\big), \quad Y \in \mathbb{R}^2, \tag{7.43}$$

где $k_4 > 0$ не зависит от Y.

Из неравенств (7.42) и (7.43) получаем

$$\|f_j\|^2_{E^l_a(\Theta_j)} \leqslant k_3 k_4 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} |(\eta, p)|^{-2(a-l+1)} \big\|F_j(\cdot, \eta)\big\|^2_{E^l_a(\theta_j)} \, d\eta. \tag{7.44}$$

Теперь оценим норму $\|f_j\|^2_{E^l_a(\Theta_j)}$ снизу. Для этого запишем ее в виде

$$\|f_j\|^2_{E^l_a(\Theta_j)} = \sum_{|\alpha|\leqslant l} \sum_{\nu=0}^{l-|\alpha|} \Bigg(\int\limits_{|\eta|<1} \int\limits_{\theta_j} \Phi_{\alpha\nu}(\eta, p, Y) \big|D^\alpha_Y F(Y, \eta)\big|^2 \, dY\, d\eta + \\ + \int\limits_{|\eta|>1} \int\limits_{\theta_j} \Phi_{\alpha\nu}(\eta, p, Y) \big|D^\alpha_Y F(Y, \eta)\big|^2 \, dY\, d\eta \Bigg). \tag{7.45}$$

Если $|\eta| < 1$, то

$$\sum_{\nu=0}^{l-|\alpha|} \sum_{|\beta|=\nu} \frac{|\eta^\beta|^2}{|(\eta, p)|^{2|\beta|}} \big(|Y|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)} + |(\eta, p)|^{2(|\alpha|+|\beta|-l)}\big) \geqslant \\ \geqslant |Y|^{2(|\alpha|-l)} + |(\eta, p)|^{2(|\alpha|-l)} \geqslant k_5\big(|Y|^{2(|\alpha|-l)} + 1\big),$$

где $k_5 > 0$ не зависит от Y, η и p. Следовательно,

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sum_{\nu=0}^{l-|\alpha|}\int\limits_{|\eta|<1}\int\limits_{\theta_j}\Phi_{\alpha\nu}(\eta,p,Y)\left|D_Y^\alpha F(Y,\eta)\right|^2\,dY\,d\eta \geqslant$$

$$\geqslant k_5\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int\limits_{|\eta|<1}\int\limits_{\theta_j}|(\eta,p)|^{-2(a-l+1)}|Y|^{2a}\big(|Y|^{2(|\alpha|-l)}+1\big)\left|D_Y^\alpha F(Y,\eta)\right|^2\,dY\,d\eta. \qquad (7.46)$$

Если $|\eta| > 1$, то

$$\sum_{|\beta|=\nu}\frac{|\eta^\beta|^2}{|(\eta,p)|^{2|\beta|}} \geqslant k_6, \quad p\in S^{d-1}, \quad \nu=0,\dots,l, \qquad (7.47)$$

где $k_6 > 0$ не зависит от η и p. Из (7.43) и (7.47) получим

$$\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sum_{\nu=0}^{l-|\alpha|}\int\limits_{|\eta|>1}\int\limits_{\theta_j}\Phi_{\alpha\nu}(\eta,p,Y)\left|D_Y^\alpha F(Y,\eta)\right|^2\,dY\,d\eta \geqslant$$

$$\geqslant k_6\sum_{|\alpha|\leqslant l}\sum_{\nu=0}^{l-|\alpha|}\int\limits_{|\eta|>1}\int\limits_{\theta_j}|(\eta,p)|^{-2(a-l+1)}|Y|^{2(a+|\alpha|+\nu-l)}\left|D_Y^\alpha F(Y,\eta)\right|^2\,dY\,d\eta \geqslant$$

$$\geqslant k_6\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int\limits_{|\eta|>1}\int\limits_{\theta_j}|(\eta,p)|^{-2(a-l+1)}|Y|^{2a}(|Y|^{2(|\alpha|-l)}+1)\left|D_Y^\alpha F(Y,\eta)\right|^2\,dY\,d\eta. \qquad (7.48)$$

Из неравенств (7.45), (7.46) и (7.48) следует, что

$$\|f_j\|^2_{E_a^l(\Theta_j)} \geqslant k_7\int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}}|(\eta,p)|^{-2(a-l+1)}\left\|F_j(\cdot,\eta)\right\|^2_{E_a^l(\theta_j)}\,d\eta, \qquad (7.49)$$

где $k_7 > 0$ не зависит от p.

Соотношение (7.37) вытекает из (7.44) и (7.49). Аналогично доказывается соотношение (7.38). ■

Теперь мы можем доказать теорему 7.1.

Доказательство теоремы 7.1. Легко видеть, что $u(x)$ будет решением задачи

$$A_j(D_y,D_z,p)u_j(y,z)=f_j(y,z), \quad (y,z)\in\Theta_j,$$

$$B_{j\rho\mu}(p)u \equiv \sum_{k,s}\big(B_{j\rho\mu ks}(D_y,D_z,p)u_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y,z)\big|_{\Gamma_{j\rho}} = f_{j\rho\mu}(y,z), \quad (y,z)\in\Gamma_{j\rho},$$

тогда и только тогда, когда функция $v(x)=u(|p|^{-1}x)$ является решением задачи

$$A_j\big(D_y,D_z,p|p|^{-1}\big)v_j(y,z)=|p|^{-2m}f_j\big(|p|^{-1}y,|p|^{-1}z\big), \quad (y,z)\in\Theta_j,$$

$$B_{j\rho\mu}(p|p|^{-1})v \equiv \sum_{k,s}\big(B_{j\rho\mu ks}(D_y,D_z,p|p|^{-1})v_k\big)(\mathcal{G}_{j\rho ks}y,z)\big|_{\Gamma_{j\rho}} =$$

$$=|p|^{-m_{j\rho\mu}}f_{j\rho\mu}\big(|p|^{-1}y,|p|^{-1}z\big), \quad (y,z)\in\Gamma_{j\rho},$$

где $p\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$.

Далее нам понадобятся следующие неравенства:

$$\|v_j\|^2_{E_a^{l+2m}(\Theta_j)} \geqslant |p|^{2a+n-2(l+2m)} |||u_j|||^2_{V_a^{l+2m}(\Theta_j)}, \quad p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{7.50}$$

$$\big\|A_j\big(D_y, D_z, p|p|^{-1}\big)v_j\big\|^2_{E_a^l(\Theta_j)} \leqslant k_1|p|^{2a+n-2(l+2m)} \big|\big|\big|A_j(D_y, D_z, p)u_j\big|\big|\big|^2_{V_a^l(\Theta_j)}, \quad p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{7.51}$$

$$\big\|B_{j\rho\mu}(p|p|^{-1})v\big\|^2_{E_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})} \leqslant k_2|p|^{2a+n-2(l+2m)} \big|\big|\big|B_{j\rho\mu}(p)u\big|\big|\big|^2_{V_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})}, \quad p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{7.52}$$

где $k_1, k_2 > 0$ не зависят от u и p. Для доказательства неравенства (7.50) введем новые переменные $x' = |p|^{-1}x$ и $y' = |p|^{-1}y$, где $x = (y, z)$, $x' = (y', z')$, $y, y' \in \mathbb{R}^2$ и $z, z' \in \mathbb{R}^{n-2}$. Тогда имеем

$$\|v_j\|^2_{E_a^{l+2m}(\Theta_j)} = \sum_{|\alpha|\leqslant l+2m} \int\limits_{\Theta_j} |y|^{2a}\big(|y|^{2(|\alpha|-l-2m)} + 1\big)\big|D_x^\alpha u_j(|p|^{-1}x)\big|^2\, dx =$$

$$= |p|^{2a+n-2(l+2m)} \sum_{|\alpha|\leqslant l+2m} \int\limits_{\Theta_j} |y'|^{2a}\big(|y'|^{2(|\alpha|-l-2m)} + |p|^{2(l+2m-|\alpha|)}\big)\big|D_{x'}^\alpha u_j(x')\big|^2\, dx' \geqslant$$

$$\geqslant |p|^{2a+n-2(l+2m)} |||u_j|||^2_{V_a^{l+2m}(\Theta_j)}.$$

Используя лемму 7.1, аналогично (7.50) получим (7.51).

Для доказательства неравенства (7.52) нужно воспользоваться эквивалентными нормами в пространствах $E_a^{k-1/2}(\Gamma_{j\rho})$ и $H_a^{k-1/2}(\Gamma_{j\rho})$, задаваемыми выражениями

$$\|u\|'_{E_a^{k-1/2}(\Gamma_{j\rho})} = \Bigg(\sum_{|\alpha|=k-1} \int\limits_{\Gamma_{j\rho}}\int\limits_{\Gamma_{j\rho}} \big||y_1|^a D^\alpha u(x_1) - |y_2|^a D^\alpha u(x_2)\big|^2 \frac{dx_1 dx_2}{|x_1 - x_2|^n} + \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \int\limits_{\Gamma_{j\rho}} |y|^{2a}(|y|^{2(|\alpha|-k+1/2)} + 1)|D^\alpha u(x)|^2\, dx\Bigg)^{1/2},$$

$$\|u\|'_{H_a^{k-1/2}(\Gamma_{j\rho})} = \Bigg(\sum_{|\alpha|=k-1} \int\limits_{\Gamma_{j\rho}}\int\limits_{\Gamma_{j\rho}} \big||y_1|^a D^\alpha u(x_1) - |y_2|^a D^\alpha u(x_2)\big|^2 \frac{dx_1 dx_2}{|x_1 - x_2|^n} + \sum_{|\alpha|\leqslant k-1} \int\limits_{\Gamma_{j\rho}} |y|^{2(a+|\alpha|-k+1/2)}|D^\alpha u(x)|^2\, dx\Bigg)^{1/2}$$

(см. леммы 9.1 и 1.3 в [17]), и леммой 7.3.

Теперь утверждение теоремы вытекает из леммы 7.5 и неравенств (7.50), (7.51) и (7.52). ■

Докажем аналог следствия 2.1. Введем линейный ограниченный оператор $\mathcal{L}''_g(p) : \mathcal{V}_a^{l+2m}(\Theta) \to \mathcal{V}_a^l(\Theta, \Gamma)$ по формуле

$$\mathcal{L}''_g(p)v = \mathcal{L}_g(p)v + \eta\big(\mathcal{L}'_g(p) - \mathcal{L}_g(p)\big)v,$$

где η — та же функция, что в п. 2.3.

Следствие 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.1. *Тогда оператор*

$$\mathcal{L}''_g(p) : \mathcal{V}_a^{l+2m}(\Theta) \to \mathcal{V}_a^l(\Theta, \Gamma)$$

— *изоморфизм при всех достаточно малых* $\delta > 0$ *и* $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *и*

$$|||u|||_{\mathcal{V}_a^{l+2m}(\Theta)} \leqslant c \big|\big|\big| \mathcal{L}''_g(p)u \big|\big|\big|_{\mathcal{V}_a^l(\Theta,\Gamma)}, \quad p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

где $c > 0$ *не зависит от* u *и* p.

Доказательство. По теореме 7.1 существует ограниченный оператор $\mathcal{L}_g^{-1}(p)$ и выполнена оценка (7.30). Имеем

$$\mathcal{L}''_g(p)\mathcal{L}_g^{-1}(p) = \mathcal{I} + \mathcal{M}(p),$$

где $\mathcal{I}$ — единичный оператор в пространстве $\mathcal{V}_a^l(\Theta, \Gamma)$ и

$$\mathcal{M}(p) = \eta\big(\mathcal{L}'_g(p) - \mathcal{L}_g(p)\big)\mathcal{L}_g^{-1}(p).$$

Из (7.14) следует, что

$$\big|\big|\big| u|_{\mathcal{G}_{j\rho ks}(\Gamma_i)} \big|\big|\big|_{V_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\mathcal{G}_{j\rho ks}(\Gamma_i))} \leqslant k_1 |||u|||_{V_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}}(\Theta_k)},$$

где $k_1, k_2, \ldots > 0$ не зависят от u и p. Следовательно, аналогично доказательству следствия 2.1 имеем

$$|||\mathcal{M}(p)f|||_{\mathcal{V}_a^l(\Theta,\Gamma)} \leqslant k_2\delta \big|\big|\big| \mathcal{L}_g^{-1}(p)f \big|\big|\big|_{\mathcal{V}_a^{l+2m}(\Theta)}.$$

Отсюда и из (7.30) получаем

$$|||\mathcal{M}(p)f|||_{\mathcal{V}_a^l(\Theta,\Gamma)} \leqslant k_3\delta |||f|||_{\mathcal{V}_a^l(\Theta,\Gamma)}.$$

Если $\delta > 0$ настолько мало, что $k_3\delta \leqslant 1/2$, то существует обратный оператор $(\mathcal{I}+\mathcal{M}(p))^{-1}$, ограниченный в нормах $|||\cdot|||_{\mathcal{V}_a^l(\Theta,\Gamma)}$ равномерно по параметру $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Очевидно, оператор $\mathcal{L}_g^{-1}(p)(\mathcal{I} + \mathcal{M}(p))^{-1}$ является правым обратным для оператора $\mathcal{L}''_g(p)$ и

$$\big|\big|\big| \mathcal{L}_g^{-1}(p)(\mathcal{I} + \mathcal{M}(p))^{-1} f \big|\big|\big|_{\mathcal{V}_a^{l+2m}(\Theta)} \leqslant k_4 |||f|||_{\mathcal{V}_a^l(\Theta,\Gamma)}, \quad p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Похожим образом доказывается существование левого обратного оператора для $\mathcal{L}''_g(p)$. ■

7.4. Теперь зафиксируем произвольную точку $g \in K_2$. Аналогично п. 1.4 рассмотрим следующий модельный оператор:

$$\mathcal{L}_g(p) : V_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n_+) \to \mathcal{V}_a^l(\mathbb{R}^n_+, \Gamma) = V_a^l(\mathbb{R}^n_+) \times V_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}_-) \times V_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}_+),$$

заданный формулой

$$\mathcal{L}_g(p)u = \Big(A(D_y, D_z, p)u,\ B_{i\mu 0}(D_y, D_z, p)u\big|_{\varphi=-\pi/2},\ B_{i\mu 0}(D_y, D_z, p)u\big|_{\varphi=\pi/2}\Big)$$

(ср. (1.16)). Будем считать, что пространство $V_a^{l+2m}(\mathbb{R}^n_+)$ снабжено нормой (7.3), а пространство $\mathcal{V}_a^l(\mathbb{R}^n_+, \Gamma)$ — нормой

$$|||f|||_{\mathcal{V}_a^l(\mathbb{R}^n_+,\Gamma)} = \Big(|||f_0|||^2_{V_a^l(\mathbb{R}^n_+)} + |||f_-|||^2_{V_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}_-)} + |||f_+|||^2_{V_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}_+)} \Big)^{1/2},$$

где $f = (f_0, f_-, f_+)$ и норма $|||f_\pm|||_{V_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}_\pm)}$ определена в (7.4).

Аналогично п. 2.5 рассмотрим линейный ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_g(\omega) : E_a^{l+2m}(\mathbb{R}_+^2) \to \mathcal{E}_a^l(\mathbb{R}_+^2, \gamma),$$

действующий по формуле

$$\mathcal{L}_g(\omega)V = \big(A(D_y, \omega)V,\ B_{i\mu 0}(D_y, \omega)V\big|_{\mathbb{R}_-},\ B_{i\mu 0}(D_y, \omega)V\big|_{\mathbb{R}_+}\big),$$

где $\omega = (\eta, p)/|(\eta, p)| \in S^{n+d-3}$ (ср. (2.26) и (7.29)).

Наконец, рассмотрим аналитическую оператор-функцию

$$\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda) : W^{l+2m}(-\pi/2, \pi/2) \to \mathcal{W}^l[-\pi/2, \pi/2],$$

заданную формулой (2.27).

Следующая теорема представляет собой аналог теоремы 2.3 (ср. теорему 9.1 и следствие 9.1 в [17]).

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия* 7.1 *и* 7.2. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *и* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega)) = 0$ *для любого* $\omega \in S^{n+d-3}$. *Тогда оператор*

$$\mathcal{L}_g(p) : \mathcal{V}_a^{l+2m}(\mathbb{R}_+^n) \to \mathcal{V}_a^l(\mathbb{R}_+^n, \Gamma)$$

— изоморфизм для $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *и*

$$|||u|||_{\mathcal{V}_a^{l+2m}(\mathbb{R}_+^n)} \leqslant c|||\mathcal{L}_g(p)u|||_{\mathcal{V}_a^l(\mathbb{R}_+^n, \Gamma)}, \quad p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

где $c > 0$ *не зависит от* u *и* p.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.1.

§ 8. Разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром

8.1. В этом параграфе доказывается однозначная разрешимость нелокальных эллиптических задач с параметром в ограниченных областях.

Лемма 8.1. *Пусть* H *— гильбертово пространство и* I *— единичный оператор в пространстве* H. *Пусть* $M_\varepsilon(p)$ *и* $S_\varepsilon(p)$ $(\varepsilon > 0,\ p \in \mathbb{R}^d$ *и величина* $|p|$ *достаточно велика*) *— такие семейства ограниченных операторов в пространстве* H, *что*

$$\|M_\varepsilon(p)\| \leqslant c_1\varepsilon, \quad \|S_\varepsilon(p)\| \leqslant c_2, \quad \|S_\varepsilon^2(p)\| \leqslant c_3|p|^{-1}, \tag{8.1}$$

где $c_1, c_2, c_3 > 0$ *не зависят от* ε *и* p. *Тогда при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *и достаточно больших* $|p|$ *операторы*

$$L_\varepsilon(p) = I + M_\varepsilon(p) + S_\varepsilon(p)$$

имеют ограниченные обратные операторы $L_\varepsilon^{-1}(p)$ *и выполнена оценка*

$$\|L_\varepsilon^{-1}(p)\| \leqslant c_4,$$

где $c_4 > 0$ *не зависит от* ε *и* p.

Доказательство. Для доказательства леммы построим правый и левый обратные операторы для оператора $L_\varepsilon(p)$. Имеем

$$L_\varepsilon(p)\big(I - (M_\varepsilon(p) + S_\varepsilon(p))\big) = I - M_\varepsilon^2(p) - M_\varepsilon(p)S_\varepsilon(p) - S_\varepsilon(p)M_\varepsilon(p) - S_\varepsilon^2(p).$$

Из (8.1) вытекает, что

$$\|S_\varepsilon^2(p)\| \leqslant \frac{1}{6}$$

для достаточно больших $|p|$ и

$$\|M_\varepsilon(p)\| \leqslant \min\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{12c_2}\right\}$$

для достаточно малых ε. Следовательно,

$$\left\|M_\varepsilon^2(p) + M_\varepsilon(p)S_\varepsilon(p) + S_\varepsilon(p)M_\varepsilon(p) + S_\varepsilon^2(p)\right\| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, существуют равномерно ограниченные по ε и p операторы

$$\left(I - M_\varepsilon^2(p) - M_\varepsilon(p)S_\varepsilon(p) - S_\varepsilon(p)M_\varepsilon(p) - S_\varepsilon^2(p)\right)^{-1}.$$

Отсюда и из равномерной ограниченности операторов $I - (M_\varepsilon(p) + S_\varepsilon(p))$ следует, что операторы

$$L_\varepsilon^{-1}(p) = \big(I - (M_\varepsilon(p) + S_\varepsilon(p))\big)\left(I - M_\varepsilon^2(p) - M_\varepsilon(p)S_\varepsilon(p) - S_\varepsilon(p)M_\varepsilon(p) - S_\varepsilon^2(p)\right)^{-1}$$

являются правыми обратными операторами для операторов $L_\varepsilon(p)$ и

$$\left\|L_\varepsilon^{-1}(p)\right\| \leqslant c_4.$$

Аналогично доказывается существование равномерно ограниченных левых обратных операторов для $L_\varepsilon(p)$. ■

Лемма 8.2. *Пусть выполнены условия* 7.1, 7.2, 1.3 *и* 1.4. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - l - 2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *ни для какой точки* $g \in K$ *и* $\dim \mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega)) = 0$ *для всех* $g \in K$ *и* $\omega \in S^{n+d-3}$. *Тогда найдется такое число* $p_0 > 0$, *что оператор* $\mathbf{L}^1(p)$, $|p| \geqslant p_0$, *имеет ограниченный обратный и*

$$c_1 |||\mathbf{L}^1(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant |||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c_2 |||\mathbf{L}^1(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}, \quad |p| \geqslant p_0, \tag{8.2}$$

где $c_1, c_2 > 0$ *не зависят от* u *и* p.

Доказательство. 1. Первое неравенство в (8.2) следует из определения норм $|||\cdot|||$, леммы 7.1 и оценки (7.15). Для доказательства второго неравенства в (8.2) нужно повторить доказательство леммы 4.3, заменяя нормы $\|\cdot\|$ нормами $|||\cdot|||$, следствие 2.1 и теорему 2.3 следствием 7.1 и теоремой 7.2 соответственно и результаты об эллиптических задачах строго внутри области и вблизи гладкой части границы соответствующими результатами об эллиптических задачах с параметром [1] (кроме того, нужно также использовать неравенство (7.15)). Тогда получим следующую априорную оценку:

$$|||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant k_1\left(|||\mathbf{L}^1(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + |||u|||_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\right), \quad p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

где $k_1 > 0$ не зависит от u и p. Из этой оценки и соотношения

$$|||u|||_{H_a^{l+2m-1}(Q)} \leqslant |p|^{-1} |||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)}$$

при $|p| \geqslant p'$, где $p' > 0$ достаточно велико, выводим второе неравенство в (8.2).

2. Осталось доказать существование правого обратного оператора для $\mathbf{L}^1(p)$.

Пользуясь обозначениями из доказательства леммы 5.2, введем оператор

$$R_{\mathcal{K}_1}(p)f=\sum_t (U^t)^{-1}\left(\widehat{\xi}^t(\mathcal{L}''_{g^t}(p))^{-1}F^t\left(\sum_q \xi_q^t f\right)\right)$$

(ср. (5.9)). Аналогично (5.24) мы покажем, что

$$\mathbf{L}^1(p)R_{\mathcal{K}_1}(p)f=\xi_0 f+T_{\mathcal{K}_1}(p)f, \tag{8.3}$$

где $T_{\mathcal{K}_1}(p):\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)\to\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$ — такой ограниченный оператор, что

$$|||T_{\mathcal{K}_1}(p)f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}\leqslant c_1|||f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}, \tag{8.4}$$

$$|||T^2_{\mathcal{K}_1}(p)f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}\leqslant c_2|p|^{-1}|||f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}, \tag{8.5}$$

константы $c_1,c_2,\ldots>0$ не зависят от f, p и числа ε из определения функции ξ, $|p|\geqslant p'$.

Оценка (8.4) вытекает из следствия 7.1 и неравенств (7.6) и (7.15). Докажем (8.5). По аналогии с операторами $\mathcal{T}^t_{j\rho\mu}$, A''_k и T_i, $i=1,2,3$, из доказательства леммы 5.2 мы рассмотрим соответствующие операторы $\mathcal{T}^t_{j\rho\mu}(p)$, $A''_k(p)$ и $T_i(p)$, $i=1,2,3$, зависящие от параметра p. Вначале оценим норму выражения $T_3^2(p)f$. Введем функции $\psi_k^t\in C_0^\infty(\Theta_k)$ такие, что $\psi_k^t(x')=1$ при $x'\in\Omega_k^t$. Используя неравенство (5.20) с нормами $|||\cdot|||$ вместо $\|\cdot\|$, эквивалентность норм $|||\cdot|||$ в подпространствах пространств $H_a^l(\Theta_k)$ и $W^l(\Theta_k)$, состоящих из функций с компактным носителем, отделенным от ребра $\mathcal{P}$, теорему 4.1 в [1], равенство (5.22), формулу Лейбница, неравенство (7.6) и следствие 7.1, получим

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left|\mathcal{T}^t_{j\rho\mu}(p)(\mathcal{L}''_{g^t}(p))^{-1}F^t\left(\sum_q \xi_q^t T_3(p)f\right)\right|\right|\right|_{V_a^{l+2m-m_{j\rho\mu}-1/2}(\Gamma_{j\rho})}\leqslant\\
&\leqslant k_1\sum_k\left|\left|\left|A''_k(p)\left(\psi_k^t\left[(\mathcal{L}''_{g^t}(p))^{-1}F^t\left(\sum_q\xi_q^t T_3(p)f\right)\right]_k\right)\right|\right|\right|_{V_a^l(\Theta_k)}\leqslant\\
&\leqslant k_2\left|\left|\left|(\mathcal{L}''_{g^t}(p))^{-1}F^t\left(\sum_q\xi_q^t T_3(p)f\right)\right|\right|\right|_{\mathcal{V}_a^{l+2m-1}(\Theta)}\leqslant k_3|p|^{-1}|||f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)},
\end{aligned}$$

где $p\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ и $k_1,\ldots,k_4>0$ не зависят от f, p и ε.

Из последнего неравенства следует, что

$$|||T_3^2(p)f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}\leqslant k_4|p|^{-1}|||f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)},\quad p\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}.$$

Аналогично оценивается норма выражения $T_1^2(p)f$. Соответствующая оценка для $T_2(p)f$ очевидна. Таким образом, мы получаем неравенство (8.5) для оператора $T_{\mathcal{K}_1}(p)=T_1(p)+T_2(p)+T_3(p)$.

Пусть ζ — функция, заданная в (5.28). Положим $\zeta_1=1-\zeta$. Так как $\zeta(x)=1$ при $x\in\mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$, то $\operatorname{supp}\zeta_1\subset\overline{Q}\setminus\mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$. Введем такую функцию $\widehat{\zeta}_1\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\widehat{\zeta}_1(x)=1$ при $x\in\overline{Q}\setminus\mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$ и $\operatorname{supp}\widehat{\zeta}_1\subset\overline{Q}\setminus\mathcal{K}_1^{\varepsilon}$.

В силу теоремы 10.4 в [17] при $|p|\geqslant p''$, где p'' достаточно велико, существует такой ограниченный оператор $\mathbf{R}^0(p)$, что $\mathbf{L}_0(p)\mathbf{R}_0(p)f=f$ для $f\in\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$, $\operatorname{supp}f\subset\overline{Q}\setminus\mathcal{K}_1^{2\varepsilon}$. Таким образом, можно определить следующий оператор:

$$R(p)f=R_{\mathcal{K}_1}(p)f+R_{\mathcal{K}_1}(p)(\eta f)+\widehat{\zeta}_1\mathbf{R}^0(p)(\zeta_1 f),$$

где $\eta(x) = \zeta_0(x)(1-\xi_0(x))/\xi_0(x)$ при $x \in \mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$ и $\eta(x) = 0$ при $x \notin \mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$ (ср. (5.30)). Так как $\operatorname{supp}\widehat{\zeta}_1 \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{K}_1^{\varepsilon}$, то

$$B_{i\mu}^1(p)\big(\widehat{\zeta}_1 \mathbf{R}^0(p)(\zeta_1 f)\big) = 0;$$

следовательно,

$$\mathbf{L}^1(p)R(p)f = \mathbf{L}^1(p)R_{\mathcal{K}_1}(p)f + \mathbf{L}^1(p)R_{\mathcal{K}_1}(p)(\eta f) + \mathbf{L}^0(p)\big(\widehat{\zeta}_1 \mathbf{R}^0(p)(\zeta_1 f)\big). \tag{8.6}$$

Отсюда, из (8.3), формулы Лейбница и лемм 7.1 и 7.2 получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^1(p)R(p)f &= \xi_0 f + T_{\mathcal{K}_1}(p)f + \zeta_0(1-\xi_0)f + T_{\mathcal{K}_1}(p)(\eta f) + \zeta_1 f + T(p)f = \\ &= f + T_{\mathcal{K}_1}(p)f + M(p)f + T(p)f,\end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{L}^1(p)R(p) = \mathbf{I} + T_{\mathcal{K}_1}(p) + M(p) + T(p), \tag{8.7}$$

где

$$M(p)f = T_{\mathcal{K}_1}(p)(\eta f)$$

и $T(p) : \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma) \to \mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)$ — такой ограниченный оператор, что

$$|||T(p)f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant k_1 |p|^{-1} |||f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}, \tag{8.8}$$

где $k_1 = k_1(\varepsilon) > 0$ не зависит от f и p.

Согласно неравенству (8.4) имеем

$$|||M(p)f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant c_3 |||\eta f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}.$$

Однако $(1-\xi_0(x))/\xi_0(x) = 0$ при $x \in \mathcal{K}_1$, носитель функции ζ_0 содержится в $\mathcal{K}_1^{4\varepsilon}$, а сама функция ζ_0 удовлетворяет неравенству в (5.27). Таким образом, из последней оценки, лемм 4.1 и 4.2 и замечания 4.1 вытекает, что

$$|||M(p)f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant c_4 \varepsilon |||f|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}. \tag{8.9}$$

В силу неравенств (8.4), (8.5) и (8.9) и леммы 8.1 при достаточно малом (фиксированном) $\varepsilon > 0$ и при всех $|p| \geqslant p'''$, где $p''' \geqslant p''$ достаточно велико, существует оператор

$$\big(\mathbf{I} + T_{\mathcal{K}_1}(p) + M(p)\big)^{-1}; \tag{8.10}$$

более того, этот оператор ограничен в нормах $|||\cdot|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}$ равномерно по параметру p. Поэтому соотношение (8.7) эквивалентно следующему:

$$\mathbf{L}^1(p)R(p)\big(\mathbf{I} + T_{\mathcal{K}_1}(p) + M(p)\big)^{-1} = \mathbf{I} + T'(p),$$

где

$$T'(p) = T(p)\big(\mathbf{I} + T_{\mathcal{K}_1}(p) + M(p)\big)^{-1}.$$

В силу равномерной ограниченности оператора (8.10) и оценки (8.8) существует такое достаточно большое число $p_0 \geqslant p'''$, что $|||T'(p)||| \leqslant 1/2$ для $|p| \geqslant p_0$ (напомним, что число ε теперь зафиксировано); значит,

$$\mathbf{L}^1(p)R(p)\big(\mathbf{I} + T_{\mathcal{K}_1}(p) + M(p)\big)^{-1}(\mathbf{I} + T'(p))^{-1} = \mathbf{I}.$$

Таким образом, доказано существование правого обратного оператора для оператора $\mathbf{L}^1(p)$, $|p| \geqslant p_0$. Отсюда и из второй оценки в (8.2) получаем утверждение леммы. ■

8.2. В этом пункте мы обобщим результат предыдущего пункта на случай оператора $\mathbf{L}(p)$.

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия* 7.1–7.4, 1.3 *и* 1.4. *Предположим, что прямая* $\operatorname{Im}\lambda = a+1-l-2m$ *не содержит собственных значений оператор-функции* $\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda)$ *ни для какой точки* $g\in K$ *и* $\dim\mathcal{N}(\mathcal{L}_g(\omega)) = \operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathcal{L}_g(\omega)) = 0$ *для любых* $g\in K$ *и* $\omega\in S^{n+d-3}$. *Тогда верны следующие утверждения*:

1) *существует такое число* $p_1>0$, *что оператор* $\mathbf{L}(p)$, $|p|\geqslant p_1$, *имеет ограниченный обратный и*
$$c_1|||\mathbf{L}(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant |||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c_2|||\mathbf{L}(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}, \qquad |p|\geqslant p_1, \tag{8.11}$$
где $c_1, c_2>0$ *не зависят от* u *и* p;

2) *при любом* $p\in\mathbb{R}^d$ *оператор* $\mathbf{L}(p)$ *фредгольмов и* $\operatorname{ind}\mathbf{L}(p)=0$.

Для доказательства теоремы 8.1 рассмотрим операторы
$$L_t(p) = \mathbf{L}^1(p) + t\big(\mathbf{L}(p) - \mathbf{L}^1(p)\big), \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$
Очевидно, $L_0(p)=\mathbf{L}^1(p)$, $L_1(p)=\mathbf{L}(p)$.

Лемма 8.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Тогда существует такое число* $p_1>0$, *что для всех* $u\in H_a^{l+2m}(Q)$ *имеют место оценки*
$$c_1|||L_t(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant |||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)} \leqslant c_2|||L_t(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)}, \quad |p|\geqslant p_1,\ 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{8.12}$$
где $c_1, c_2>0$ *не зависят от* u, p *и* t.

Доказательство. Из определения норм $|||\cdot|||$, леммы 7.1, неравенства (7.15) и условий 7.3 и 7.4 вытекает первая оценка в (8.12).

Докажем вторую оценку в (8.12). Применяя лемму 8.2 и используя условие 7.3 и соотношения $0\leqslant t\leqslant 1$, имеем
$$\begin{aligned}|||u|||_{H_a^{l+2m}(Q)} &\leqslant k_1|||L_0(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} \leqslant \\ &\leqslant k_2\Big(|||L_t(p)u|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + \sum_{i,\mu}|||B_{i\mu}^2(p)|||_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} + |||u|||_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\Big),\end{aligned} \tag{8.13}$$
где $|p|\geqslant p_0$ и $k_1, k_2, \ldots>0$ не зависят от u, p и t.

Далее, повторяем доказательство неравенств (4.35) и (4.36), используя лемму 7.1 и оценку (7.15) и заменяя операторы $B_{i\mu}^2$ операторами $B_{i\mu}^2(p)$, нормы $\|\cdot\|$ нормами $|||\cdot|||$, лемму 4.6 условием 7.4, а результаты об эллиптических задачах строго внутри области и вблизи гладкой части границы соответствующими результатами об эллиптических задачах с параметром [1]. Тогда получим
$$|||B_{i\mu}^2(p)u|||_{H_a^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)} \leqslant k_3\big(|||L_tu|||_{\mathcal{H}_a^l(Q,\Gamma)} + |||u|||_{H_a^{l+2m-1}(Q)}\big). \tag{8.14}$$

Из оценок (8.13) и (8.14) и леммы 7.1, считая $|p|\geqslant p_1$, где $p_1\geqslant p_0$ достаточно велико, получаем утверждение леммы. ■

Теперь докажем теорему 8.1, используя леммы 8.2 и 8.3 и метод продолжения по параметру t.

Доказательство теоремы 8.1. 1. Применяя леммы 8.2 и 8.3, видим, что при $0 \leqslant t \leqslant t_1 = c_1/(4c_2)$ оператор

$$L_t(p) = L_0(p)\big(\mathbf{I} + tL_0^{-1}(p)(L_1(p) - L_0(p))\big)$$

имеет ограниченный обратный, причем $|||L_t^{-1}(p)||| \leqslant c_2$. Следовательно, при $t_1 \leqslant t \leqslant 2t_1$ оператор

$$L_t(p) = L_{t_1}(p)\big(\mathbf{I} + (t - t_1)L_{t_1}^{-1}(p)(L_1(p) - L_0(p))\big)$$

также имеет ограниченный обратный, причем $|||L_t^{-1}(p)||| \leqslant c_2$. Повторяя эти рассуждения, за конечное число шагов получим, что оператор $L_1(p) = \mathbf{L}(p)$ имеет ограниченный обратный. Оценка (8.11) следует из (8.12) при $t = 1$.

2. Зафиксируем такой вектор $\widehat{p} \subset \mathbb{R}^d$, что $|\widehat{p}| \geqslant p_0$. По лемме 8.2 существует ограниченный оператор

$$(\mathbf{L}^1(\widehat{p}))^{-1} : \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma) \to H_a^{l+2m}(Q).$$

Тогда

$$\mathbf{L}^1(p) = \mathbf{L}^1(\widehat{p})(\mathbf{I} + \mathbf{T}(p)),$$

где

$$\mathbf{T}(p) = (\mathbf{L}^1(\widehat{p}))^{-1}(\mathbf{L}^1(p) - \mathbf{L}^1(\widehat{p})).$$

Очевидно, оператор

$$\mathbf{L}^1(p) - \mathbf{L}^1(\widehat{p}) : H_a^{l+2m-1}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$$

ограничен. Из компактности вложения

$$H_a^{l+2m}(Q) \subset H_a^{l+2m-1}(Q)$$

следует, что оператор

$$\mathbf{L}^1(p) - \mathbf{L}^1(\widehat{p}) : H_a^{l+2m}(Q) \to \mathcal{H}_a^l(Q, \Gamma)$$

компактен. Тогда оператор

$$\mathbf{T}(p) : H_a^{l+2m}(Q) \to H_a^{l+2m}(Q)$$

также компактен. По теореме 13.2 в [15] оператор $\mathbf{I}+\mathbf{T}(p)$ фредгольмов и $\operatorname{ind}(\mathbf{I}+\mathbf{T}(p))=0$. Теперь, применяя теорему 12.2 в [15], видим, что оператор $\mathbf{L}^1(p)$ фредгольмов и

$$\operatorname{ind} \mathbf{L}^1(p) = \operatorname{ind} \mathbf{L}^1(\widehat{p}) + \operatorname{ind}\,(\mathbf{I} + \mathbf{T}(p)) = 0.$$

Наконец, заметим, что выполнение условий 7.3 и 7.4 влечет выполнение условий 6.1 и 6.2 соответственно. Следовательно, по теореме 6.3 оператор $\mathbf{L}(p)$ фредгольмов и

$$\operatorname{ind} \mathbf{L}(p) = \operatorname{ind} \mathbf{L}^1(p) = 0. \qquad \blacksquare$$

8.3. В этом пункте мы рассмотрим пример эллиптической задачи с параметром, удовлетворяющей условиям 7.1–7.4, 1.3 и 1.4 и имеющей распределенные нелокальные члены.

Пример 8.1. 1. Сохраняя обозначения примера 6.1, рассмотрим следующую нелокальную задачу:

$$-\Delta u + e^{ih}p^2u = f_0(x), \quad x \in Q, \tag{8.15}$$

$$u\big|_{\Gamma_l} + B_l^1u + B_l^2u = f_l(x), \quad x \in \Gamma_l, \quad l = 1, 2, \tag{8.16}$$

где $-\pi/2 < h < \pi/2$ и $p \geqslant 0$.

Для каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$ оператор

$$\mathcal{L}_g(p) = \mathcal{L}(p) : H_a^2(\Theta) \to \mathcal{H}_a^0(\Theta, \Gamma),$$

заданный формулой (7.28), принимает вид (ср. (6.14))

$$\mathcal{L}(p)v = \Big(-\Delta v + e^{ih}p^2,\ v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_{11}} - \alpha_1 v(\varphi + \pi/4, r, z)\big|_{\Gamma_{11}},$$
$$v(\varphi, r, z)\big|_{\Gamma_{12}} - \alpha_2 v(\varphi - \pi/4, r, z)\big|_{\Gamma_{12}}\Big).$$

Следовательно, оператор

$$\mathcal{L}_g(\omega) = \mathcal{L}(\omega) : E_a^2(\theta) \to \mathcal{E}_a^0(\theta, \gamma)$$

и оператор-функция

$$\widehat{\mathcal{L}}_g(\lambda) = \widehat{\mathcal{L}}(\lambda) : W^2(-\pi/4, \pi/4) \to \mathcal{W}^0[-\pi/4, \pi/4],$$

заданные формулами (7.29) и (2.2), имеют вид

$$\mathcal{L}(\omega)V = \Big(-\Delta_y V + (\omega_1^2 + e^{ih}\omega_2^2)V,\ V(\varphi, r)\big|_{\gamma_{11}} - \alpha_1 V(\varphi + \pi/4, r)\big|_{\gamma_{11}},$$
$$V(\varphi, r)\big|_{\gamma_{12}} - \alpha_2 V(\varphi - \pi/4, r)\big|_{\gamma_{12}}\Big)$$

и

$$\widehat{\mathcal{L}}(\lambda)w = \big(-w_{\varphi\varphi} + \lambda^2 w,\ w(-\pi/4) - \alpha_1 w(0),\ w(\pi/4) - \alpha_2 w(0)\big)$$

соответственно, где $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in S^1$.

Пусть числа a, α_1, α_2 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$0 \leqslant a \leqslant 2, \quad 0 < |\alpha_1 + \alpha_2| < 2, \quad \frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} \sqrt{4(\alpha_1 + \alpha_2)^{-2} - 1}. \tag{8.17}$$

2. Докажем существование такого числа $h_1 = h_1(\alpha_1, \alpha_2) > 0$, что оператор $\mathcal{L}(\omega)$, $\omega \in S^1$, — изоморфизм для $|h| \leqslant h_1$. Для этого нужно повторить рассуждения из примера 2.1, заменяя полуторалинейную форму (2.14) формой

$$b_{\mathcal{R}}[u, v] = \int\limits_{\theta} \bigg(\sum_{i=1,2} (\mathcal{R}_\theta u)_{y_i} \overline{v_{y_i}} + \big(\omega_1^2 + e^{ih}\omega_2^2\big)\mathcal{R}_\theta u \bar{v}\bigg)\, dy$$

с той же областью определения $\mathrm{D}(b_{\mathcal{R}}) = \mathring{W}^1(\theta)$. Покажем, что эта полуторалинейная форма также является замкнутой секториальной формой.

Из неравенства Шварца и соотношения (2.15) следует, что

$$\big|b_{\mathcal{R}}[u, v]\big| \leqslant k_1 \|u\|_{\mathring{W}^1(\theta)} \|v\|_{\mathring{W}^1(\theta)}, \tag{8.18}$$

где $k_1 > 0$ не зависит от u и v.

Введем изоморфизм $\mathcal{U} : L_2(\theta) \to L_2(\theta_1) \times L_2(\theta_1)$ по формуле

$$(\mathcal{U}u)_i(y) = u(\varphi + (i-1)d/2, r), \quad y \in \theta_1, \quad i = 1, 2,$$

и рассмотрим матрицу $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда, используя (2.15) и (2.17), получим

$$\operatorname{Re} b_{\mathcal{R}}[u,u] = \int\limits_{\theta_1} \left\{ \sum_i \left(\frac{(R_1+R_1^*)}{2} (\mathcal{U}u_{y_i}), \mathcal{U}u_{y_i} \right)_{\mathbb{C}^2} + \right.$$
$$\left. + \omega_1^2 \left(\frac{(R_1+R_1^*)}{2} \mathcal{U}u, \mathcal{U}u \right)_{\mathbb{C}^2} + \omega_2^2 \left(\frac{e^{ih}R_1 + (e^{ih}R_1)^*)}{2} \mathcal{U}u, \mathcal{U}u \right)_{\mathbb{C}^2} \right\} dy. \tag{8.19}$$

Так как $|\alpha_1+\alpha_2|<2$, то матрица

$$R_1 + R_1^* = \begin{pmatrix} 2 & \alpha_1+\alpha_2 \\ \alpha_1+\alpha_2 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

положительно определена. Покажем, пользуясь критерием Сильвестра, что матрица

$$e^{ih}R_1 + (e^{ih}R_1)^* = \begin{pmatrix} e^{ih}+e^{-ih} & e^{ih}\alpha_1 + e^{-ih}\alpha_2 \\ e^{ih}\alpha_2 + e^{-ih}\alpha_1 & e^{ih}+e^{-ih} \end{pmatrix} \tag{8.21}$$

также положительно определена. Поскольку $-\pi/2<h<\pi/2$, то $e^{ih}+e^{-ih}>0$. Таким образом, нам нужно доказать, что $\det\left(e^{ih}R_1+(e^{ih}R_1)^*\right)>0$. Пусть $e^{ih}=\mu+i\nu$, где $\mu>0$. Используя равенство $\nu^2=1-\mu^2$, получаем

$$\det\left(e^{ih}R_1+(e^{ih}R_1)^*\right) = 4\mu^2 - [(\alpha_1+\alpha_2)^2 + (4\mu^2-4)\alpha_1\alpha_2].$$

Так как $|\alpha_1+\alpha_2|<2$, то при $h=0$ (т. е. при $\mu=1$) имеем

$$\det\left(e^{ih}R_1+(e^{ih}R_1)^*\right) = 4-(\alpha_1+\alpha_2)^2 > 0.$$

Следовательно, существует такое число $h_1=h_1(\alpha_1,\alpha_2)>0$, что

$$\det\left(e^{ih}R_1+(e^{ih}R_1)^*\right) > 0, \quad |h| \leqslant h_1.$$

Из тождества (8.19), положительной определенности матриц (8.20) и (8.21) и соотношения $\omega_1^2+\omega_2^2=1$ вытекает, что

$$\operatorname{Re} b_{\mathcal{R}}[u,u] \geqslant k_2 \int\limits_{\theta_1} \left\{ \sum_i (\mathcal{U}u_{y_i}, \mathcal{U}u_{y_i})_{\mathbb{C}^2} + (\mathcal{U}u, \mathcal{U}u)_{\mathbb{C}^2} \right\} dy = k_2 \|u\|^2_{\mathring{W}^1(\theta)}, \tag{8.22}$$

где $k_2>0$ не зависит от u.

В силу неравенств (8.18) и (8.22) форма $b_{\mathcal{R}}$ — замкнутая секториальная форма в пространстве $L_2(\theta)$ с областью определения $\mathrm{D}(b_{\mathcal{R}})=\mathring{W}^1(\theta)$ и вершиной $k_2>0$ (см. [10, гл. 6]).

Таким образом, повторяя рассуждения из примера 2.1, видим, что оператор $\mathcal{L}(\omega)$, $\omega\in S^1$, — изоморфизм для указанных a,α_1,α_2 и h. Более того, так как h и ω принадлежат компактным множествам, то неравенство

$$\|V\|_{E_a^2(\theta)} \leqslant k_3 \|\mathcal{L}(\omega)V\|_{\mathcal{E}_a^0(\theta,\gamma)}, \quad \omega\in S^1, \tag{8.23}$$

выполнено с константой $k_3>0$, не зависящей[4] от V, ω и h.

---

[4] Предположим, что это не так. Обозначим $L_h(\omega)=L(\omega)$. Тогда найдутся такие последовательности $h^{(k)}$, $\omega^{(k)}$ и $V^{(k)}$, $k=1,2,\dots$, что

$$h^{(k)}\to h, \quad \omega^{(k)}\to\omega, \quad \left\|\mathcal{L}_{h^{(k)}}(\omega^{(k)})V^{(k)}\right\|_{\mathcal{E}_a^0(\theta,\gamma)} \to 0 \quad \text{и} \quad \left\|V^{(k)}\right\|_{E_a^2(\theta)} = 1,$$

Из теоремы 8.1 вытекает, что оператор $\mathcal{L}(p)$ — также изоморфизм для $p \geqslant p_0$, где $p_0 > 0$. Более того, в силу (8.23) неравенство

$$\|u\|_{H_a^2(\Theta)} \leqslant k_4 \|\mathcal{L}(p)u\|_{\mathcal{H}_a^0(\Theta,\Gamma)}, \quad p > p_0, \tag{8.24}$$

выполнено с константой $k_4 > 0$, не зависящей от u и h.

3. Аналогично (6.17) и (6.18), используя лемму 7.1, оценку (7.15) и интерполяционные неравенства в пространствах Соболева (см. [1, гл. 1, § 1]), получим

$$|||B_l^2 u|||_{H_a^{3/2}(\Gamma_l)} \leqslant k_5 |||u|||_{H_a^2(Q\setminus\overline{\mathcal{K}_1^{2\varkappa}})},$$

$$|||B_l^2 u|||_{H_a^{3/2}(\Gamma_l\setminus\overline{\mathcal{K}_1^{\varkappa}})} \leqslant k_6 |||u|||_{H_a^2(Q_\varkappa)},$$

где $a > 1$ и $k_5, k_6 > 0$ не зависят от u. Таким образом, при $a > 1$ операторы B_l^2 удовлетворяют условию 7.4.

Рассмотрим линейные ограниченные операторы

$$\mathbf{L}(p), \mathbf{L}^1(p) : H_a^2(Q) \to H_a^0(Q) \times H_a^{3/2}(\Gamma_1) \times H_a^{3/2}(\Gamma_2),$$

действующие по формулам

$$\mathbf{L}(p)u = \left\{-\Delta u + e^{ih}p^2 u,\ u\big|_{\Gamma_l} + B_l^1 u + B_l^2 u\right\},$$

$$\mathbf{L}^1(p)u = \left\{-\Delta u + e^{ih}p^2 u,\ u\big|_{\Gamma_l} + B_l^1 u\right\}.$$

Следующие два результата вытекают из леммы 8.2 и теоремы 8.1.

Следствие 8.1. *Пусть числа a, α_1, α_2 удовлетворяют соотношениям* (8.17). *Тогда существуют такие числа $h_1 = h_1(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ и $p_0 > 0$ (не зависящие от h), что оператор $\mathbf{L}^1(p)$, $p \geqslant p_0$, $|h| \leqslant h_1$, имеет ограниченный обратный и*

$$c_1 |||\mathbf{L}^1(p)u|||_{\mathcal{H}_a^0(Q,\Gamma)} \leqslant |||u|||_{H_a^2(Q)} \leqslant c_2 |||\mathbf{L}^1(p)u|||_{\mathcal{H}_a^0(Q,\Gamma)},$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от u, h и p.

Следствие 8.2. *Пусть $1 < a \leqslant 2$, а числа α_1, α_2 и h_1 — те же, что в следствии* 8.1. *Тогда существует такое не зависящее от h число $p_1 > 0$, что оператор $\mathbf{L}(p)$, $p \geqslant p_1$, $|h| \leqslant h_1$, имеет ограниченный обратный и*

$$c_1 |||\mathbf{L}(p)u|||_{\mathcal{H}_a^0(Q,\Gamma)} \leqslant |||u|||_{H_a^2(Q)} \leqslant c_2 |||\mathbf{L}(p)u|||_{\mathcal{H}_a^0(Q,\Gamma)},$$

где $c_1, c_2 > 0$ не зависят от u, h и p.

Замечание 8.1. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2$ и $|\alpha_1| < 1$. Тогда следствия 8.1 и 8.2 верны для любого h_1, удовлетворяющего соотношению $0 < h_1 < \pi/2$. Действительно, в этом случае матрица (8.21) положительно определена, так как

$$e^{ih} + e^{-ih} = 2\mu > 0, \quad \det\left(e^{ih}R_1 + (e^{ih}R_1)^*\right) = 4\mu^2(1 - \alpha_1^2) > 0,$$

где $\mu = \operatorname{Re} e^{ih} > 0$. Следовательно, форма $b_{\mathcal{R}}$ — это снова замкнутая секториальная форма в пространстве $L_2(\theta)$ с областью определения $\mathrm{D}(b_{\mathcal{R}}) = \mathring{W}^1(\theta)$ и вершиной $k_2 > 0$. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют вышеприведенные.

и мы приходим к противоречию:

$$1 = \|V^{(k)}\|_{E_a^2(\theta)} \leqslant c\|\mathcal{L}_h(\omega)V^{(k)}\|_{\mathcal{E}_a^0(\theta,\gamma)} \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\|\mathcal{L}_{h^{(k)}}(\omega^{(k)})V^{(k)}\|_{\mathcal{E}_a^0(\theta,\gamma)} + \|(\mathcal{L}_{h^{(k)}}(\omega^{(k)})V^{(k)} - \mathcal{L}_h(\omega)V^{(k)})\|_{\mathcal{E}_a^0(\theta,\gamma)}\Big) \to 0.$$

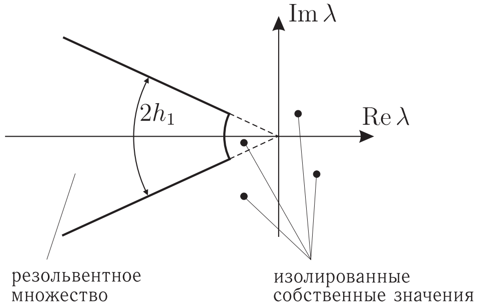

Рис. 5. Спектры операторов $\mathbf{A}^1$ и $\mathbf{A}$

4. Рассмотрим неограниченные операторы

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}^1 : \mathrm{D}(\mathbf{A}) \subset H_a^0(Q) \to H_a^0(Q),$$

заданные формулами

$$\mathbf{A}u = -\Delta u, \quad u \in \mathrm{D}(\mathbf{A}) = \{u \in H_a^2(Q) : u|_{\Gamma_l} + B_l^1 u + B_l^2 u = 0\},$$
$$\mathbf{A}^1 u = -\Delta u, \quad u \in \mathrm{D}(\mathbf{A}) = \{u \in H_a^2(Q) : u|_{\Gamma_l} + B_l^1 u = 0\}.$$

Используя следствие 8.1, получаем следующий результат (см. рис. 5).

Следствие 8.3. *Пусть выполнены условия следствия* 8.1. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *спектр* $\sigma(\mathbf{A}^1)$ *оператора* $\mathbf{A}^1$ *дискретен*[5];
2) *существуют такие числа* $h_1 = h_1(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ *и* $\lambda_1 > 0$, *что* $\sigma(\mathbf{A}^1) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega_{h_1,\lambda_1}$, *где*
$$\Omega_{h_1,\lambda_1} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \pi)| \leqslant h_1,\ |\lambda| \geqslant \lambda_1\};$$
3) *имеет место оценка*
$$\|(\mathbf{A}^1 - \lambda \mathbf{I})^{-1}\|_{H_a^0(Q) \to H_a^0(Q)} \leqslant \frac{c_1}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{h_1,\lambda_1},$$
где $c_1 = c_1(h_1) > 0$.

Доказательство. Положим $-\lambda = e^{ih} p^2$ и $\lambda_1 = p_0^2$, где p_0 — константа из следствия 8.1. Тогда утверждения 2 и 3 вытекают из следствия 8.1. В силу того же следствия оператор $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1} : H_a^0(Q) \to H_a^2(Q)$ ограничен для $\lambda \in \Omega_{h_1,\lambda_1}$. Отсюда и из компактности вложения $H_a^2(Q) \subset H_a^0(Q)$ следует, что резольвента $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{-1} : H_a^0(Q) \to H_a^0(Q)$ — компактный оператор для $\lambda \in \Omega_{h_1,\lambda_1}$. Применяя теперь теорему 6.29 в [10, гл. 3, § 6], получаем утверждение 1. ■

Используя следствие 8.2 вместо следствия 8.1, получим следующий результат (см. рис. 5).

Следствие 8.4. *Пусть выполнены условия следствия* 8.2. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *спектр* $\sigma(\mathbf{A})$ *дискретен*;
2) *существует такое число* $\lambda_2 > 0$, *что* $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega_{h_1,\lambda_2}$;

[5] Это означает, что спектр состоит не более чем из счетного множества изолированных собственных значений конечной кратности.

3) *имеет место оценка*

$$\left\|(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{-1}\right\|_{H_a^0(Q)\to H_a^0(Q)} \leqslant \frac{c_2}{|\lambda|}, \quad \lambda\in\Omega_{\hbar_1,\lambda_2},$$

где $c_2 = c_2(\hbar_1) > 0$, *а константа* $\hbar_1 > 0$ — *та же, что в следствии* 8.3.

Замечание 8.2. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2$ и $|\alpha_1| < 1$. Тогда следствия 8.3 и 8.4 верны для любого $\hbar_1$, удовлетворяющего соотношению $0 < \hbar_1 < \pi/2$ (ср. замечание 8.1).

Следующие вопросы остаются открытыми. Существуют ли такие числа $\hbar_1$, $\pi/2 \leqslant \hbar_1 < \pi$, и $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, что

$$\sigma(\mathbf{A}^1)\subset\mathbb{C}\setminus\Omega_{\hbar_1,\lambda_1}, \quad \sigma(\mathbf{A})\subset\mathbb{C}\setminus\Omega_{\hbar_1,\lambda_2}? \tag{8.25}$$

Можно ли для любого $\hbar_1$, $0 < \hbar_1 < \pi$ подобрать такие числа $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, чтобы выполнялись соотношения (8.25) (ср. задачу 13.1 в [30, § 13])?

Литература

1. *Агранович М. С.*, *Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. 1964. Т. 19. Вып. 3. С. 53–161.
2. *Бицадзе А. В.*, *Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
3. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 68. № 3. С. 373–416.
4. *Гохберг И. Ц.*, *Сигал Е. И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. Т. 84 (126). № 4. С. 607–629.
5. *Гуревич П. Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2003. Т. 23. С. 93–126.
6. *Гуревич П. Л.* Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения // Известия РАН, сер. мат. 2003. Т. 67. № 6. С. 71–110.
7. *Гуревич П. Л.* О гладкости обобщенных решений нелокальных эллиптических задач на плоскости // Докл. АН. 2004. Т. 398. № 3. С. 295–299.
8. *Гущин А. К.* Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 5. С. 17–36.
9. *Гущин А. К.*, *Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
11. *Кишкис К. Ю.* Об индексе задачи Бицадзе—Самарского для гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 105–110.
12. *Ковалева О. А.*, *Скубачевский А. Л.* Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом // Мат. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 6. С. 882–898.
13. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
14. *Кондратьев В. А.*, *Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 2 (230). С. 3–75.
15. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
16. *Лионс Ж.-Л.*, *Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
17. *Мазья В. Г.*, *Пламеневский Б. А.* L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Тр. Моск. мат. о-ва. 1978. Т. 37. С. 49–93.

18. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.
19. *Назаров С. А.*, *Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
20. *Скрябин М. А.* Нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах и функционально-дифференциальные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 121–143.
21. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Мат. сб. 1986. Т. 129 (171). № 2. С. 279–302.
22. *Скубачевский А. Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 120–131.
23. *Скубачевский А. Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 128–139.
24. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 197. С. 54–112.
25. *Agmon S.*, *Douglis A.*, *Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I // Comm. Pure Appl. Math. 1959. T. 12. C. 623–727.
26. *Gurevich P. L.* Nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles and the Green formula // Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen, Math. Inst. Univ. Giessen, Germany. 2001. T. 247. C. 1–74.
27. *Gurevich P. L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, I // Russ. J. Math. Phys. 2003. T. 10. № 4. C. 436–466.
28. *Gurevich P. L.* Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, II // Russ. J. Math. Phys. 2004. T. 11. № 1. C. 1–44.
29. *Skubachevskii A. L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. of Mathematical Analysis and Applications. 1991. T. 160. C. 323–341.
30. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
31. *Skubachevskii A. L.* Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem // Russ. J. Math. Phys. 2001. T. 8. C. 365–374.