УДК 517.9

П. Л. Гуревич

Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения

Рассмотрено эллиптическое уравнение порядка $2m$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$ с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции и ее производных на $(n-1)$-мерных многообразиях $\overline{\Upsilon}_i$, где $\bigcup_i \overline{\Upsilon}_i = \partial G$, со значениями на $\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i) \subset \overline{G}$. Вблизи точек сопряжения $g \in \overline{\Upsilon}_i \cap \overline{\Upsilon}_j \neq \varnothing$, $i \neq j$, в качестве модельных возникают нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах. Изучен случай, когда преобразованиям ω_{is} в модельных задачах соответствуют *нелинейные* преобразования переменных. Доказано, что при переходе от линейных преобразований переменных к нелинейным оператор задачи остается фредгольмовым и индекс сохраняется.

Библиография: 29 наименований.

Введение

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными условиями одними из первых начали изучать А. Зоммерфельд [1], Я. Д. Тамаркин [2], М. Пиконе [3]. В 1932 г. Т. Карлеман [4] рассмотрел задачу о нахождении голоморфной функции в ограниченной области G, удовлетворяющей следующему условию: значение неизвестной функции в точке x границы ∂G связано со значением в точке $\omega(x)$, где $\omega(\omega(x)) = x$, $\omega(\partial G) = \partial G$. С такой постановкой задачи связаны дальнейшие исследования нелокальных эллиптических задач со сдвигами, отображающими границу области на себя. В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский [5] рассмотрели принципиально иную нелокальную эллиптическую задачу, изучив уравнение Лапласа в ограниченной области G с краевыми условиями, связывающими значения искомой функции на многообразии $\Upsilon_1 \subset \partial G$ со значениями на некотором многообразии, лежащем внутри области G; на множестве $\partial G \setminus \Upsilon_1$ задано условие Дирихле. В общем случае такая задача была сформулирована как нерешенная.

Наиболее сложной здесь оказывается ситуация, когда носитель нелокальных членов пересекается с границей области. Рассмотрим следующий пример. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – ограниченная область с границей $\partial G = \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2 \cup \mathscr{K}_1$, где Υ_i – открытые связные (в топологии ∂G) $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $\mathscr{K}_1 = \overline{\Upsilon}_1 \cap \overline{\Upsilon}_2$ – $(n-2)$-мерное связное многообразие без края класса C^∞ (если $n = 2$, то $\mathscr{K}_1 = \{g_1, g_2\}$, где g_1, g_2 – концы кривых $\overline{\Upsilon}_1$, $\overline{\Upsilon}_2$). Пусть в окрестности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-06523), Министерства образования РФ (грант № E02-1.0-131) и INTAS (грант YSF 2002-008).

каждой точки $g \in \mathscr{K}_1$ область G диффеоморфна n-мерному двугранному (плоскому, если $n = 2$) углу. Рассмотрим в области G нелокальную задачу

$$\Delta u = f_0(y), \qquad y \in G, \tag{0.1}$$

$$u|_{\Upsilon_i} - b_i u(\omega_i(y))|_{\Upsilon_i} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{0.2}$$

Здесь $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$; ω_i – бесконечно дифференцируемое невырожденное преобразование, отображающее некоторую окрестность $\mathscr{O}_i$ многообразия Υ_i на множество $\omega(\mathscr{O}_i)$ так, что $\omega_i(\Upsilon_i) \subset G$, $\overline{\omega_i(\Upsilon_i)} \cap \partial G \neq \varnothing$ (см. рис. 0.1, a, b).

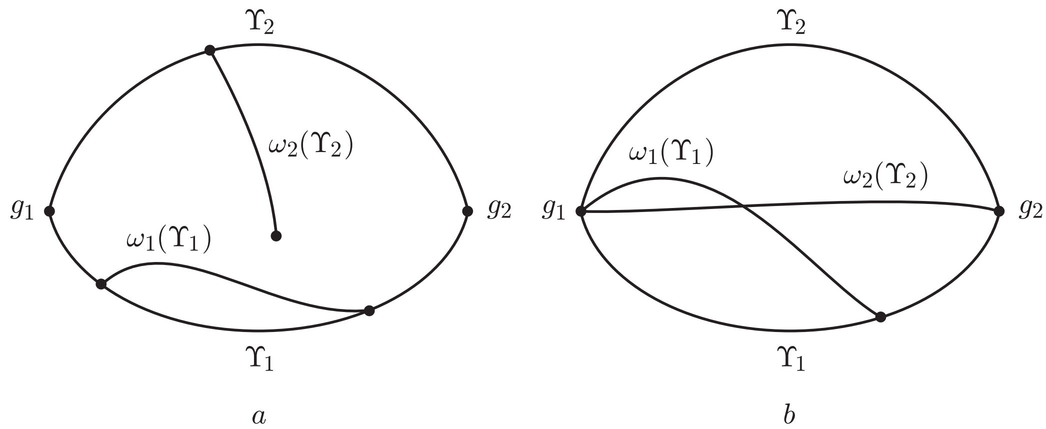

Рис. 0.1. Область G с границей $\partial G = \overline{\Upsilon}_1 \cup \overline{\Upsilon}_2$ при $n = 2$; g_1 и g_2 – точки сопряжения нелокальных условий

Задачи типа (0.1), (0.2) рассматривались многими математиками (см. [6]–[8] и др.). Наиболее полная теория для таких задач построена в работах А. Л. Скубачевского и его учеников [9]–[14]: доказана фредгольмова разрешимость эллиптических уравнений высокого порядка с общими нелокальными условиями, получена асимптотика решений вблизи точек сопряжения нелокальных условий, изучена гладкость обобщенных решений. При этом показано [15], что если носитель нелокальных членов не пересекается с точками сопряжения (см. рис. 0.1, a), то индекс нелокальной задачи равен индексу соответствующей локальной; в противном случае (см. рис. 0.1, b) это, вообще говоря, уже неверно.

По существу, свойства задачи в ограниченной области определяются свойствами модельных нелокальных задач в двугранных (в двумерном случае – плоских) углах $\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : b' < \varphi < b'',\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, (φ, r) – полярные координаты точки y, соответствующих точкам сопряжения нелокальных условий. До сих пор [9]–[11] рассматривался случай, когда преобразованиям ω_{is} в модельных задачах соответствуют *линейные* операторы поворота и растяжения в плоскости $\{y\}$. Однако во многих приложениях такое ограничение оказывается неестественным. Поясним это на примерах. Задача типа (0.1), (0.2) возникает при математическом описании некоторых процессов в плазме [16]. Наличие нелокальных условий указывает на связь температуры плазмы на границе области с температурой внутри области и в других точках границы.

Другим важным приложением является теория диффузионных процессов (описывающих, например, броуновское движение частицы в мембране $G \subset \mathbb{R}^n$). Как известно [17]–[19], всякому диффузионному процессу соответствует некоторая полугруппа Феллера, исследование которой сводится в силу теоремы Хилле–Иосиды к изучению эллиптического оператора с краевыми условиями, содержащими интеграл по $\overline{G}$ относительно некоторой неотрицательной борелевской меры [20]. В наиболее сложном случае, когда мера атомарна, нелокальные условия принимают вид (0.2). Их вероятностный смысл таков: частица, попадая в точку $y \in \Upsilon_i$, может с вероятностью b_i, $0 \leqslant b_i \leqslant 1$, перескочить в точку $\omega_i(y)$, либо с вероятностью $1 - b_i$ "погибнуть" (в этом случае процесс завершается). Понятно, что и в теории плазмы, и в теории диффузионных процессов возникающие преобразования переменных, вообще говоря, нелинейны.

Укажем еще одно приложение нелокальных задач. В монографии [21] показано, что в ряде случаев краевая задача для эллиптического дифференциально-разностного уравнения (возникающая, в частности, в авиационно-космической технике при моделировании многослойных пластин и оболочек [22], [21]) сводится к эллиптическому уравнению с нелокальными условиями на сдвигах границы. Таким образом, мы снова получаем нелинейные преобразования переменных в нелокальных членах (эти преобразования окажутся линейными лишь в частном случае, когда граница области на определенных участках совпадает с $(n-1)$-мерной гиперплоскостью).

Другие приложения, а также подробную библиографию работ, посвященных изучению нелокальных эллиптических задач, можно найти в [21].

В настоящей работе рассматривается эллиптическое уравнение порядка $2m$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$ с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции и ее производных на $(n-1)$-мерных многообразиях Υ_i, где $\bigcup_i \overline{\Upsilon}_i = \partial G$, со значениями на $\omega_{is}(\Upsilon_i) \subset G$. Как уже отмечалось, наибольшие трудности при изучении этой задачи возникают в случае пересечения носителя нелокальных членов $\bigcup_{i,s} \overline{\omega_{is}(\Upsilon_i)}$ с границей области, что приводит к появлению степенных особенностей решений вблизи некоторого множества [9] (так, в случае задачи (0.1), (0.2) особенности могут возникать вблизи точек g_1 и g_2). Поэтому такие задачи естественно рассматривать в весовых пространствах; это позволяет исследовать эллиптические уравнения высокого порядка с общими нелокальными условиями. Изучается случай, когда преобразованиям ω_{is} в модельных задачах соответствуют *нелинейные* преобразования переменных. Оказывается, задача с нелинейными преобразованиями не является малым или компактным возмущением соответствующей задачи с линейными преобразованиями. Однако будет показано, что при переходе от линейных преобразований переменных к нелинейным оператор задачи остается фредгольмовым и индекс сохраняется.

Отметим, что более общая структура множества точек сопряжения и нелокальных членов для эллиптических уравнений второго порядка с нелокальными возмущениями условий Дирихле рассматривалась в [8], что также подчеркивает важность нелинейных преобразований ω_{is}. С нашей точки зрения, достоинством предлагаемого подхода является возможность изучать уравнения порядка $2m$ с общими краевыми условиями, нелокальные возмущения которых могут быть сколь угодно большими. С другой стороны, этот подход позволяет исследовать асимптотику решений вблизи точек сопряжения [9], [14].

Приведем краткий обзор статьи. В § 1 рассматривается постановка задачи и обсуждаются условия, налагаемые на преобразования переменных в нелокальных членах. Там же вводятся основные функциональные пространства (пространства Соболева с весом) и выписываются модельные задачи в двугранных и плоских углах. В § 2 приведен пример нелокальной задачи и показано, что оператор, соответствующий задаче с нелинейным преобразованием переменных, не является малым или компактным возмущением оператора, соответствующего задаче с линеаризованным преобразованием. В § 3 изучаются свойства нелинейных преобразований вблизи точек сопряжения нелокальных условий и доказывается ряд лемм, которые используются в § 4 для вывода априорных оценок решений. В § 5 строится правый регуляризатор, который, совместно с априорной оценкой, гарантирует фредгольмову разрешимость нелокальной задачи. Наконец, в § 6 показано, что индекс задачи с нелинейными преобразованиями переменных равен индексу задачи с преобразованиями, линеаризованными вблизи точек сопряжения нелокальных условий.

§ 1. Постановка задачи в ограниченной области

1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, – ограниченная область с границей $\partial G = \bigcup_{i=1}^{N_0} \overline{\Upsilon}_i$, где Υ_i – открытые связные (в топологии ∂G) $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞. Предположим, что в окрестности каждой точки $g \in \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i$ область G диффеоморфна n-мерному двугранному (плоскому, если $n = 2$) углу $\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : 0 < b' < \varphi < b'' < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, где (φ, r) – полярные координаты точки y.

Обозначим через $\mathbf{P}(x, D)$ и $B_{i\mu s}(x, D)$ дифференциальные операторы порядков $2m$ и $m_{i\mu}$ соответственно с комплекснозначными коэффициентами класса C^∞, $i = 1, \dots, N_0$, $\mu = 1, \dots, m$, $s = 0, \dots, S_i$. Пусть операторы $\mathbf{P}(x, D)$, $B_{i\mu 0}(x, D)$ удовлетворяют следующим условиям (см., например, [23, гл. 2, § 1]).

Условие 1.1. *При всех $x \in \overline{G}$ оператор $\mathbf{P}(x, D)$ собственно эллиптический.*

Условие 1.2. *Система операторов $\{B_{i\mu 0}(x, D)\}_{\mu=1}^m$ для всех $i = 1, \dots, N_0$ и $x \in \overline{\Upsilon}_i$ удовлетворяет условию накрытия по отношению к оператору $\mathbf{P}(x, D)$.*

Пусть ω_{is}, $i = 1, \dots, N_0$, $s = 1, \dots, S_i$, – бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathscr{O}_i$ многообразия Υ_i на множество $\omega_{is}(\mathscr{O}_i)$ так, что $\omega_{is}(\Upsilon_i) \subset G$. Предположим, что множество

$$\mathscr{K} = \Big\{ \bigcup_i (\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \Big\} \cup \Big\{ \bigcup_{i,s} \omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \Big\} \cup \Big\{ \bigcup_{j,p} \bigcup_{i,s} \omega_{jp}\big(\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \Upsilon_j\big) \Big\}$$

представимо в виде $\mathscr{K} = \bigcup_{j=1}^3 \mathscr{K}_j$, где

$$\mathscr{K}_1 = \bigcup_{p=1}^{N_1} \mathscr{K}_{1p} = \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i, \qquad \mathscr{K}_2 = \bigcup_{p=1}^{N_2} \mathscr{K}_{2p} \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i, \qquad \mathscr{K}_3 = \bigcup_{p=1}^{N_3} \mathscr{K}_{3p} \subset G. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathscr{K}_{jp}$ – непересекающиеся $(n-2)$-мерные связные многообразия без края класса C^∞ (точки, если $n=2$).

Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathbf{P}(x,D)u = f_0(x), \qquad x \in G, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{B}_{i\mu}(x,D)u \equiv \sum_{s=0}^{S_i} (B_{i\mu s}(x,D)u)(\omega_{is}(x))|_{\Upsilon_i} = g_{i\mu}(x),\\ x \in \Upsilon_i, \qquad i=1,\dots,N_0, \qquad \mu=1,\dots,m,\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\big(B_{i\mu s}(x,D)u\big)(\omega_{is}(x)) = B_{i\mu s}(x',D_{x'})u(x')|_{x'=\omega_{is}(x)}$, $\omega_{i0}(x)\equiv x$.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу (0.1), (0.2) в двумерном случае с преобразованиями ω_i, соответствующими рис. 1.1. Тогда $\mathscr{K}_1 = \{g_1, g_2\}$, $\mathscr{K}_2 = \{\omega_1(g_2)\}$, $\mathscr{K}_3 = \{\omega_2(g_2), \omega_1(\omega_1(g_2))\}$.

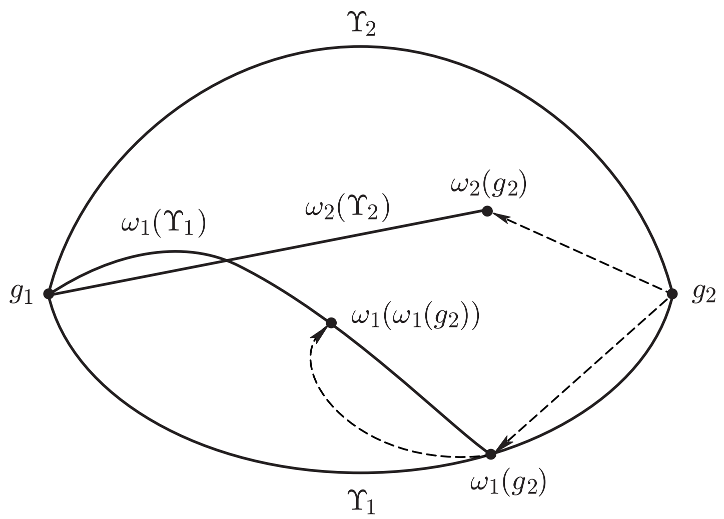

Рис. 1.1. Область G с границей $\partial G = \overline{\Upsilon}_1 \cup \overline{\Upsilon}_2$ при $n=2$

В работе [9] показано, что решения задачи (1.2), (1.3) могут иметь степенные особенности вблизи точек множества $\mathscr{K}_1$. Поэтому задачу (1.2), (1.3) естественно рассматривать в весовых пространствах. Введем пространство $H_b^l(Q)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{Q}\setminus M)$ по норме

$$\|u\|_{H_b^l(Q)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant l} \int_Q \rho^{2(b-l+|\alpha|)} |D^\alpha u|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Здесь Q – область G, угол Ω или $\mathbb{R}^n$; $M = \mathscr{K}_1$, если $Q = G$, и $M = \{x=(y,z) \in \mathbb{R}^n : y=0,\ z\in\mathbb{R}^{n-2}\}$, если $Q=\Omega$ или $Q=\mathbb{R}^n$; $C_0^\infty(\overline{Q}\setminus M)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, принадлежащими $\overline{Q}\setminus M$; $l\geqslant 0$ – целое; $b\in\mathbb{R}$; $\rho=\rho(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\mathscr{K}_1)$ – функция, удовлетворяющая условию[1] $c_1 \operatorname{dist}(x, \mathscr{K}_1) \leqslant \rho(x) \leqslant c_2 \operatorname{dist}(x, \mathscr{K}_1)$ ($x \in G$, $c_1, c_2 > 0$, $\operatorname{dist}(x, \mathscr{K}_1)$ – расстояние от точки x до множества $\mathscr{K}_1$), если $Q = G$, и $\rho(x) = |y|$, если $Q = \Omega$ или $Q = \mathbb{R}^n$. Через $H_b^{l-1/2}(\Upsilon)$ при $l \geqslant 1$ обозначим пространство следов на гладком $(n-1)$-мерном многообразии $\Upsilon \subset \overline{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H_b^{l-1/2}(\Upsilon)} = \inf \|u\|_{H_b^l(Q)}, \qquad u \in H_b^l(Q)\colon\ u|_\Upsilon = \psi.$$

Пусть $l + 2m - m_{i\mu} - 1 \geqslant 0$ при всех i, μ. Введем ограниченный оператор, соответствующий нелокальной задаче (1.2), (1.3):

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(x, D), \mathbf{B}_{i\mu}(x, D)\}\colon$$
$$H_b^{l+2m}(G) \to \mathscr{H}_b^l(G, \Upsilon) = H_b^l(G) \times \prod_{i=1}^{N_0} \prod_{\mu=1}^{m} H_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i).$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, считаем, что $b > l + 2m - 1$.

Поясним смысл ограничения на показатель b. Пусть преобразование ω_{is} отображает некоторую точку $g \in \overline{\Upsilon}_i \cap \mathscr{K}_1$ в точку $\omega_{is}(g)$, причем $\omega_{is}(g) \in \mathscr{K}_2$ или $\omega_{is}(g) \in \mathscr{K}_3$. Поскольку функция u принадлежит вблизи точки $\omega_{is}(g)$ пространству Соболева W_2^{l+2m}, то и функция $u(\omega_{is}(x))$ принадлежит пространству Соболева W_2^{l+2m}, но уже вблизи точки g; однако при $b \leqslant l+2m-1$ она, вообще говоря, не принадлежит весовому пространству H_b^{l+2m}. Поэтому след $(B_{i\mu s}(x, D)u)(\omega_{is}(x))|_{\Upsilon_i}$ может не принадлежать весовому пространству $H_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i)$. Если же $b > l+2m-1$, то согласно [12, лемма 5.2] $W_2^{l+2m}(G) \subset H_b^{l+2m}(G)$. Таким образом, в этом случае оператор $\mathbf{L}$ будет определен корректно.

Отметим, что в двумерном случае задачу (1.2), (1.3) можно рассматривать в весовых пространствах с произвольным показателем b (см. [9]). Для этого следует ввести определенные условия согласования (порождаемые преобразованиями ω_{is}), а именно предположить, что решение u и правая часть $\{f_0, g_{i\mu}\}$ принадлежат соответствующим весовым пространствам не только вблизи множества $\mathscr{K}_1$, но также вблизи $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}_3$. Поскольку, с одной стороны, эта ситуация подробно рассмотрена в [9], где изучаются задачи с линейными вблизи $\mathscr{K}_1$ преобразованиями, а с другой стороны, описанные изменения никак не связаны с преобразованиями ω_{is} вблизи множества $\mathscr{K}_1$, то ограничимся лишь формулировкой соответствующих результатов в конце § 5.

2. Рассмотрим более подробно структуру преобразований ω_{is} вблизи множества $\mathscr{K}_1$. Обозначим преобразование $\omega_{is}\colon \mathscr{O}_i \to \omega_{is}(\mathscr{O}_i)$ через ω_{is}^{+1}, а через $\omega_{is}^{-1}\colon \omega_{is}(\mathscr{O}_i) \to \mathscr{O}_i$ – преобразование, обратное к ω_{is}. Назовем *орбитой точки* $g \in \mathscr{K}_1$ и обозначим через $\operatorname{Orb}(g)$ множество всех точек вида $\omega_{i_p s_p}^{\pm 1}(\ldots \omega_{i_1 s_1}^{\pm 1}(g)) \in \mathscr{K}_1$, $1 \leqslant s_j \leqslant S_{i_j}$, $j = 1, \ldots, p$, т. е. всех тех, которые можно получить, применяя к g последовательно преобразования $\omega_{i_j s_j}^{+1}$ или $\omega_{i_j s_j}^{-1}$, отображающие точки множества $\mathscr{K}_1$ в $\mathscr{K}_1$.

Введем множество $\mathscr{S}_{i1} = \{0 \leqslant s \leqslant S_i\colon \omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i) \cap \mathscr{K}_1 \neq \varnothing\}$. Очевидно, что $0 \in \mathscr{S}_{i1}$. Пусть выполнены следующие условия.

[1] Существование функции $\rho(x)$ вытекает из [24, гл. 6, § 2, теорема 2].

Условие 1.3. *Для каждой точки* $g \in \mathscr{K}_1$:

а) *множество* $\mathrm{Orb}(g)$ *состоит из конечного числа точек* g^j, $j = 1, \dots, N = N(g)$;

б) *для точек* g^j *существуют окрестности*

$$\widehat{\mathscr{V}}(g^j) \subset \mathscr{V}(g^j) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Big\{ \bigcup_{i,s} \omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i) \cup \mathscr{K}_2 \cup \mathscr{K}_3 \Big\}, \qquad s \notin \mathscr{S}_{i1},$$

такие, что $\mathscr{V}(g^j) \cap \mathscr{V}(g^k) = \varnothing$, $j \neq k$, *и если* $g^j \in \overline{\Upsilon}_i$ *и* $\omega_{is}(g^j) = g^k$, *то* $\mathscr{V}(g^j) \subset \mathscr{O}_i$ *и* $\omega_{is}(\widehat{\mathscr{V}}(g^j)) \subset \mathscr{V}(g^k)$.

Условие 1.4. *Для каждой точки* $g \in \mathscr{K}_1$ *и* $j = 1, \dots, N(g)$ *существует невырожденное гладкое преобразование координат* $x \mapsto x'(g, j)$, *отображающее* $\mathscr{V}(g^j)$ $(\widehat{\mathscr{V}}(g^j))$ *на некоторую окрестность нуля* $\mathscr{V}_j(0)$ $(\widehat{\mathscr{V}}_j(0))$ *так, что*:

а) *образами множеств* $G \cap \mathscr{V}(g^j)$ $(G \cap \widehat{\mathscr{V}}(g^j))$ *и* $\Upsilon_i \cap \mathscr{V}(g^j)$ $(\Upsilon_i \cap \widehat{\mathscr{V}}(g^j))$ *будут соответственно пересечение двугранного угла* $\Omega_j = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n\colon 0 < b_j' < \varphi < b_j'' < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ *с окрестностью* $\mathscr{V}_j(0)$ $(\widehat{\mathscr{V}}_j(0))$ *и пересечение грани угла* Ω_j *с окрестностью* $\mathscr{V}_j(0)$ $(\widehat{\mathscr{V}}_j(0))$;

б) *преобразование* $\omega_{is}(x)$, $s \in \mathscr{S}_{i1} \setminus \{0\}$, *при* $x \in \widehat{\mathscr{V}}(g^j)$ *в новой системе координат имеет вид* $(y', z') \mapsto (\omega_{is}'(y', z'), z')$, *где* $\omega_{is}'(y', z') = \mathscr{G}_{is}' y' + o(|x'|)$, $\mathscr{G}_{is}'$ – *оператор поворота на угол* φ_{is}' *и растяжения в* $\chi_{is}' > 0$ *раз в плоскости* $\{y'\}$; *при этом предполагается, что* $\omega_{is}'(0, z) \equiv 0$;

в) *в новой системе координат оператор* $\mathscr{G}_{is}'$ *переводит грань соответствующего угла* Ω_j, $j = j(i)$, *в* $(n-1)$*-мерную полуплоскость, лежащую строго внутри, быть может, другого угла* Ω_k, $k = k(i, s)$.

Условия 1.3 и 1.4 аналогичны условиям работ [9], [11], в которых изучались преобразования, линейные в окрестности $\mathscr{K}_1$ (и произвольные вне окрестности $\mathscr{K}_1$).

Условие 1.3, а) в некотором смысле аналогично условию Т. Карлемана [4], используемому в теории эллиптических задач с нелокальными преобразованиями, отображающими границу области на себя.

Условие 1.4 означает, в частности, что если $g \in \omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \overline{\Upsilon}_j \cap \mathscr{K}_1 \neq \varnothing$, то поверхности $\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i)$ и $\overline{\Upsilon}_j$ имеют различные касательные плоскости в точке g. При этом требование $\omega_{is}'(0, z) \equiv 0$ является необходимым для того, чтобы было возможно представление (1.1). Если $\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \subset \overline{G} \setminus \mathscr{K}_1$, то на характер подхода поверхности $\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i)$ к границе ∂G, как и в [9], [11], не налагается никаких ограничений.

Замечание 1.1. Можно рассматривать более общую ситуацию, когда преобразование $\omega_{is}(x)$, $s \in \mathscr{S}_{i1} \setminus \{0\}$, при $x \in \widehat{\mathscr{V}}(g^j)$ в новой системе координат имеет вид $(y', z') \mapsto (\omega_{is}'(y', z'), \omega_{is}''(y', z'))$, где $\omega_{is}'(y', z')$ – то же, что и выше, $\omega_{is}''(y', z') = z' + o(|x'|)$, $\omega_{is}''(0, z') \equiv z'$ (последнее требование гарантирует выполнение п. а) условия 1.3). Однако для простоты мы ограничимся рассмотрением преобразования, описанного в условии 1.4.

3. Выпишем модельные задачи, соответствующие точкам множества $\mathscr{K}_1$ и определяющие фредгольмовость оператора $\mathbf{L}$.

Зафиксируем точку $g \in \mathscr{K}_1$. Пусть $\operatorname{supp} u \subset \left(\bigcup_{j=1}^{N(g)} \widehat{\mathscr{V}}(g^j)\right) \cap \overline{G}$. Обозначим $u(x)$ при $x \in \mathscr{V}(g^j) \cap G$ через $u_j(x)$. Если $g^j \in \overline{\Upsilon}_i$, $x \in \widehat{\mathscr{V}}(g^j)$, $\omega_{is}(x) \in \mathscr{V}(g^k)$, то обозначим $u(\omega_{is}(x))$ через $u_k(\omega_{is}(x))$; при этом, очевидно, $u(\omega_{i0}(x)) \equiv u(x) \equiv u_j(x)$. Тогда нелокальная краевая задача (1.2), (1.3) примет вид

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}(x, D)u_j = f_0(x), \qquad x \in \widehat{\mathscr{V}}(g^j) \cap G,\\
\sum_{s \in \mathscr{S}_{i1}} (B_{i\mu s}(x, D)u_k)(\omega_{is}(x))|_{\Upsilon_i} = g_{i\mu}(x),\\
x \in \widehat{\mathscr{V}}(g^j) \cap \Upsilon_i, \qquad i \in \{1 \leqslant i \leqslant N_0\colon\ \widehat{\mathscr{V}}(g^j) \cap \Upsilon_i \neq \varnothing\},\\
j = 1, \dots, N = N(g), \qquad \mu = 1, \dots, m.
\end{gathered}
$$

Согласно условию 1.4 в новой системе координат линейная часть $\mathscr{G}'_{is}$ преобразования ω'_{is} переводит одну из граней угла Ω_j, $j = j(i)$, в $(n-1)$-мерную полуплоскость, лежащую строго внутри, быть может, другого угла Ω_k, $k = k(i, s)$. Обозначим все такие $(n-1)$-мерные полуплоскости $\Gamma_{k2}, \dots, \Gamma_{k,R_k} \subset \Omega_k$ (если ни одна из граней углов $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ не отображается внутрь Ω_k, то положим $R_k = 1$). Обозначим также $b_{k1} = b'_k$, $b_{k,R_k+1} = b''_k$. Тогда множества

$$
\Gamma_{k\sigma} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi = b_{k\sigma},\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}, \qquad \sigma = 1, R_k + 1,
$$

будут гранями угла Ω_k. При этом полуплоскости Γ_{kq}, очевидно, имеют вид

$$
\Gamma_{kq} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n\colon\ \varphi = b_{kq},\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}, \qquad q = 2, \dots, R_k,
$$

где $0 < b_{k1} < \dots < b_{k,R_k+1} < 2\pi$.

Введем функцию $U_j(x') = u_j(x(x'))$ и переобозначим x' через x. Тогда в силу условий 1.3, 1.4 задача (1.2), (1.3) окончательно примет вид

$$
\mathscr{P}_j(x, D_y, D_z)U_j = f_j(x), \qquad x \in \Omega_j, \tag{1.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}_{j\sigma\mu}(x, D_y, D_z)U \equiv{} & B_{j\sigma\mu}(x, D_y, D_z)U_j|_{\Gamma_{j\sigma}}\\
& + \sum_{k,q,s} (B_{j\sigma\mu kqs}(x, D_y, D_z)U_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\\
={} & g_{j\sigma\mu}(x), \qquad x \in \Gamma_{j\sigma}.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Здесь (и далее, если не оговорено противное) $j, k = 1, \dots, N$, $\sigma = 1, R_j + 1$, $q = 2, \dots, R_k$, $\mu = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, S_{j\sigma kq}$, $\mathscr{P}_j(x, D_y, D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(x, D_y, D_z)$ и $B_{j\sigma\mu kqs}(x, D_y, D_z)$ – операторы порядков $2m$, $m_{j\sigma\mu}$ и $m_{j\sigma\mu}$ соответственно с переменными коэффициентами класса C^∞, $\omega'_{j\sigma kqs}(y, z) = \mathscr{G}_{j\sigma kqs}y + o(|x|)$, $\mathscr{G}_{j\sigma kqs}$ – оператор поворота на угол $\varphi_{j\sigma kq}$ и растяжения в $\chi_{j\sigma kqs} > 0$ раз в плоскости $\{y\}$; при этом $\omega'_{j\sigma kqs}(0, z) \equiv 0$, $b_{k1} < b_{j\sigma} + \varphi_{j\sigma kq} = b_{kq} < b_{k,R_k+1}$.

Определим пространства вектор-функций

$$H_b^{l+2m,N}(\Omega)=\prod_j H_b^{l+2m}(\Omega_j),\qquad \mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma)=\prod_j \mathscr{H}_b^{l}(\Omega_j,\Gamma_j),$$
$$\mathscr{H}_b^{l}(\Omega_j,\Gamma_j)=H_b^{l}(\Omega_j)\times\prod_{\sigma,\mu}H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}).$$

Введем ограниченные операторы

$$\mathscr{L}^{\omega}=\bigl\{\mathscr{P}_j(D_y,D_z),\mathscr{B}^{\omega}_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)\bigr\}\colon\ H_b^{l+2m,N}(\Omega)\to\mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma),$$
$$\mathscr{L}^{\mathscr{G}}=\bigl\{\mathscr{P}_j(D_y,D_z),\mathscr{B}^{\mathscr{G}}_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)\bigr\}\colon\ H_b^{l+2m,N}(\Omega)\to\mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma).$$

Здесь[2]

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^{\omega}_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)U&=B_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)U_j|_{\Gamma_{j\sigma}}\\&\quad+\sum_{k,q,s}(B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,D_z)U_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}},\\ \mathscr{B}^{\mathscr{G}}_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)U&=B_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)U_j|_{\Gamma_{j\sigma}}\\&\quad+\sum_{k,q,s}(B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,D_z)U_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}},\end{aligned}$$

$\mathscr{P}_j(D_y,D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)$ и $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,D_z)$ – главные однородные части операторов $\mathscr{P}_j(0,D_y,D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(0,D_y,D_z)$ и $B_{j\sigma\mu kqs}(0,D_y,D_z)$ соответственно.

Далее будем для краткости записывать $\mathscr{P}_j$, $B_{j\sigma\mu}$, $B_{j\sigma\mu kqs}$, $\mathscr{B}^{\omega}_{j\sigma\mu}$ и $\mathscr{B}^{\mathscr{G}}_{j\sigma\mu}$ вместо $\mathscr{P}_j(D_y,D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)$, $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,D_z)$, $\mathscr{B}^{\omega}_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)$ и $\mathscr{B}^{\mathscr{G}}_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)$ соответственно.

Отметим, что оператор $\mathscr{B}^{\omega}_{j\sigma\mu}$ содержит нелокальные слагаемые с нелинейными преобразованиями $\omega'_{j\sigma kqs}$, тогда как оператор $\mathscr{B}^{\mathscr{G}}_{j\sigma\mu}$ – с линейными преобразованиями $\mathscr{G}_{j\sigma kqs}$. Таким образом, операторы $\mathscr{L}^{\omega}$ и $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}$ отвечают модельным задачам с нелинейными и линеаризованными преобразованиями соответственно.

Как уже отмечалось, задача с линейными в окрестности $\mathscr{K}_1$ преобразованиями аргумента изучена в [9]–[11]; в частности, доказана ее фредгольмова разрешимость. В § 2 настоящей работы будет показано, что оператор $\mathscr{L}^{\omega}$ не является малым или компактным возмущением оператора $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}$, как бы ни были малы носители функций U. Поэтому для доказательства фредгольмовой разрешимости задачи (1.2), (1.3) с нелинейными преобразованиями переменных мы заново получим априорные оценки и построим правый регуляризатор. Это будет сделано в § 4, 5.

[2] В дальнейшем рассматриваются функции U_k с компактным носителем, сосредоточенным в окрестности начала координат и таким, что $(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)\in\Omega_k$ при $x\in\operatorname{supp}U_k$; это обеспечивает корректность определения оператора $\mathscr{B}^{\omega}_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)$.

4. Доказательство априорных оценок и построение правого регуляризатора задачи в ограниченной области будет основано на обратимости оператора $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}$. Укажем условия, при которых оператор $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}$ является изоморфизмом. Для этого при $n \geqslant 3$ наряду с оператором в двугранных углах рассмотрим модельный оператор с параметром θ в плоских углах. Введем для любого угла $K = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < b' < \varphi < b'' < 2\pi\}$ пространство $E_b^l(K)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{E_b^l(K)} = \biggl(\sum_{|\alpha|\leqslant l} \int_K |y|^{2b}(|y|^{2(|\alpha|-l)}+1)|D_y^\alpha u(y)|^2\,dy\biggr)^{1/2}.$$

Через $E_b^{l-1/2}(\gamma)$ при $l \geqslant 1$ обозначим пространство следов на луче $\gamma \subset \overline{K}$ с нормой

$$\|\psi\|_{E_b^{l-1/2}(\gamma)} = \inf \|u\|_{E_b^l(K)}, \qquad u \in E_b^l(K)\colon\ u|_\gamma = \psi.$$

(Конструктивные определения следовых пространств $H_b^{l-1/2}(\Upsilon)$ и $E_b^{l-1/2}(\gamma)$, эквивалентные данным, см. в [25, § 1].)

Определим пространства вектор-функций

$$E_b^{l+2m,N}(K) = \prod_j E_b^{l+2m}(K_j), \qquad \mathscr{E}_b^{l,N}(K,\gamma) = \prod_j \mathscr{E}_b^l(K_j,\gamma_j),$$
$$\mathscr{E}_b^l(K_j,\gamma_j) = E_b^l(K_j) \times \prod_{\sigma,\mu} E_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}),$$

где $K_j = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon b_{j1} < \varphi < b_{j,R_j+1}\}$, $\gamma_{j\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon \varphi = b_{j\sigma}\}$.

Рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathscr{L}^{\mathscr{G}}(\theta) = \bigl\{\mathscr{P}_j(D_y,\theta), \mathscr{B}_{j\sigma\mu}^{\mathscr{G}}(D_y,\theta)\bigr\}\colon E_b^{l+2m,N}(K) \to \mathscr{E}_b^{l,N}(K,\gamma),$$

где θ – произвольная точка единичной сферы $S^{n-3} = \{\theta \in \mathbb{R}^{n-2} \colon |\theta| = 1\}$.

5. Запишем операторы $\mathscr{P}_j(D_y,0)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y,0)$, $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,0)$ в полярных координатах:

$$\mathscr{P}_j(D_y,0) = r^{-2m}\widetilde{\mathscr{P}}_j(\varphi, D_\varphi, rD_r),$$
$$B_{j\sigma\mu}(D_y,0) = r^{-m_{j\sigma\mu}}\widetilde{B}_{j\sigma\mu}(\varphi, D_\varphi, rD_r),$$
$$B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,0) = r^{-m_{j\sigma\mu}}\widetilde{B}_{j\sigma\mu kqs}(\varphi, D_\varphi, rD_r),$$

где $D_\varphi = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $D_r = -i\frac{\partial}{\partial r}$. Рассмотрим аналитическую оператор-функцию $\widetilde{\mathscr{L}}(\lambda)\colon W_2^{l+2m,N}(b_1,b_2) \to \mathscr{W}_2^{l,N}[b_1,b_2]$, определенную по формуле

$$\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathscr{G}}(\lambda)\widetilde{U} = \Bigl\{\widetilde{\mathscr{P}}_j(\varphi, D_\varphi, \lambda)\widetilde{U}_j,\ \widetilde{B}_{j\sigma\mu}(\varphi, D_\varphi,\lambda)\widetilde{U}_j(\varphi)|_{\varphi=b_{j\sigma}}$$
$$+ \sum_{k,q,s} e^{(i\lambda - m_{j\sigma\mu})\ln\chi_{j\sigma kqs}}\widetilde{B}_{j\sigma\mu kqs}(\varphi, D_\varphi,\lambda)\widetilde{U}_k(\varphi+\varphi_{j\sigma kqs})|_{\varphi=b_{j\sigma}}\Bigr\},$$

где

$$W_2^{l+2m,N}(b_1,b_2)=\prod_j W_2^{l+2m}(b_{j1},b_{j,R_j+1}),$$
$$\mathscr{W}_2^{l,N}[b_1,b_2]=\prod_j \mathscr{W}_2^{l}[b_{j1},b_{j,R_j+1}],$$
$$\mathscr{W}_2^{l}[b_{j1},b_{j,R_j+1}]=W_2^{l}(b_{j1},b_{j,R_j+1})\times\mathbb{C}^{2m}.$$

В силу [10, леммы 2.1, 2.2] существует конечно-мероморфная оператор-функция $(\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathscr{G}})^{-1}(\lambda)$ такая, что для λ, не являющегося ее полюсом, оператор $(\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathscr{G}})^{-1}(\lambda)$ есть ограниченный обратный к оператору $\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathscr{G}}(\lambda)$, а для каждого ее полюса λ_0 существует $\delta>0$ такое, что множество $\{\lambda\in\mathbb{C}\colon 0<|\operatorname{Im}\lambda-\operatorname{Im}\lambda_0|<\delta\}$ не содержит полюсов $(\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathscr{G}})^{-1}(\lambda)$.

Если $n=2$, то по теореме 2.1 из [10] оператор $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}$ – изоморфизм тогда и только тогда, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda=b+1-l-2m$ нет полюсов $(\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathscr{G}})^{-1}(\lambda)$.

Пусть $n\geqslant 3$. Предположим дополнительно, что система $\{B_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)\}_{\mu=1}^m$ нормальна на $\Gamma_{j\sigma}$ и порядки $m_{j\sigma\mu}$ операторов $B_{j\sigma\mu}(D_y,D_z)$, $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y,D_z)$ не превосходят $2m-1$. В этом случае в силу [13, теорема 9.1] отсутствие на прямой $\operatorname{Im}\lambda=b+1-l-2m$ полюсов $(\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathscr{G}})^{-1}(\lambda)$ необходимо и достаточно для того, чтобы оператор $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}(\theta)$ был фредгольмов. По теореме 3.3 из [10], если к тому же $\dim\ker(\mathscr{L}^{\mathscr{G}}(\theta))=\operatorname{codim}\mathscr{R}(\mathscr{L}^{\mathscr{G}}(\theta))=0$ при $l=0$ и всех $\theta\in S^{n-3}$, то оператор $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}$ – изоморфизм для любого l (см. соответствующий пример в [13, § 10]). Отметим, что если $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}$ – не изоморфизм, то оператор $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}(\theta)$ не будет фредгольмовым (см. [13, теорема 9.3]).

Поскольку операторы $\mathscr{L}^{\omega}$, $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}$, $\mathscr{L}^{\mathscr{G}}(\theta)$ и $\widetilde{\mathscr{L}}^{\mathscr{G}}(\lambda)$, отвечающие задаче (1.4), (1.5), зависят от выбора точки $g\in\mathscr{K}_1$, то обозначим их через $\mathscr{L}_g^{\omega}$, $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$, $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}(\theta)$ и $\widetilde{\mathscr{L}}_g^{\mathscr{G}}(\lambda)$ соответственно.

§ 2. Пример нелокальной задачи с нелинейным преобразованием переменных

В настоящем параграфе покажем на простейшем примере, что задача с нелинейным в окрестности $\mathscr{K}_1$ преобразованием не является малым или компактным возмущением задачи с соответствующим линейным преобразованием.

1. Предположим для простоты, что задача (1.2), (1.3) рассматривается в плоской области. Пусть модельная задача (1.4), (1.5), соответствующая одной из точек множества $\mathscr{K}_1$, имеет вид

$$\Delta u=f(y),\qquad y\in K,$$
$$u|_{\gamma_1}+u(\omega'(y))|_{\gamma_1}=g_1(y),\qquad y\in\gamma_1,$$
$$u|_{\gamma_2}=g_2(y),\qquad y\in\gamma_2.$$

Здесь $K=\{y\in\mathbb{R}^2: r>0,\ |\varphi|<\pi/2\}$ – плоский угол (в данном случае раствора π) со сторонами $\gamma_i=\{y\in\mathbb{R}^2: r>0,\ \varphi=(-1)^i\pi/2\}$, $i=1,2$. Пусть $\omega'(y)=\mu(\mathscr{G}y)$, где $\mathscr{G}$ – оператор поворота на угол $\pi/2$, отображающий сторону γ_1 на луч $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 \colon r > 0,\ \varphi = 0\}$;

$$\mu\colon (y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\,, y_2 + \frac{y_1^2}{\sqrt{1+y_1^2}} \right)$$

– бесконечно дифференцируемое преобразование, отображающее луч γ на кривую $\mu(\gamma)$, которая касается γ в начале координат (см. рис 2.1).

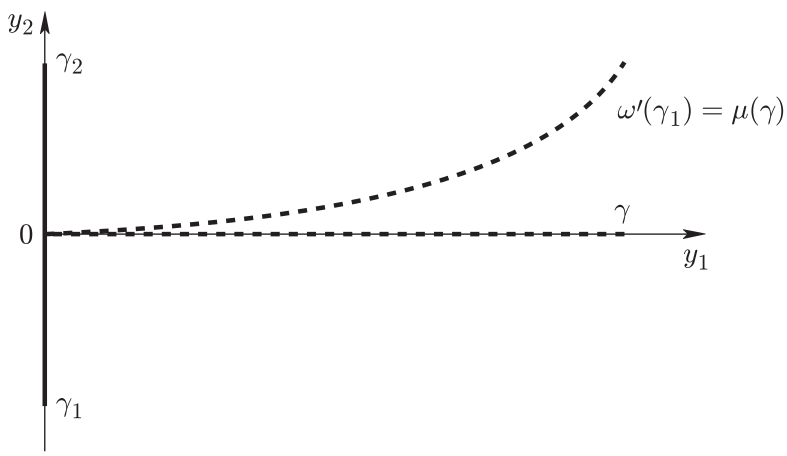

Рис. 2.1. Угол K раствора π

Операторы $\mathscr{L}^\omega, \mathscr{L}^\mathscr{G} \colon H_b^{l+2}(K) \to H_b^l(K) \times \prod_{i=1}^2 H_b^{l+3/2}(\gamma_i)$, соответствующие модельным задачам с нелинейным и линеаризованным преобразованием переменных, имеют вид

$$\mathscr{L}^\omega u = \bigl\{\Delta u,\ u|_{\gamma_1} + u(\omega'(y))|_{\gamma_1},\ u|_{\gamma_2}\bigr\},$$
$$\mathscr{L}^\mathscr{G} u = \bigl\{\Delta u,\ u|_{\gamma_1} + u(\mathscr{G}y)|_{\gamma_1},\ u|_{\gamma_2}\bigr\}.$$

Очевидно, ненулевой компонентой разности $\mathscr{L}^\mathscr{G} u - \mathscr{L}^\omega u$ будет выражение

$$u(\mathscr{G}y)|_{\gamma_1} - u(\omega'(y))|_{\gamma_1} = u(y)|_\gamma - u(\mu(y))|_\gamma.$$

Введем оператор $A_\varepsilon \colon H_b^{l+2}(K) \to H_b^{l+3/2}(\gamma)$ с областью определения $D(A_\varepsilon) = \bigl\{u \in H_b^{l+2}(K) \colon \operatorname{supp} u \subset \{r < \varepsilon\} \cap \overline{K}\bigr\}$, действующий по формуле

$$A_\varepsilon u(y) = u(y)|_\gamma - u(\mu(y))|_\gamma.$$

Докажем, что оператор A_ε нельзя сделать малым или компактным за счет выбора достаточно малого ε. Покажем это в случае, когда A_ε действует из $H_b^1(K)$ в $H_b^{1/2}(\gamma)$, общий случай рассматривается аналогично. Построим последовательность $u_\varepsilon \in D(A_\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, такую, что

$$\bigl\| u_\varepsilon|_\gamma - u_\varepsilon(\mu(\,\cdot\,))|_\gamma \bigr\|_{H_b^{1/2}(\gamma)} \geqslant c \|u_\varepsilon\|_{H_b^1(K)},$$

где $c > 0$ не зависит от ε.

Запишем сужение преобразования μ на луч γ в полярных координатах (φ, r):

$$\mu|_\gamma\colon (0,r)\mapsto(\Phi(r),r),$$

где $\Phi(r)=\operatorname{arctg} r$. Ясно, что $\Phi(0)=0$, $\Phi(1)=\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{\Phi}{r},\frac{d\Phi}{dr}\leqslant 1$ на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим преобразование

$$\widetilde{\mu}\colon(\varphi,r)\mapsto(\varphi+\Phi(r),r).$$

Очевидно, $u(\mu(y))|_\gamma=u(\widetilde{\mu}(y))|_\gamma$, так как $\mu|_\gamma=\widetilde{\mu}|_\gamma$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что преобразование μ имеет вид

$$\mu\colon(\varphi,r)\mapsto(\varphi+\Phi(r),r).$$

Отметим, что норма любой функции $u\in H_b^1(K)$, записанной в полярных координатах, эквивалентна следующему выражению:

$$\biggl(\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\int_0^\infty\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{2b-1}\bigl|(rD_r)^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_2}u(\varphi,r)\bigr|^2\,d\varphi\,dr\biggr)^{1/2}.$$

Сделаем замену переменных $r=e^{-t}$. Тогда преобразование μ в новых координатах (φ,t) запишется в виде

$$\mu\colon(\varphi,t)\mapsto(\varphi+\Phi(e^{-t}),t).$$

Полагая $v(\varphi,t)=u(\varphi,e^{-t})$, получим, что норма $\|u\|_{H_b^1(K)}$ эквивалентна норме

$$\|v\|_{W_{2,b}^1(Q)}=\biggl(\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2bt}|D_t^{\alpha_1}D_\varphi^{\alpha_2}v(\varphi,t)|^2\,d\varphi\,dt\biggr)^{1/2}, \qquad (2.1)$$

где $Q=\{t\in\mathbb{R}, |\varphi|<\pi/2\}$, а $W_{2,b}^1(Q)$ – пространство с нормой (2.1). Очевидно, $W_{2,0}^1(Q)$ совпадает с пространством Соболева $W_2^1(Q)$.

Поскольку нормы $\|v\|_{W_{2,b}^1(Q)}$ и $\|e^{-bt}v\|_{W_2^1(Q)}$ эквивалентны, достаточно изучить случай $b=0$. Далее будем рассматривать функции $v(\varphi,t)$, носитель которых содержится в полосе $\{|\varphi|<\pi/2\}$. Продолжая такие функции v нулем при $|\varphi|\geqslant\pi/2$, получим $\|v\|_{W_2^1(Q)}=\|v\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}$.

Таким образом, требуемое утверждение будет доказано, если мы построим последовательность $v_s\in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\operatorname{supp} v_s\subset\{t>2s, |\varphi|<\pi/2\}$ и

$$\|v_s(0,t)-v_s(\Phi(e^{-t}),t)\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})}\geqslant c\|v_s\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)},$$

где $c>0$ не зависит от s.

Для этого перейдем от переменных (φ, t) к переменным (φ, τ): введем множества

$$Q_s = \left\{|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2},\ 2s \leqslant \tau \leqslant 2s+1\right\}, \qquad s = 0, 1, 2, \dots,$$

и сделаем замену

$$\varphi = F(\theta, \tau), \qquad t = \tau. \tag{2.2}$$

Здесь $F(\theta,\tau) = \theta e^{2s}\Phi(e^{-\tau})$ при $(\theta,\tau) \in Q_s$, $s = 0,1,2,\dots$, и $F(\theta,\tau)$ продолжена на множество $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{s=0}^{\infty} Q_s$ так, что преобразование (2.2) остается непрерывно дифференцируемым с якобианом $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ таким, что

$$0 < c_1 \leqslant \left|\frac{\partial F}{\partial \theta}\right| \leqslant c_2 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^2. \tag{2.3}$$

Такое продолжение существует. Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = e^{2s}\Phi(e^{-\tau}), \qquad \frac{\partial F}{\partial \tau} = -\theta e^{-\tau+2s}\frac{d\Phi}{dr}\bigg|_{r=e^{-\tau}}, \qquad (\theta,\tau) \in Q_s,$$

поэтому (в силу указанных выше свойств функции Φ) в $\bigcup_{s=0}^{\infty} Q_s$ функция $F(\theta,\tau)$ непрерывно дифференцируема по θ и τ и выполнены неравенства (2.3).

Легко видеть, что при замене переменных (2.2) прообразом отрезка $Q_s \cap \{\theta = 0\}$ является отрезок прямой $\{\varphi = 0\}$, а преобразование μ на Q_s имеет вид

$$\mu\colon (\theta,\tau) \mapsto (\theta + e^{-2s}, \tau), \qquad (\theta,\tau) \in Q_s. \tag{2.4}$$

Рассмотрим функции $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $\operatorname{supp} f \subset \{|\theta| < \frac{\pi}{2}\}$, $f(0) \neq f(1)$, $\operatorname{supp} g \subset \{0 < \tau < 1\}$, $g(\tau) \not\equiv 0$. Зададим последовательность $w_s(\theta,\tau) = f_s(\theta)g_s(\tau)$, где

$$f_s(\theta) = f(\theta e^{2s}), \qquad g_s(\tau) = g((\tau - 2s)e^{2s}), \qquad s = 0,1,2,\dots.$$

Очевидно, $\operatorname{supp} w_s \subset Q_s$ (см. рис. 2.2).

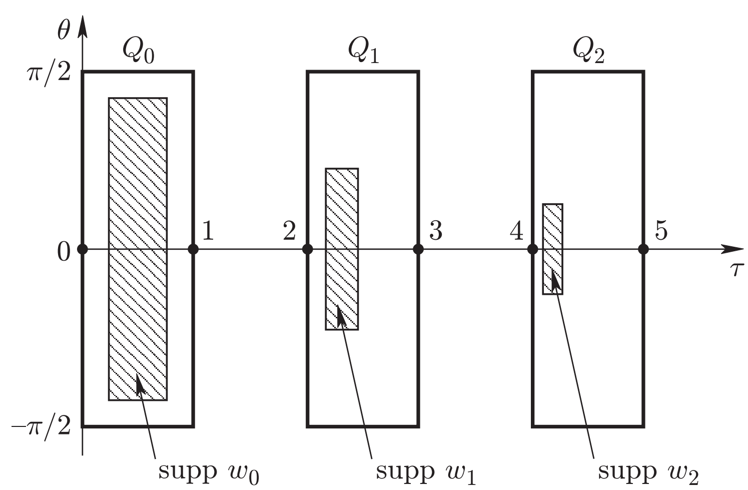

Рис. 2.2. Носители функций w_s содержатся в заштрихованных областях

Далее, имеем

$$\|w_s\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^2)} = \|f_s\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\|g_s\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \left\|\frac{df_s}{d\theta}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\|g_s\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \|f_s\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\left\|\frac{dg_s}{d\tau}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$= e^{-4s}\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\|g\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \left\|\frac{df}{d\theta}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\|g\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\left\|\frac{dg}{d\tau}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \qquad (2.5)$$

Аналогично, используя формулу для нормы в $W_2^{1/2}(\mathbb{R})$ (см. [26])

$$\|g\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} = \left(\|g\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|g(\tau_1)-g(\tau_2)|^2}{|\tau_1-\tau_2|^2}\,d\tau_1\,d\tau_2\right)^{1/2}$$

и вид (2.4) преобразования μ в координатах (θ,τ), получим

$$\big\|w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\,\cdot\,))|_{\theta=0}\big\|^2_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} = \big|f_s(0) - f_s(e^{-2s})\big|^2\|g_s\|^2_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})}$$

$$\geqslant |f(0)-f(1)|^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|g(\tau_1)-g(\tau_2)|^2}{|\tau_1-\tau_2|^2}\,d\tau_1\,d\tau_2. \qquad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$\big\|w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\,\cdot\,))|_{\theta=0}\big\|^2_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} \geqslant c\|w_s\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}.$$

2. Используя последовательность w_s, легко показать, что оператор A_ε не является компактным ни при каком ε. Действительно, последовательность w_s ограничена в $W_2^1(\mathbb{R}^2)$. Однако из последовательности $w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\,\cdot\,))|_{\theta=0}$ нельзя выделить сходящуюся в $W_2^{1/2}(\mathbb{R})$ подпоследовательность, так как согласно (2.6) выражение

$$\big\|\big[w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\,\cdot\,))|_{\theta=0}\big] - \big[w_h|_{\theta=0} - w_h(\mu(\,\cdot\,))|_{\theta=0}\big]\big\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})}$$

$$= \big\|w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\,\cdot\,))|_{\theta=0}\big\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} + \big\|w_h|_{\theta=0} - w_h(\mu(\,\cdot\,))|_{\theta=0}\big\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})}$$

при любых натуральных $s \neq h$ ограничено снизу положительной константой.

§ 3. Преобразования переменных вблизи множества $\mathscr{K}_1$

Как следует из результатов § 2, для доказательства фредгольмовой разрешимости задачи с нелинейными в окрестности множества $\mathscr{K}_1$ преобразованиями необходимо заново получить априорные оценки решений и построить правый регуляризатор. Для этого предварительно изучим некоторые свойства преобразований ω_{is} вблизи множества $\mathscr{K}_1$.

Зафиксируем точку $g \in \mathscr{K}_1$, для каждого $j = 1,\dots,N$, $N = N(g)$, сделаем замену переменных $x \mapsto x'(g,j)$ и рассмотрим преобразования $\omega'_{j\sigma kqs}(y,z)$ при $(y,z) \in \mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon_0\}$. Число ε_0 предполагается настолько малым, что $\overline{\mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)} \subset \widehat{\mathscr{V}}_j(0)$, $j = 1,\dots,N$. Ниже на ε_0 будут наложены дополнительные условия.

1. Прежде чем изучать свойства преобразований ω_{is}, получим одно вспомогательное утверждение, которое будет использовано при доказательстве леммы о представлении преобразований ω_{is} в полярных координатах (см. лемму 3.2).

Лемма 3.1. *Пусть* $h = h(r, z)$ *– такая функция, что* $|D_r^k D_z^\alpha h| \leqslant c_{k\alpha}$ *при* $r \geqslant 0$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $(r^2 + |z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0$. *Пусть* $f(r, z) = r^{-l} h(r, z)$ *при некотором* $l \in \mathbb{N}$. *Тогда если* $|f| \leqslant c$, *то* $|D_r^k f| \leqslant c_k$ *при* $r \geqslant 0$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $(r^2+|z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0$ *для любого* $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство. 1) Пусть $l = 1$, т. е. $f(r, z) = r^{-1} h(r, z)$. По формуле Лейбница

$$\frac{\partial^k f(r,z)}{\partial r^k} = \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s k!}{(k-s)!}\, r^{-s-1} \frac{\partial^{k-s} h(r,z)}{\partial r^{k-s}}\,.$$

Разлагая $\frac{\partial^{k-s} h}{\partial r^{k-s}}$ по формуле Тейлора в окрестности $r = 0$ и используя ограниченность производных функции h, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k f(r,z)}{\partial r^k} &= \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^s k!}{(k-s)!}\, r^{-s-1} \left[\sum_{p=0}^{s} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{k-s+p} h}{\partial r^{k-s+p}}(0,z) r^p + \frac{\partial^{k+1} h}{\partial r^{k+1}}(\varkappa_{rz} r, z) r^{s+1} \right] \\
&= \sum_{s=0}^{k} \sum_{p=0}^{s} \frac{(-1)^s k!}{(k-s)!\, p!} \frac{\partial^{k-s+p} h}{\partial r^{k-s+p}}(0,z) r^{-s-1+p} + O(1),
\end{aligned}$$

где $\varkappa_{rz} \in (0, 1)$.

В последней сумме сделаем замену $p' = s - p$ и вновь обозначим p' через p. В результате получим

$$\frac{\partial^k f(r,z)}{\partial r^k} = \sum_{s=0}^{k} \sum_{p=0}^{s} \frac{(-1)^s k!}{(k-s)!\,(s-p)!} \frac{\partial^{k-p} h}{\partial r^{k-p}}(0,z) r^{-p-1} + O(1).$$

Выпишем коэффициент $a_p(z)$ при r^{-p-1} в правой части последнего тождества:

$$\begin{aligned}
a_p(z) &= \frac{\partial^{k-p} h}{\partial r^{k-p}}(0,z) \sum_{s=p}^{k} \frac{(-1)^s k!}{(k-s)!\,(s-p)!} \\
&= \frac{\partial^{k-p} h}{\partial r^{k-p}}(0,z)(-1)^p \sum_{s=0}^{k-p} k(k-1)\cdots(k-(s+p)+1) \frac{1}{s!}(-1)^s, \\
&\quad p = 0, \dots, k.
\end{aligned}$$

Поскольку $|r^{-1} h(r, z)| \leqslant c$ по условию, то $h(0, z) \equiv 0$; следовательно, $a_k(z) \equiv 0$. С другой стороны, заметим, что при $0 \leqslant p < k$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d^p}{dt^p}(t+1)^k \bigg|_{t=-1} &= \left(\sum_{s=0}^{k-p} k(k-1)\cdots(k-(s+p)+1) \frac{1}{s!} t^s \right) \bigg|_{t=-1} \\
&= \sum_{s=0}^{k-p} k(k-1)\cdots(k-(s+p)+1) \frac{1}{s!}(-1)^s.
\end{aligned}$$

Таким образом, $a_p(z) \equiv 0$ при всех $p = 0, \dots, k$, и лемма при $l = 1$ доказана.

2) При $l \geqslant 2$ применим метод математической индукции. Пусть лемма верна для $l = 1, \ldots, l_1 - 1$. Докажем ее для $l = l_1$. Имеем $f = r^{-1} f_1$, где $f_1 = r^{-(l_1-1)} h$. Так как $|f| \leqslant c$, то $|f_1| \leqslant c$ и, следовательно, по индуктивному предположению (при $l = l_1 - 1$) выполняется оценка $|D_r^k D_z^\alpha f_1| \leqslant c_{k\alpha}$. Вновь применяя индуктивное предположение (теперь при $l = 1$), получаем утверждение леммы для $r^{-1} f_1$, т.е. для $f = r^{-l_1} h$. Лемма доказана.

Теперь приступим к изучению преобразований ω. Следующая лемма описывает структуру нелинейных преобразований $\omega'_{j\sigma kqs}$ в цилиндрических координатах. Такое представление оказывается более удобным в случае, когда задача рассматривается в весовых пространствах.

Лемма 3.2. *При достаточно малом ε_0 преобразование*

$$\omega'_{j\sigma kqs}(y, z)|_{\Gamma_{j\sigma} \cap \mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)}$$

представимо в полярных координатах в виде

$$(b_{j\sigma}, r) \mapsto \big(b_{kq} + \Phi_{j\sigma kqs}(r, z),\ \chi_{j\sigma kqs} r + R_{j\sigma kqs}(r, z)\big), \quad (r^2 + |z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0, \tag{3.1}$$

где $\Phi_{j\sigma kqs}(r, z)$, $R_{j\sigma kqs}(r, z)$ – бесконечно гладкие функции такие, что

$$|\Phi_{j\sigma kqs}| \leqslant c\varepsilon_0, \qquad |R_{j\sigma kqs}| \leqslant c\varepsilon_0 r, \tag{3.2}$$

$$|D_r^k D_z^\alpha \Phi_{j\sigma kqs}| \leqslant c_{k\alpha}, \qquad |D_r^k D_z^\alpha (R_{j\sigma kqs}/r)| \leqslant c_{k\alpha}. \tag{3.3}$$

Здесь $k + |\alpha| \geqslant 1$; $c, c_{k\alpha} > 0$ не зависят от ε_0.

Доказательство. Пусть $\omega'_{j\sigma kqs}(y, z) = \big(\omega^1_{j\sigma kqs}(y, z), \omega^2_{j\sigma kqs}(y, z)\big)$. По условию 1.4 $\omega^i_{j\sigma kqs}(0, z) \equiv 0$, $i = 1, 2$, поэтому, используя формулу Тейлора в окрестности $r = 0$, имеем

$$\omega^i_{j\sigma kqs}(r \cos b_{j\sigma}, r \sin b_{j\sigma}, z) = \left(\frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0, z) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0, z) \sin b_{j\sigma} \right) r + O(r^2). \tag{3.4}$$

Здесь $O(r^2)$ – некоторая функция, не превосходящая по модулю cr^2, где c не зависит от r и z, в чем легко убедиться, записав остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа и воспользовавшись гладкостью преобразований $\omega^i_{j\sigma kqs}$. Разлагая $\frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0, z)$ и $\frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0, z)$ по формуле Тейлора в окрестности $z = 0$, из (3.4) получим

$$\omega^i_{j\sigma kqs} = \left(\frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma} \right) r + O(|z|) r + O(r^2). \tag{3.5}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \omega^1_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^1_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \omega^2_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^2_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma}$$

не обращаются в нуль одновременно; это вытекает из невырожденности матрицы Якоби преобразования $(y,z) \mapsto (\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)$ в начале координат. Предположим для определенности, что

$$\frac{\partial \omega^1_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0)\cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^1_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0)\sin b_{j\sigma} \neq 0. \tag{3.6}$$

Тогда в силу (3.5) при достаточно малом ε_0

$$\omega^1_{j\sigma kqs} \neq 0 \quad \text{для} \quad (r^2+|z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0 \tag{3.7}$$

и преобразование $\omega'_{j\sigma kqs}|_{\Gamma_{j\sigma}\cap\mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)}$ в полярных координатах имеет вид

$$(b_{j\sigma}, r) \mapsto \left(\operatorname{arctg}\frac{\omega^2_{j\sigma kqs}}{\omega^1_{j\sigma kqs}} + \pi l,\ \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\omega^i_{j\sigma kqs})^2}\right), \tag{3.8}$$

где $l=0$, если $\omega^1_{j\sigma kqs}>0$, $\omega^2_{j\sigma kqs}\geqslant 0$; $l=1$, если $\omega^1_{j\sigma kqs}<0$; $l=2$, если $\omega^1_{j\sigma kqs}>0$, $\omega^2_{j\sigma kqs}<0$.

Из равенства (3.5) и формулы Тейлора имеем

$$\operatorname{arctg}\frac{\omega^2_{j\sigma kqs}}{\omega^1_{j\sigma kqs}} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\partial \omega^2_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0)\cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^2_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0)\sin b_{j\sigma}}{\frac{\partial \omega^1_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0)\cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^1_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0)\sin b_{j\sigma}} + O(|z|) + O(r),$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(\omega^i_{j\sigma kqs})^2} = r\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0)\cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0)\sin b_{j\sigma}\right)^2} + O(|z|)r + O(r^2).$$

Полагая

$$b_{kq} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{\partial \omega^2_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0)\cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^2_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0)\sin b_{j\sigma}}{\frac{\partial \omega^1_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0)\cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^1_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0)\sin b_{j\sigma}} + \pi l,$$

$$\chi_{j\sigma kqs} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_1}(0)\cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega^i_{j\sigma kqs}}{\partial y_2}(0)\sin b_{j\sigma}\right)^2},$$

получим формулу (3.1) и неравенства (3.2).

Докажем первое неравенство в (3.3). Согласно (3.7) имеем

$$\left|\frac{\omega^2_{j\sigma kqs}}{\omega^1_{j\sigma kqs}}\right| \leqslant c \quad \text{при} \quad (r^2+|z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0.$$

Поэтому в силу (3.1) и (3.8) достаточно доказать ограниченность частных производных $D_r^k D_z^\alpha \frac{\omega^2_{j\sigma kqs}}{\omega^1_{j\sigma kqs}}$. Запишем

$$\frac{\omega^2_{j\sigma kqs}}{\omega^1_{j\sigma kqs}} = \frac{r^{-1}\omega^2_{j\sigma kqs}}{r^{-1}\omega^1_{j\sigma kqs}}.$$

Из соотношений (3.5) и (3.6) вытекает, что $r^{-1}\omega^1_{j\sigma kqs} \neq 0$ при $(r^2+|z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0$; поэтому достаточно доказать, что

$$\left|D_r^k D_z^\alpha (r^{-1}\omega^i_{j\sigma kqs})\right| = \left|D_r^k (r^{-1} D_z^\alpha \omega^i_{j\sigma kqs})\right| \leqslant c_{k\alpha}, \qquad i = 1, 2.$$

Однако $D_z^\alpha \omega^i_{j\sigma kqs}$ – бесконечно гладкая при $(r^2+|z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0$ функция, и, так как $\omega^i_{j\sigma kqs}(0,z) \equiv 0$, имеет место соотношение $D_z^\alpha \omega^i_{j\sigma kqs} = O(r)$. Следовательно, $|r^{-1} D_z^\alpha \omega^i_{j\sigma kqs}| \leqslant c_\alpha$. Теперь требуемое утверждение следует из леммы 3.1.

Аналогично доказывается и второе неравенство в (3.3). Из (3.1) и (3.8) следует соотношение

$$\frac{R_{j\sigma kqs}(r,z)}{r} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \frac{(\omega^i_{j\sigma kqs})^2}{r^2}} - \chi_{j\sigma kqs}.$$

В силу (3.5) и (3.6) имеем $\sum_{i=1}^2 (\omega^i_{j\sigma kqs})^2/r^2 \neq 0$ при $(r^2+|z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0$; следовательно, достаточно показать, что

$$\left| D_r^k D_z^\alpha \sum_{i=1}^{2} \frac{(\omega^i_{j\sigma kqs})^2}{r^2} \right| \leqslant c_{k\alpha}.$$

Однако $D_z^\alpha \sum_{i=1}^2 (\omega^i_{j\sigma kqs})^2$ – бесконечно гладкая при $(r^2+|z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0$ функция, и, так как $\omega^i_{j\sigma kqs}(0,z) \equiv 0$, имеет место соотношение $D_z^\alpha \sum_{i=1}^2 (\omega^i_{j\sigma kqs})^2 = O(r^2)$. Значит, $\left|D_z^\alpha \sum_{i=1}^2 (\omega^i_{j\sigma kqs})^2/r^2\right| \leqslant c_\alpha$, и вновь необходимое утверждение следует из леммы 3.1. Лемма доказана.

2. Обозначим $\delta = \min\{b_{j,q+1} - b_{jq}\}/2,\ j = 1, \dots, N,\ q = 1, \dots, R_j,\ d_1 = \min\{1, \chi_{j\sigma kqs}\}/2,\ d_2 = 2\max\{1, \chi_{j\sigma kqs}\}$. Пусть ε_0 настолько мало, что

$$|\Phi_{j\sigma kqs}| \leqslant \delta/2, \qquad |R_{j\sigma kqs}| \leqslant \chi_{j\sigma kqs} r/2 \ \text{ при } \ (r^2+|z|^2)^{1/2} \leqslant \varepsilon_0/d_1. \tag{3.9}$$

Существование такого ε_0 вытекает из леммы 3.2.

Введем бесконечно дифференцируемые функции $\zeta_{j\sigma,i}(\varphi),\ \zeta_{kq,i}(\varphi)$ такие, что

$$\begin{aligned} &\zeta_{j\sigma,i}(\varphi) = 1 \ \text{ для } \ |b_{j\sigma} - \varphi| \leqslant \delta/2^{i+1}, \\ &\zeta_{j\sigma,i}(\varphi) = 0 \ \text{ для } \ |b_{j\sigma} - \varphi| \geqslant \delta/2^{i}, \\ &\zeta_{kq,i}(\varphi) = \zeta_{j\sigma,i}(\varphi - \varphi_{j\sigma kq}), \qquad i = 0, \dots, 4. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Очевидно, $\zeta_{kq,i}(\varphi) = 1$ для $|b_{kq} - \varphi| \leqslant \delta/2^{i+1}$ и $\zeta_{kq,i}(\varphi) = 0$ для $|b_{kq} - \varphi| \geqslant \delta/2^i$.

Рассмотрим преобразование $\widetilde{\omega}'_{j\sigma kqs}(y,z)$, действующее в полярных координатах по формуле

$$(\varphi, r) \mapsto \big(\varphi + \varphi_{j\sigma kq} + \Phi_{j\sigma kqs}(r,z),\ \chi_{j\sigma kqs} r + R_{j\sigma kqs}(r,z)\big). \tag{3.11}$$

В силу леммы 3.2 имеем

$$\widetilde{\omega}'_{j\sigma kqs}(y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}\cap\mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)} = \omega'_{j\sigma kqs}(y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}\cap\mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)};$$

поэтому далее предположим, что преобразование $\omega'_{j\sigma kqs}(y,z)$ задается формулой (3.11). Теперь $\omega'_{j\sigma kqs}(y,z)$, вообще говоря, может иметь особенность в начале координат, так как новое преобразование $\omega'_{j\sigma kqs}(y,z)$ совпадает с прежним $\omega'_{j\sigma kqs}(y,z)$ только на $\Gamma_{j\sigma}\cap\mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)$.

Для любой функции $W(y,z)$ положим $\widehat{W}(y,z) = W(\omega'_{j\sigma kqs}(\mathscr{G}^{-1}_{j\sigma kqs}y,z),z)$. В силу леммы 3.2 преобразование $\omega'_{j\sigma kqs}(\mathscr{G}^{-1}_{j\sigma kqs}y,z)$ в полярных координатах имеет вид

$$(\varphi, r) \mapsto \big(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r,z),\ r + R'_{j\sigma kqs}(r,z)\big), \tag{3.12}$$

где $\Phi'_{j\sigma kqs}(r,z) = \Phi_{j\sigma kqs}(\chi^{-1}_{j\sigma kqs}r,z)$, $R'_{j\sigma kqs}(r,z) = R_{j\sigma kqs}(\chi^{-1}_{j\sigma kqs}r,z)$. Легко видеть, что $\Phi'_{j\sigma kqs}$ и $R'_{j\sigma kqs}$ также удовлетворяют неравенствам (3.2), (3.3).

Лемма 3.3. *При достаточно малом ε_0 для любой функции $W \in H^l_b(\Omega_k)$ такой, что $\operatorname{supp} W \subset \overline{\Omega}_k \cap \mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)$, имеем $\zeta_{kq,1}\widehat{W} \in H^l_b(\Omega_k)$ и*

$$\|\zeta_{kq,1}\widehat{W}\|_{H^l_b(\Omega_k)} \leqslant c\|W\|_{H^l_b(\Omega_k)},$$

где $q = 2,\dots,R_k$; $c > 0$ не зависит от W и ε_0.

Доказательство. При доказательстве леммы будем пользоваться следующим очевидным утверждением:

$$W \in H^l_b(\Omega_k) \quad\iff\quad D^\alpha W \in H^0_{b+|\alpha|-l}(\Omega_k),\quad |\alpha| \leqslant l. \tag{3.13}$$

Из формулы (3.12) и неравенств (3.9) следует, что преобразование (3.12) отображает $\overline{\mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)} \cap \{x\colon |\varphi - b_{kq}| < \delta\} \cap \Omega_k$ в Ω_k при $q = 2,\dots,R_k$. Кроме того, из неравенств (3.2), (3.3) следует, что модуль якобиана преобразования (3.12) при малых ε_0 ограничен и отличен от нуля в $\overline{\mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)} \cap \{x\colon |\varphi - b_{kq}| < \delta\} \cap \Omega_k$; отсюда вытекает справедливость леммы при $l = 0$ с функцией $\zeta_{kq,0}$ вместо $\zeta_{kq,1}$.

Рассмотрим функции $\zeta^p_{kq,0} \in C^\infty_0(\mathbb{R})$, $p = 0,\dots,l$, такие, что $\zeta^0_{kq,0} = \zeta_{kq,0}$, $\zeta^l_{kq,0} = \zeta_{kq,1}$, $\zeta^{p-1}_{kq,0}(\varphi) = 1$ при $\varphi \in \operatorname{supp}\zeta^p_{kq,0}$, $p = 1,\dots,l$. Пусть лемма верна при $l = p-1$ с функцией $\zeta^{p-1}_{kq,0}$ вместо $\zeta_{kq,1}$; докажем, что она верна при $l = p$ с функцией $\zeta^p_{kq,0}$ вместо $\zeta_{kq,1}$, $p \geqslant 1$.

Итак, пусть $W \in H_b^p(\Omega_k)$; тогда

$$\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \varphi},\ \frac{\partial W}{\partial r},\ \frac{\partial W}{\partial z_\xi} \in H_b^{p-1}(\Omega_k), \qquad \xi = 1, \ldots, n-2.$$

Следовательно, по индуктивному предположению

$$\zeta_{kq,0}^{p-1}\left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \varphi}}\right),\ \zeta_{kq,0}^{p-1}\widehat{\frac{\partial W}{\partial r}},\ \zeta_{kq,0}^{p-1}\widehat{\frac{\partial W}{\partial z_\xi}} \in H_b^{p-1}(\Omega_k).$$

Отсюда и из соотношений

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial \varphi} = \left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \varphi}}\right)\left(1 + \frac{R'_{j\sigma qks}}{r}\right),\\
\frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial r} = \left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \varphi}}\right)\left(1 + \frac{R'_{j\sigma kqs}}{r}\right) r\, \frac{\partial \Phi'_{j\sigma kqs}}{\partial r} + \widehat{\frac{\partial W}{\partial r}}\left(1 + \frac{\partial R'_{j\sigma kqs}}{\partial r}\right),\\
\frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial z_\xi} = \left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \varphi}}\right)\left(1 + \frac{R'_{j\sigma kqs}}{r}\right) r\, \frac{\partial \Phi'_{j\sigma kqs}}{\partial z_\xi} + \widehat{\frac{\partial W}{\partial r}}\, \frac{\partial R'_{j\sigma kqs}}{\partial z_\xi} + \widehat{\frac{\partial W}{\partial z_\xi}},
\end{gathered} \tag{3.14}$$

неравенств (3.2), (3.3) и леммы 2.1 из [27] получим[3]

$$\zeta_{kq,0}^{p-1}\frac{1}{r}\frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi},\ \zeta_{kq,0}^{p-1}\frac{\partial \widehat{W}}{\partial r},\ \zeta_{kq,0}^{p-1}\frac{\partial \widehat{W}}{\partial z_\xi} \in H_b^{p-1}(\Omega_k). \tag{3.15}$$

Кроме того, из соотношения $W \in H_b^p(\Omega_k)$, вложения $H_b^p(\Omega_k) \subset H_{b-p}^0(\Omega_k)$ и утверждения леммы при $l = 0$ получим $\zeta_{kq,0}^p \widehat{W} \in H_{b-p}^0(\Omega_k)$. Отсюда и из (3.13), (3.15) следует, что $D^\alpha(\zeta_{kq,0}^p \widehat{W}) \in H_{b+|\alpha|-p}^0(\Omega_k)$, $|\alpha| \leqslant p$. Снова используя (3.13), получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Таким образом, оператор $W \mapsto \zeta_{kq,1}\widehat{W}$ является ограниченным в $H_b^l(\Omega_k)$.

Лемма 3.4. *Для любой функции $W \in H_b^l(\Omega_k)$ такой, что $\operatorname{supp} W \subset \overline{\Omega}_k \cap \mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)$, и любого мультииндекса γ, $1 \leqslant |\gamma| \leqslant l$, выполнено неравенство*

$$\big\|\zeta_{kq,2} D^\gamma \widehat{W} - \zeta_{kq,2}\widehat{D^\gamma W}\big\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \leqslant c\varepsilon_0 \|W\|_{H_b^l(\Omega_k)}, \tag{3.16}$$

где $q = 2, \ldots, R_k$; $c > 0$ не зависит от W и ε_0.

Доказательство. Рассмотрим функции $\zeta_{kq,1}^p \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $p = 1, \ldots, l$, такие, что $\zeta_{kq,1}^1 = \zeta_{kq,1}$, $\zeta_{kq,1}^l = \zeta_{kq,2}$, $\zeta_{kq,1}^{p-1}(\varphi) = 1$ при $\varphi \in \operatorname{supp} \zeta_{kq,1}^p$, $p = 2, \ldots, l$.

[3] Лемма 2.1 из [27], а также используемые далее леммы 2.2, 3.5, 3.6 из [27] доказаны В. А. Кондратьевым для областей с угловыми или коническими точками, однако легко видеть, что она остается справедливой и для рассматриваемых областей с ребрами.

Пусть $|\gamma| = 1$; тогда неравенство (3.16) достаточно доказать для случая, когда вместо оператора D^γ подставлены операторы $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial z_\xi}$. Рассмотрим, например, оператор $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ (остальные операторы рассматриваются аналогично). Из первого соотношения (3.14) и формулы Лейбница имеем

$$\begin{aligned}\left\|\zeta^1_{kq,1}\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\varphi} - \zeta^1_{kq,1}\left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}}\right)\right\|^2_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} &= \left\|\zeta^1_{kq,1}\left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}}\right)\frac{R'_{j\sigma qks}}{r}\right\|^2_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} \\ \leqslant k_1\sum_{|\alpha|\leqslant l-1}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_{\Omega_k} &r^{2(b+|\alpha|-(l-1))}\left|D^{\alpha-\beta}\frac{R'_{j\sigma qks}}{r}\right|^2 \\ &\times\left|D^\beta\left(\zeta^1_{kq,1}\left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}}\right)\right)\right|^2 dx.\end{aligned}$$

Отсюда и из последних неравенств в (3.2) и (3.3) получим

$$\left\|\zeta^1_{kq,1}\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{W}}{\partial\varphi} - \zeta^1_{kq,1}\left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}}\right)\right\|^2_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} \leqslant k_2\varepsilon_0^2\left\|\zeta^1_{kq,1}\left(\widehat{\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}}\right)\right\|^2_{H_b^{l-1}(\Omega_k)}. \qquad (3.17)$$

Оценка (3.17) и лемма 3.3 доказывают лемму при $|\gamma| = 1$ с функцией $\zeta^1_{kq,1}$ вместо $\zeta_{kq,2}$.

Предположим, что лемма верна для $1 \leqslant |\gamma| \leqslant p-1$ с функцией $\zeta^{p-1}_{kq,1}$ вместо $\zeta_{kq,2}$. Докажем, что она верна для $|\gamma| = p$ с функцией $\zeta^p_{kq,1}$ вместо $\zeta_{kq,2}$, $p \geqslant 2$. Имеем

$$\begin{aligned}&\|\zeta^p_{kq,1}D^\gamma\widehat{W} - \zeta^p_{kq,1}\widehat{D^\gamma W}\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \\ &\qquad\leqslant \|\zeta^p_{kq,1}D^{|\gamma|-1}(D^1\widehat{W}) - \zeta^p_{kq,1}D^{|\gamma|-1}\widehat{D^1W}\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \\ &\qquad\quad + \|\zeta^p_{kq,1}D^{|\gamma|-1}\widehat{D^1W} - \zeta^p_{kq,1}\widehat{D^{|\gamma|-1}(D^1W)}\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \\ &\qquad\leqslant k_3\big(\|\zeta^{p-1}_{kq,1}D^1\widehat{W} - \zeta^{p-1}_{kq,1}\widehat{D^1W}\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} \\ &\qquad\quad + \|\zeta^p_{kq,1}D^{|\gamma|-1}\widehat{D^1W} - \zeta^p_{kq,1}\widehat{D^{|\gamma|-1}(D^1W)}\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)}\big), \qquad (3.18)\end{aligned}$$

где $D^{|\gamma|-1}$ и D^1 – некоторые обобщенные производные порядков $|\gamma|-1$ и 1 соответственно. В силу индуктивного предположения для каждой из двух норм в правой части (3.18) справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|\zeta^{p-1}_{kq,1}D^1\widehat{W} - \zeta^{p-1}_{kq,1}\widehat{D^1W}\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} &\leqslant k_4\varepsilon_0\|W\|_{H_b^l(\Omega_k)}, \\ \|\zeta^p_{kq,1}D^{|\gamma|-1}\widehat{D^1W} - \zeta^p_{kq,1}\widehat{D^{|\gamma|-1}(D^1W)}\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} &\leqslant k_5\varepsilon_0\|D^1W\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} \\ &\leqslant k_6\varepsilon_0\|W\|_{H_b^l(\Omega_k)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.18) вытекает требуемое утверждение. Лемма доказана.

По сути, множитель ε_0 возникает в оценке (3.16) за счет того, что как уменьшаемое, так и вычитаемое в левой части неравенства содержат одно и то же преобразование переменных $\omega'_{j\sigma kqs}(\mathscr{G}^{-1}_{j\sigma kqs}y, z)$, но уменьшаемое есть производная от преобразованной функции, а вычитаемое – преобразование от производной.

Лемма 3.5. *Для любой функции* $U_k \in H_b^{l+2m}(\Omega_k)$ *такой, что* $\operatorname{supp} U_k \subset \overline{\Omega}_k \cap \mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)$, *выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}\big\|(B_{j\sigma\mu kqs}U_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} &\\ - (B_{j\sigma\mu kqs}U_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} &\\ \leqslant c\big(\varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} + \|\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}\big), &\end{aligned} \tag{3.19}$$

где $c>0$ *не зависит от* U *и* ε_0.

Доказательство. Используя непрерывность оператора следа в весовых пространствах, получим

$$\begin{aligned}\big\|(B_{j\sigma\mu kqs}U_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} &\\ - (B_{j\sigma\mu kqs}U_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} &\\ \leqslant k_1\|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}U_k - \zeta_{kq,4}\widehat{B_{j\sigma\mu kqs}U_k}\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} &\\ \leqslant k_1\big(\|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}U_k - \zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} &\\ + \|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}\widehat{U}_k - \zeta_{kq,4}\widehat{B_{j\sigma\mu kqs}U_k}\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)}\big). &\end{aligned} \tag{3.20}$$

Оценим первую норму в правой части неравенства (3.20):

$$\begin{aligned}\|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}U_k - \zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} &\\ \leqslant k_2\|\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. &\end{aligned} \tag{3.21}$$

Вторая норма в правой части неравенства (3.20) оценивается при помощи леммы 3.4:

$$\|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}\widehat{U}_k - \zeta_{kq,4}\widehat{B_{j\sigma\mu kqs}U_k}\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} \leqslant k_3\varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \tag{3.22}$$

Из (3.20)–(3.22) следует утверждение леммы.

Отметим, что правая часть неравенства (3.19) содержит норму разности непреобразованной и преобразованной функций. Для оценки таких разностей необходима следующая

Лемма 3.6. *Для любой функции* $W \in H^1_{b+1}(\Omega_k)$ *такой, что* $\operatorname{supp} W \subset \overline{\Omega}_k \cap \mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)$, *выполнено неравенство*

$$\|\zeta_{kq,1}W - \zeta_{kq,1}\widehat{W}\|_{H^0_b(\Omega_k)} \leqslant c\varepsilon_0\|W\|_{H^1_{b+1}(\Omega_k)}, \tag{3.23}$$

где $c > 0$ *не зависит от* W *и* ε_0.

Доказательство. Записывая аргументы функций W и $\widehat{W}$ в цилиндрических координатах, получим

$$\begin{aligned} &\|\zeta_{kq,1}W - \zeta_{kq,1}\widehat{W}\|_{H^0_b(\Omega_k)} \\ &\qquad \leqslant \big\|\zeta_{kq,1}W(\varphi, r, z) - \zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r,z), r, z)\big\|_{H^0_b(\Omega_k)} \\ &\qquad\quad + \big\|\zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r,z), r, z) \\ &\qquad\qquad - \zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r,z), r + R'_{j\sigma kqs}(r,z), z)\big\|_{H^0_b(\Omega_k)}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Оценим квадрат первой нормы в правой части (3.24), используя неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} &\big\|\zeta_{kq,1}W(\varphi, r, z) - \zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r,z), r, z)\big\|^2_{H^0_b(\Omega_k)} \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int_0^\infty r^{2b} r\,dr \int_{b_{k1}}^{b_{k2}} \left|\zeta_{kq,1}\int_\varphi^{\varphi+\Phi'_{j\sigma kqs}(r,z)} \frac{\partial W}{\partial\varphi'}\,d\varphi'\right|^2 d\varphi \\ &\quad \leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int_0^\infty r^{2b} r\,dr \int_{b_{k1}}^{b_{k2}} |\zeta_{kq,1}|^2 |\Phi'_{j\sigma kqs}(r,z)| \\ &\qquad \times \left|\int_\varphi^{\varphi+\Phi'_{j\sigma kqs}(r,z)} \left|\frac{\partial W}{\partial\varphi'}\right|^2 d\varphi'\right| d\varphi. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения на носители функций W, $\zeta_{kq,1}$ и неравенства (3.9), поменяем порядок интегрирования по φ и φ'; в результате, используя (3.2), получим

$$\begin{aligned} &\big\|\zeta_{kq,1}W(\varphi, r, z) - \zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r,z), r, z)\big\|^2_{H^0_b(\Omega_k)} \\ &\qquad\qquad \leqslant k_1 \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int_0^\infty r^{2b} r |\Phi'_{j\sigma kqs}(r,z)|^2\,dr \int_{b_{k1}}^{b_{k2}} \left|\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right|^2 d\varphi \\ &\qquad\qquad \leqslant k_2\varepsilon_0^2 \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int_0^\infty r^{2(b+1)} r\,dr \int_{b_{k1}}^{b_{k2}} \left|\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right|^2 d\varphi \\ &\qquad\qquad \leqslant k_3\varepsilon_0^2\|W\|^2_{H^1_{b+1}(\Omega_k)}. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается квадрат второй нормы в правой части (3.24). Лемма доказана.

Таким образом, множитель ε_0 в неравенстве (3.23) возникает, если увеличить показатель дифференцируемости на единицу (левая часть (3.23) содержит норму в $H^0_b(\Omega_k)$, а правая – в $H^1_{b+1}(\Omega_k)$). Это объясняется тем, что, в отличие от неравенства (3.16), в данном случае оценивается разность двух функций, одна из которых не содержит преобразование переменных, а другая содержит.

§ 4. Априорные оценки решений

В настоящем параграфе докажем априорную оценку для оператора $\mathbf{L}$, гарантирующую конечномерность его ядра и замкнутость образа.

1. Вначале докажем априорную оценку для функций с носителями в окрестности множества $\mathscr{K}_1$. Для этого используем обратимость модельных операторов $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$, $g \in \mathscr{K}_1$, с линейными преобразованиями, а также леммы 3.3–3.6. Затем, в п. 2, при помощи результатов работы [11] и леммы 5.2 из [12] получим априорную оценку для функций с носителями в замыкании области G.

Обозначим $\mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{K}_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathscr{K}_1) < \varepsilon\}$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.4, *и пусть для каждой точки* $g \in \mathscr{K}_1$ *оператор* $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$ – *изоморфизм*[4]. *Тогда существует* $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2 \cup \mathscr{K}_3)/2$ *такое, что для всех* $u \in \{u \in H_b^{l+2m}(G) \colon \operatorname{supp} u \subset \overline{G} \cap \mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{K}_1)\}$ *выполнено неравенство*

$$\|u\|_{H_b^{l+2m}(G)} \leqslant c\big(\|\mathbf{L}u\|_{\mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)} + \|u\|_{H^0_{b+1-l-2m}(G)}\big),$$

где $c > 0$ *не зависит от* u.

Используя принцип разбиения единицы, формулу Лейбница, лемму 2.1 из [27] и лемму 1.2 из [9], сведем доказательство леммы 4.1 к доказательству следующего утверждения.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1. *Тогда для всякой точки* $g \in \mathscr{K}_1$ *найдется* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(g) > 0$ *такое, что для любой функции* $U \in \{U \in H_b^{l+2m,N}(\Omega) \colon \operatorname{supp} U_j \subset \overline{\Omega}_j \cap \mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0),\ j = 1, \dots, N,\ N = N(g)\}$, *выполнено неравенство*

$$\|U\|_{H_b^{l+2m,N}(\Omega)} \leqslant c\|\mathscr{L}_g^\omega U\|_{H_b^{l,N}(\Omega)},$$

где $\mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon_0\}$, $c > 0$ *не зависит от* U.

Доказательство. Используя обратимость оператора $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$ и лемму 3.5 настоящей работы, для функции $U \in H_b^{l+2m,N}(\Omega)$, $\operatorname{supp} U_j \subset \overline{\Omega}_j \cap \mathscr{V}_{\varepsilon_0}(0)$, получим

$$\begin{aligned}\|U\|_{H_b^{l+2m,N}(\Omega)} &\leqslant k_1\|\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}} U\|_{H_b^{l,N}(\Omega)} \\ &\leqslant k_2\Bigg(\|\mathscr{L}_g^\omega U\|_{H_b^{l,N}(\Omega)} + \varepsilon_0\|U\|_{H_b^{l+2m,N}(\Omega)} \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{N}\sum_{q=2}^{R_k}\|\zeta_{qk,3}U_k - \zeta_{qk,3}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}\Bigg).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Оценим последнюю норму в (4.1). По теореме 4.1 из [25] имеем

$$\begin{aligned}\|\zeta_{qk,3}U_k - \zeta_{qk,3}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} &\leqslant k_3\big(\|\mathscr{P}_k(\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k)\|_{H_b^l(\Omega_k)} \\ &\qquad + \|\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k\|_{H^0_{b-l-2m}(\Omega_k)}\big).\end{aligned} \tag{4.2}$$

[4] Необходимое и достаточное условие того, что оператор $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$ – изоморфизм, приведено в п. 5 § 1.

В силу леммы 3.6 и непрерывности вложения $H_b^{l+2m}(\Omega_k) \subset H^1_{b-l-2m+1}(\Omega_k)$ имеем

$$\|\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k\|_{H^0_{b-l-2m}(\Omega_k)} \leqslant k_4\varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \tag{4.3}$$

Для оценки первой нормы в правой части (4.2) воспользуемся формулой Лейбница и леммами 3.3 и 3.4:

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{P}_k(\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k)\|_{H^l_b(\Omega_k)} \\
&\quad\leqslant k_5\biggl(\|\zeta_{kq,3}\mathscr{P}_kU_k\|_{H^l_b(\Omega_k)} + \|\zeta_{kq,3}\mathscr{P}_k\widehat{U}_k\|_{H^l_b(\Omega_k)} \\
&\qquad + \sum_{|\beta|\leqslant 2m-1}\sum_{|\gamma|=2m-|\beta|}\|D^\gamma\zeta_{kq,3}D^\beta U_k - D^\gamma\zeta_{kq,3}D^\beta\widehat{U}_k\|_{H^l_b(\Omega_k)}\biggr) \\
&\quad\leqslant k_6\biggl(\|\mathscr{P}_kU_k\|_{H^l_b(\Omega_k)} + \varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} \\
&\qquad + \sum_{|\beta|\leqslant 2m-1}\sum_{|\gamma|=2m-|\beta|}\|D^\gamma\zeta_{kq,3}D^\beta U_k - D^\gamma\zeta_{kq,3}D^\beta\widehat{U}_k\|_{H^l_b(\Omega_k)}\biggr).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку $|D^\gamma\zeta_{kq,3}| \leqslant k_7r^{-|\gamma|}|\zeta_{kq,2}|$, имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\beta|\leqslant 2m-1}\sum_{|\gamma|=2m-|\beta|}\|D^\gamma\zeta_{kq,3}D^\beta U_k - D^\gamma\zeta_{kq,3}D^\beta\widehat{U}_k\|_{H^l_b(\Omega_k)} \\
&\quad\leqslant k_8\sum_{|\alpha|\leqslant l+2m-1}\|\zeta_{kq,2}D^\alpha U_k - \zeta_{kq,2}D^\alpha\widehat{U}_k\|_{H^0_{b+|\alpha|-l-2m}(\Omega_k)} \\
&\quad\leqslant k_9\sum_{|\alpha|\leqslant l+2m-1}\bigl\{\|\zeta_{kq,2}D^\alpha U_k - \zeta_{kq,2}\widehat{D^\alpha U_k}\|_{H^0_{b+|\alpha|-l-2m}(\Omega_k)} \\
&\qquad\qquad + \|\zeta_{kq,2}\widehat{D^\alpha U_k} - \zeta_{kq,2}D^\alpha\widehat{U}_k\|_{H^0_{b+|\alpha|-l-2m}(\Omega_k)}\bigr\}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Используя лемму 3.6 и непрерывность вложения

$$H_b^{l+2m}(\Omega_k) \subset H^{1+|\alpha|}_{b+1+|\alpha|-l-2m}(\Omega_k)$$

при $|\alpha| \leqslant l+2m-1$, получим

$$\begin{aligned}
\|\zeta_{kq,2}D^\alpha U_k - \zeta_{kq,2}\widehat{D^\alpha U_k}\|_{H^0_{b+|\alpha|-l-2m}(\Omega_k)} &\leqslant k_{10}\varepsilon_0\|D^\alpha U_k\|_{H^1_{b+1+|\alpha|-l-2m}(\Omega_k)} \\
&\leqslant k_{11}\varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Аналогично, из леммы 3.4 следует, что

$$\|\zeta_{kq,2}\widehat{D^\alpha U_k} - \zeta_{kq,2}D^\alpha\widehat{U}_k\|_{H^0_{b+|\alpha|-l-2m}(\Omega_k)} \leqslant k_{12}\varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \tag{4.7}$$

Теперь утверждение леммы вытекает из (4.1)–(4.7) при достаточно малом ε_0.

2. Повторяя доказательство теоремы 2.1 из [11] и учитывая лемму 5.2 из [12], из леммы 4.1 настоящей работы и лемм 2.4, 2.5 работы [11] получим следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1, *и пусть* $b > l+2m-1$. *Тогда для всех* $u \in H_b^{l+2m}(G)$ *имеет место оценка*

$$\|u\|_{H_b^{l+2m}(G)} \leqslant c\big(\|\mathbf{L}u\|_{\mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)} + \|u\|_{H^0_{b+1-l-2m}(G)}\big), \tag{4.8}$$

где $c > 0$ *не зависит от* u.

В силу компактности вложения $H_b^{l+2m}(G) \subset H^0_{b+1-l-2m}(G)$ (см. [27, лемма 3.5]) из теоремы 4.1 следует, что оператор $\mathbf{L}$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

§ 5. Построение правого регуляризатора

В настоящем параграфе будет построен правый регуляризатор для оператора $\mathbf{L}$, что совместно с теоремой 4.1 позволит доказать фредгольмовость нелокальной краевой задачи (1.2), (1.3).

1. Вначале рассмотрим случай, когда функции имеют носитель, сосредоточенный в некоторой окрестности множества $\mathscr{K}_1$. Здесь будет использована обратимость модельных операторов $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$, $g \in \mathscr{K}_1$, с линейными преобразованиями, а также некоторые специальные построения, позволяющие "скомпенсировать" наличие нелинейности в преобразованиях переменных. Затем, в п. 2, используя результаты работы [11] и лемму 5.2 из [12], построим регуляризатор во всей области G.

Прежде всего докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть* H, H_1, H_2 – *гильбертовы пространства,* $\mathscr{A}\colon H \to H_1$ – *линейный ограниченный оператор,* $\mathscr{T}_0\colon H \to H_2$ – *линейный компактный оператор. Предположим, что для некоторых* $\varepsilon, c > 0$ *и всех* $f \in H$ *выполнено неравенство*

$$\|\mathscr{A}f\|_{H_1} \leqslant \varepsilon\|f\|_H + c\|\mathscr{T}_0 f\|_{H_2}. \tag{5.1}$$

Тогда существуют ограниченные операторы $\mathscr{M}$, $\mathscr{F}\colon H \to H_1$ *такие, что*

$$\mathscr{A} = \mathscr{M} + \mathscr{F},$$

причем $\|\mathscr{M}\| \leqslant 2\varepsilon$, *а оператор* $\mathscr{F}$ *конечномерный.*

Доказательство. Известно (см., например, [28, гл. 5, п. 85]), что всякий компактный оператор есть предел равномерно сходящейся последовательности конечномерных операторов. Следовательно, существуют ограниченные операторы $\mathscr{M}_0$, $\mathscr{F}_0\colon H \to H_2$ такие, что $\mathscr{T}_0 = \mathscr{M}_0 + \mathscr{F}_0$, причем $\|\mathscr{M}_0\| \leqslant c^{-1}\varepsilon$, а оператор $\mathscr{F}_0$ конечномерный. Отсюда и из (5.1) следует, что

$$\|\mathscr{A}f\|_{H_1} \leqslant 2\varepsilon\|f\|_H + c\|\mathscr{F}_0 f\|_{H_2} \quad \text{для всех} \quad f \in H. \tag{5.2}$$

Обозначим через $\ker(\mathscr{F}_0)^\perp$ ортогональное дополнение в H к ядру оператора $\mathscr{F}_0$. Поскольку конечномерный оператор $\mathscr{F}_0$ отображает $\ker(\mathscr{F}_0)^\perp$ на свой образ взаимно однозначно, то подпространство $\ker(\mathscr{F}_0)^\perp$ конечномерно. Пусть $\mathscr{I}$ – единичный оператор в H, а $\mathscr{P}_0$ – ортопроектор на $\ker(\mathscr{F}_0)^\perp$. Очевидно, $\mathscr{A}\mathscr{P}_0$: $H \to H_1$ – конечномерный оператор. Кроме того, поскольку $\mathscr{I} - \mathscr{P}_0$ – ортопроектор на $\ker(\mathscr{F}_0)$, то $\mathscr{F}_0(\mathscr{I} - \mathscr{P}_0) = 0$. Следовательно, подставляя в (5.2) функцию $(\mathscr{I} - \mathscr{P}_0)f$ вместо f, получим

$$\|\mathscr{A}(\mathscr{I} - \mathscr{P}_0)f\|_{H_1} \leqslant 2\varepsilon\|(\mathscr{I} - \mathscr{P}_0)f\|_H \leqslant 2\varepsilon\|f\|_H \quad \text{для всех} \quad f \in H.$$

Обозначая $\mathscr{M} = \mathscr{A}(\mathscr{I} - \mathscr{P}_0)$, $\mathscr{F} = \mathscr{A}\mathscr{P}_0$, получаем утверждение леммы.

Теперь начнем построение правого регуляризатора.

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1. *Тогда для всех достаточно малых* $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2 \cup \mathscr{K}_3)/2$ *существуют ограниченные операторы* $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{M}_1$ *и компактный оператор* $\mathbf{T}_1$, *действующие из* $\{f \in \mathscr{H}_b^l(G, \Upsilon)\colon \operatorname{supp} f \subset \overline{G} \cap \mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{K}_1)\}$ *в* $H_b^{l+2m}(G)$, $\mathscr{H}_b^l(G, \Upsilon)$ *и* $\mathscr{H}_b^l(G, \Upsilon)$ *соответственно и удовлетворяющие условию*

$$\mathbf{L}\mathbf{R}_1 f = f + \mathbf{M}_1 f + \mathbf{T}_1 f,$$

где $\|\mathbf{M}_1 f\|_{\mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)} \leqslant c\varepsilon\|f\|_{\mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)}$. *Здесь* $c > 0$ *не зависит от* ε *и* f.

Используя принцип разбиения единицы, формулу Лейбница и лемму 2.1 из [27], сведем доказательство леммы 5.2 к доказательству следующего утверждения.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1. *Тогда для всякой точки* $g \in \mathscr{K}_1$ *и всех достаточно малых* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(g) > 0$ *существуют ограниченные операторы* $\mathscr{R}_g$, $\mathscr{M}_g$ *и компактный оператор* $\mathscr{T}_g$, *действующие из* $\{f \in \mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma)\colon \operatorname{supp} f \subset \mathscr{V}_{\varepsilon_1}(0)\}$ *в* $H_b^{l+2m,N}(\Omega)$, $\mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma)$ *и* $\mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma)$ *соответственно и удовлетворяющие условию*

$$\mathscr{L}_g^\omega \mathscr{R}_g f = f + \mathscr{M}_g f + \mathscr{T}_g f, \tag{5.3}$$

где $\|\mathscr{M}_g f\|_{H_b^l(G,\Gamma)} \leqslant c\varepsilon_1\|f\|_{H_b^l(G,\Gamma)}$. *Здесь* $c > 0$ *не зависит от* ε_1 *и* f.

Доказательство. 1) Пусть, как и ранее,

$$d_1 = \frac{1}{2}\min\{1, \chi_{j\sigma kqs}\}, \qquad d_2 = 2\max\{1, \chi_{j\sigma kqs}\}.$$

Выберем $\varepsilon_1 < d_1\varepsilon_0/4$, где ε_0 определено в лемме 4.2. Введем функцию $\psi_{\varepsilon_1}(x) = \psi(x/\varepsilon_1)$, где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2$. Очевидно, $\psi_{\varepsilon_1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_{\varepsilon_1}(x) = 1$ при $|x| \leqslant \varepsilon_1$, $\psi_{\varepsilon_1}(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2\varepsilon_1$. Поскольку при этом $|D^\alpha\psi_{\varepsilon_1}| \leqslant c_\alpha r^{-|\alpha|}$, то из [27, лемма 2.1] следует оценка

$$\|\psi_{\varepsilon_1} v\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} \leqslant c\|v\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} \quad \text{для всех} \quad v \in H_b^{l+2m}(\Omega_k), \tag{5.4}$$

где $c > 0$ не зависит от ε_1. Пусть, кроме того, функция ψ_{ε_1}, будучи записанной в цилиндрических координатах, не зависит от φ.

Положим $f_0 = \{f_j\}$, $g = \{g_{j\sigma\mu}\}$, $\{f_0, g\} = \{f_j, g_{j\sigma\mu}\}$.

По предположению оператор $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}\colon H_b^{l+2m,N}(\Omega) \to \mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma)$ имеет ограниченный обратный $(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma) \to H_b^{l+2m,N}(\Omega)$. Поэтому можно ввести операторы

$$\mathscr{R}_1\colon H_b^{l,N}(\Omega) \to H_b^{l+2m,N}(\Omega),$$
$$\mathscr{R}_2\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma) \to H_b^{l+2m,N}(\Omega)$$

по формулам

$$\mathscr{R}_1 f_0 = \psi_{\varepsilon_1}(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{f_0, 0\},$$
$$\mathscr{R}_2 g = \psi_{\varepsilon_1}(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0, g\},$$

где $\mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma) = \prod_{j,\sigma,\mu} H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})$. Таким образом, носители функций $\mathscr{R}_1 f_0$ и $\mathscr{R}_2 g$ лежат в шаре радиуса $2\varepsilon_1$ с центром в начале координат.

Введем операторы

$$\mathscr{P}\colon H_b^{l+2m,N}(\Omega) \to H_b^{l,N}(\Omega),$$
$$\mathscr{B}^{\mathscr{G}}, \mathscr{B}^{\omega}\colon H_b^{l+2m,N}(\Omega) \to \mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma),$$

действующие по формулам

$$\mathscr{P}U = \{\mathscr{P}_j U_j\}, \qquad \mathscr{B}^{\mathscr{G}}U = \{\mathscr{B}_{j\sigma\mu}^{\mathscr{G}}U\}, \qquad \mathscr{B}^{\omega}U = \{\mathscr{B}_{j\sigma\mu}^{\omega}U\}.$$

Установим связь между операторами $\mathscr{P}$, $\mathscr{B}^{\mathscr{G}}$, $\mathscr{B}^{\omega}$ и $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$. Будем использовать известное свойство весовых пространств (см. [27, лемма 3.5]):

(∗) *оператор вложения* $\{v \in H_b^{l+1}(\Omega_j)\colon \operatorname{supp} v \subset \mathscr{V}_d(0),\ d > 0\}$ *в* $H_b^l(\Omega_j)$ *компактен.*

Из формулы Лейбница, ограниченности $\operatorname{supp}\psi_{\varepsilon_1}$ и свойства $(*)$ следует, что

$$\mathscr{P}\mathscr{R}_1 f_0 = \psi_{\varepsilon_1} f_0 + \mathscr{T}_1 f_0, \qquad \mathscr{P}\mathscr{R}_2 g = \mathscr{T}_2 g. \tag{5.5}$$

Здесь $\mathscr{T}_1\colon H_b^{l,N}(\Omega) \to H_b^{l,N}(\Omega)$, $\mathscr{T}_2\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma) \to H_b^{l,N}(\Omega)$ – компактные операторы. Аналогично,

$$\mathscr{B}^{\mathscr{G}}\mathscr{R}_2 g = \psi_{\varepsilon_1} g + \biggl\{ \sum_{k,q,s} \bigl(\psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs}x) - \psi_{\varepsilon_1}(x)\bigr) \times (B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \biggr\} + \mathscr{T}_3 g, \tag{5.6}$$

где $\mathscr{T}_3$ – компактный оператор в $\mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma)$; здесь и далее через $[\,\cdot\,]_k$ обозначена k-я компонента N-мерного вектора, а через $\{\dots\}$ – вектор, компоненты которого определяются индексами j, σ, μ.

Покажем, что каждое слагаемое, стоящее под знаком суммы в (5.6), есть компактный оператор. Пусть $\zeta_{kq,i}$ – функции, введенные по формулам (3.10). Введем также функции $\widehat{\psi}_0, \widehat{\psi}_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{\psi}_1(x) = 1 \ \text{ при } \ 2d_1\varepsilon_1 \leqslant |x| \leqslant d_2\varepsilon_1, \qquad \widehat{\psi}_1(x) = 0 \ \text{ вне } \ d_1\varepsilon_1 \leqslant |x| \leqslant 2d_2\varepsilon_1,$$
$$\widehat{\psi}_0(x) = 1 \ \text{ при } \ d_1\varepsilon_1 \leqslant |x| \leqslant 2d_2\varepsilon_1, \qquad \widehat{\psi}_0(x) = 0 \ \text{ вне } \ d_1\varepsilon_1/2 \leqslant |x| \leqslant 4d_2\varepsilon_1.$$

Тогда в силу непрерывности оператора следа в весовых пространствах

$$\begin{aligned}
&\bigl\|(\psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs}x) - \psi_{\varepsilon_1}(x)) \\
&\qquad \times (B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\bigr\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\
&\quad \leqslant k_2 \bigl\|\zeta_{kq,2}(\psi_{\varepsilon_1}(x) - \psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs}^{-1}x)) B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k\bigr\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} \\
&\quad \leqslant k_3 \bigl\|\zeta_{kq,1}\widehat{\psi}_1[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k\bigr\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Поскольку носитель функции $\widehat{\psi}_1$ ограничен и отделен от нуля, а функция $\zeta_{kq,1}$ равна нулю вблизи сторон угла Ω_k, то можно воспользоваться теоремой 5.1 из [23, гл. 2]: используя соотношение $\mathscr{P}_k[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k = 0$, из (5.7) получим

$$\begin{aligned}
&\bigl\|(\psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs}x) - \psi_{\varepsilon_1}(x)) \\
&\qquad \times (B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\bigr\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\
&\quad \leqslant k_4 \bigl\|\widehat{\psi}_0[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k\bigr\|_{H_b^{l+2m-1}(\Omega_k)}.
\end{aligned}$$

Так как носитель функции $\widehat{\psi}_0$ ограничен, из последнего неравенства и свойства $(*)$ следует, что

$$\biggl\{ \sum_{k,q,s} (\psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs}x) - \psi_{\varepsilon_1}(x))(B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \biggr\}$$

– компактный оператор в $\mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma)$. В силу (5.6) отсюда следует

$$\mathscr{B}^{\mathscr{G}}\mathscr{R}_2 g = \psi_{\varepsilon_1} g + \mathscr{T}_4 g, \tag{5.8}$$

где $\mathscr{T}_4$ – компактный оператор в $\mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma)$.

Наконец, из (5.8) получим формулу для композиции $\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_2$:

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_2 g = \psi_{\varepsilon_1} g + \mathscr{T}_4 g + \Big\{ \sum_{k,q,s} \big((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big)\Big\}. \end{aligned}\tag{5.9}$$

2) Введем оператор $\mathscr{R}_g\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma)\to H_b^{l+2m,N}(\Omega)$, действующий по формуле

$$\mathscr{R}_g\{f_0,g\} = \mathscr{R}_1 f_0 - \mathscr{R}'_2\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0 + \mathscr{R}_2 g.$$

Здесь $\mathscr{R}'_2\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma) \to H_b^{l+2m,N}(\Omega)$ – ограниченный оператор, действующий по формуле

$$\mathscr{R}'_2 g = \psi_{\varepsilon_1}(d_1x/2)(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}.$$

Аналогично (5.5) и (5.9) доказывается, что

$$\mathscr{P}\mathscr{R}'_2 g = \mathscr{T}'_2 g, \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}'_2 g = \psi_{\varepsilon_1}(d_1x/2) g + \mathscr{T}'_4 g + \Big\{ \sum_{k,q,s} \big((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}'_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}'_2 g]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big)\Big\}, \end{aligned}\tag{5.11}$$

где $\mathscr{T}'_2$, $\mathscr{T}'_4$ – компактные операторы, действующие в тех же пространствах, что и операторы $\mathscr{T}_2$, $\mathscr{T}_4$.

Покажем, что $\mathscr{R}_g$ удовлетворяет соотношению (5.3). Из формул (5.5) и (5.10) следует, что

$$\mathscr{P}\mathscr{R}_g\{f_0,g\} = \psi_{\varepsilon_1} f_0 + \mathscr{T}_5\{f_0,g\}, \tag{5.12}$$

где $\mathscr{T}_5\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma)\to H_b^{l,N}(\Omega)$ – компактный оператор.

Далее, учитывая, что $\psi_{\varepsilon_1}(d_1x/2)\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0 \equiv \mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0$, при помощи (5.11) получим

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_g\{f_0,g\} &= \mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0 - \mathscr{B}^\omega\mathscr{R}'_2\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0 + \mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_2 g \\ &= -\mathscr{T}'_4\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0 - \Big\{ \sum_{k,q,s} \big((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}'_2\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ &\qquad - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}'_2\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big)\Big\} + \mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_2 g.\end{aligned}$$

Отсюда, используя (5.9), имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_g g = \psi_{\varepsilon_1} g + \mathscr{T}_6\{f_0, g\} + \Big\{ \sum_{k,q,s} \big((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big)\Big\} \\ - \Big\{ \sum_{k,q,s} \big((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}'_2\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}'_2\mathscr{B}^\omega\mathscr{R}_1 f_0]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big)\Big\},\end{aligned} \tag{5.13}$$

где $\mathscr{T}_6\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma) \to \mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma)$ – компактный оператор.

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком первой суммы в правой части (5.13). По лемме 3.5

$$\begin{aligned}\big\|(B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ \leqslant k_5\big(\varepsilon_1\|[\mathscr{R}_2 g]_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} + \|\zeta_{kq,3}[\mathscr{R}_2 g]_k - \zeta_{kq,3}\widehat{[\mathscr{R}_2 g]}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}\big).\end{aligned} \tag{5.14}$$

Из неравенств (4.2)–(4.7) для функции $U_k = [\mathscr{R}_2 g]_k$, неравенства (5.14) и второго соотношения (5.5) получим

$$\begin{aligned}\big\|(B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ \leqslant k_6\big(\varepsilon_1\|[\mathscr{R}_2 g]_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} + \|\mathscr{P}_k[\mathscr{R}_2 g]_k\|_{H_b^{l}(\Omega_k)}\big) \\ = k_6\big(\varepsilon_1\|\psi_{\varepsilon_1}[(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\{0,g\}]_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} + \|[\mathscr{T}_2 g]_k\|_{H_b^{l}(\Omega_k)}\big).\end{aligned}$$

Отсюда, из неравенства (5.4) и ограниченности оператора $(\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}})^{-1}\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Omega,\Gamma) \to H_b^{l+2m,N}(\Omega)$ окончательно выводим

$$\begin{aligned}\big\|(B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}}\big\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ \leqslant k_7\big(\varepsilon_1\|g\|_{\mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma)} + \|[\mathscr{T}_2 g]_k\|_{H_b^{l}(\Omega_k)}\big).\end{aligned} \tag{5.15}$$

Следовательно, по лемме 5.1

$$\begin{aligned}(B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathscr{R}_2 g]_k)(\mathscr{G}_{j\sigma kqs}y,z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ = \mathscr{M}_{j\sigma\mu kqs}g + \mathscr{F}_{j\sigma\mu kqs}g,\end{aligned}$$

где
$$\mathscr{M}_{j\sigma\mu kqs},\ \mathscr{F}_{j\sigma\mu kqs}\colon \mathscr{H}_b^{l,N}(\Gamma) \to H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}),$$
причем $\|\mathscr{M}_{j\sigma\mu kqs}\| \leqslant 2k_7\varepsilon_1$, а оператор $\mathscr{F}_{j\sigma\mu kqs}$ конечномерный.

Аналогично можно доказать, что слагаемые, стоящие во второй сумме правой части (5.13), представимы в виде суммы оператора с малой нормой и конечномерного оператора. Отсюда и из (5.13), (5.12), полагая $\operatorname{supp}\{f_0, g\} \subset \mathscr{V}_{\varepsilon_1}(0)$, получаем утверждение леммы.

2. Докажем фредгольмовость оператора $\mathbf{L}\colon H_b^{l+2m}(G) \to \mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1, *и пусть* $b > l+2m-1$. *Тогда оператор* $\mathbf{L}\colon H_b^{l+2m}(G) \to \mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)$ *фредгольмов.*

Доказательство. В силу теоремы 4.1 и [29, теоремы 7.1, 15.2] достаточно построить правый регуляризатор $\mathbf{R}$ для оператора $\mathbf{L}$.

Повторяя рассуждения из [11, § 3], в силу [12, лемма 5.2] из леммы 5.2 настоящей работы выводим существование ограниченных операторов
$$\mathbf{R}'\colon \mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon) \to H_b^{l+2m}(G),$$
$$\mathbf{M}, \mathbf{T}\colon \mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon) \to \mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)$$
таких, что
$$\mathbf{L}\mathbf{R}' = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{T},$$
причем $\|\mathbf{M}\| < 1$, а $\mathbf{T}$ компактный. Поскольку $\|\mathbf{M}\| < 1$, то оператор $\mathbf{I}+\mathbf{M}$ имеет ограниченный обратный. Очевидно, оператор $\mathbf{R} = \mathbf{R}'(\mathbf{I}+\mathbf{M})^{-1}$ будет правым регуляризатором для оператора $\mathbf{L}$. Теорема доказана.

3. До сих пор мы предполагали, что $b > l+2m-1$. В этом пункте, используя результаты работы [9], мы снимем ограничение на показатель b в случае, когда $n = 2$. Как отмечалось выше, для этого следует рассматривать решения и правые части задачи, имеющие степенные особенности не только вблизи множества $\mathscr{K}_1$, но также вблизи $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}_3$, что соответствует условиям согласования (см. § 1).

Итак, пусть $n = 2$. Введем пространство $\widetilde{H}_b^l(G)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{G}\setminus\mathscr{K})$ по норме
$$\|u\|_{H_b^l(G)} = \biggl(\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int_G \tilde{\rho}^{2(b-l+|\alpha|)}|D^\alpha u|^2\,dy\biggr)^{1/2},$$
где $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(y) = \operatorname{dist}(y,\mathscr{K})$ (ср. с § 1). Через $\widetilde{H}_b^{l-1/2}(\Upsilon)$ при $l \geqslant 1$ обозначим пространство следов на гладкой кривой $\Upsilon \subset \overline{G}$ с нормой
$$\|\psi\|_{\widetilde{H}_b^{l-1/2}(\Upsilon)} = \inf\|u\|_{\widetilde{H}_b^l(G)}, \qquad u \in \widetilde{H}_b^l(G)\colon\ u|_\Upsilon = \psi.$$

Предположим выполненным следующее условие.

Условие 5.1. *Если* $g \in \mathscr{K}_3 \cap \omega_{is}(\Upsilon_i) \neq \varnothing$, *то* $\omega_{is}^{-1}(g) \in \mathscr{K}$.

Выполнение условия 5.1 обеспечивает конечность множества точек, в которых следует вводить условие согласования. Если условие 5.1 нарушается, то последовательные сдвиги множества $\mathscr{K}_1$ (осуществляемые преобразованиями ω_{is} и обратными к ним) могут образовывать бесконечное множество, которое должно быть использовано в определении весовых пространств вместо множества $\mathscr{K}$.

В настоящем пункте рассмотрим следующий ограниченный оператор, соответствующий задаче[5] (1.2), (1.3):

$$\mathbf{L} = \big\{\mathbf{P}(y, D), \mathbf{B}_{i\mu}(y, D)\big\} \colon \widetilde{H}_b^{l+2m}(G) \to \widetilde{H}_b^l(G) \times \prod_{i=1}^{N_0} \prod_{\mu=1}^{m} \widetilde{H}_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i),$$
$$b \in \mathbb{R}.$$

Поскольку теперь мы допускаем особенности решений и правых частей задачи вблизи точек множеств $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}_3$, то соответствующие этим точкам модельные задачи следует рассматривать уже не в пространствах Соболева, а в весовых пространствах.

Зафиксируем точку $g \in \mathscr{K}_2 \cup \mathscr{K}_3$. Пусть $y \mapsto y'(g)$ – невырожденное бесконечно дифференцируемое преобразование координат, отображающее некоторую окрестность $\mathscr{V}(g)$ точки g на окрестность начала координат $\mathscr{V}_g(0)$ и такое, что сама точка g отображается в начало координат. Обозначим через $\mathscr{P}(D_y)$, $\mathscr{B}_{i\mu 0}(D_y)$ главные однородные части операторов $\mathbf{P}(g, D)$, $B_{i\mu 0}(g, D)$, записанных в новой системе координат $y' = y'(g)$ с последующим переобозначением y' на y. Запишем операторы $\mathscr{P}(D_y)$, $\mathscr{B}_{i\mu 0}(D_y)$ в полярных координатах:

$$\mathscr{P}(D_y) = r^{-2m} \widetilde{\mathscr{P}}(\varphi, D_\varphi, rD_r), \qquad \mathscr{B}_{i\mu 0}(D_y) = r^{-m_{i\mu}} \widetilde{\mathscr{B}}_{i\mu 0}(\varphi, D_\varphi, rD_r).$$

Если $g \in \mathscr{K}_2$, то $g \in \Upsilon_i$ при некотором $i = i(g)$. В силу гладкости Υ_i в достаточно малой окрестности $\mathscr{V}(g)$ точки g существует невырожденное бесконечно дифференцируемое преобразование $y \mapsto y' = y'(g)$, отображающее $\mathscr{V}(g) \cap G$ на пересечение полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{y \colon |\varphi| < \pi/2\}$ с некоторой окрестностью $\mathscr{V}_g(0)$. Введем ограниченный оператор

$$\mathscr{L}_g \colon H_b^{l+2m}(K_{\pi/2}) \to H_b^l(K_{\pi/2}) \times \prod_{j=1}^{2} \prod_{\mu=1}^{m} H_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\gamma_j)$$

по формуле

$$\mathscr{L}_g U = \big\{\mathscr{P}(D_y)U,\ \mathscr{B}_{i\mu 0}(D_y)U|_{\gamma_j}\big\},$$

где $K_{\pi/2} = \{y \colon |\varphi| < \pi/2\}$, $\gamma_j = \{y \colon \varphi = (-1)^j \pi/2\}$, $j = 1, 2$. Введем также ограниченный оператор

$$\widetilde{\mathscr{L}}_g(\lambda) \colon W_2^{l+2m}(-\pi/2, \pi/2) \to \mathscr{W}_2^l[-\pi/2, \pi/2] = W_2^l(-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{C}^{2m}$$

[5] Заметим, что теперь уравнение (1.2) рассматривается не во всей области G, а в $G \setminus \mathscr{K}_3$.

по формуле

$$\widetilde{\mathscr{L}}_g(\lambda)\widetilde{U} = \big\{\widetilde{\mathscr{P}}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\widetilde{U}(\varphi),\ \widetilde{\mathscr{B}}_{i\mu 0}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\widetilde{U}(\varphi)|_{\varphi=(-1)^j\pi/2}\big\}, \qquad j = 1, 2.$$

Если $g \in \mathscr{K}_3$, то введем ограниченные операторы

$$\mathscr{L}_g = \mathscr{P}(D_y)\colon H_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \to H_b^l(\mathbb{R}^2),$$
$$\widetilde{\mathscr{L}}_g(\lambda) = \widetilde{\mathscr{P}}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\colon W_{2,2\pi}^{l+2m}(0, 2\pi) \to W_{2,2\pi}^l(0, 2\pi),$$

где $W_{2,2\pi}^l(0,2\pi)$ – замыкание множества бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций в $W_2^l(0,2\pi)$.

Из работ [27, § 1] и [9, § 1] следует, что для каждой точки $g \in \mathscr{K}_2 \cup \mathscr{K}_3$ существует конечно-мероморфная оператор-функция $\widetilde{\mathscr{L}}_g^{-1}(\lambda)$ такая, что ее полюсы, за исключением, быть может, конечного числа, расположены внутри двойного угла раствора, меньшего π, содержащего мнимую ось, и для λ, не являющегося ее полюсом, оператор $\widetilde{\mathscr{L}}_g^{-1}(\lambda)$ является ограниченным обратным к оператору $\widetilde{\mathscr{L}}_g(\lambda)$.

Далее, из [27, теорема 1.1] и результатов [9, § 1] следует, что оператор $\mathscr{L}_g$ – изоморфизм тогда и только тогда, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = b + 1 - l - 2m$ не содержит полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}_g^{-1}(\lambda)$.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия* 1.1–1.4, 5.1, *и пусть* $b \in \mathbb{R}$ *таково, что для всех точек* $g \in \mathscr{K}_1$ *оператор* $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$ *– изоморфизм и для всех точек* $g \in \mathscr{K}_2 \cup \mathscr{K}_3$ *оператор* $\mathscr{L}_g$ *– изоморфизм. Тогда оператор* $\mathbf{L}\colon \widetilde{H}_b^{l+2m}(G) \to \widetilde{\mathscr{H}}_b^l(G, \Upsilon)$ *фредгольмов.*

Доказательство. Заметим, что леммы 4.1, 5.2 справедливы при любом $b \in \mathbb{R}$, для которого операторы $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$, $g \in \mathscr{K}_1$, являются изоморфизмами. Поэтому, используя леммы 4.1 и 5.2, аналогично доказательству теоремы 3.4 из [9] можно вывести априорную оценку (4.8) (в пространствах $\widetilde{H}_b^l(\,\cdot\,)$) и построить правый регуляризатор. Теорема доказана.

§ 6. Устойчивость индекса нелокальных эллиптических задач

В настоящем параграфе изучим влияние преобразований ω_{is} на индекс нелокальной эллиптической задачи. Докажем, что индекс задачи определяется только линейной частью преобразований ω_{is} в окрестности множества $\mathscr{K}_1$. Отметим, что в случае, когда носитель нелокальных данных $\bigcup_{i,s}\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i)$ не пересекается с множеством $\mathscr{K}_1$ точек сопряжения нелокальных условий, устойчивость индекса нелокальной задачи доказана в работе [15].

1. Рассмотрим наряду с задачей (1.2), (1.3) следующую задачу:

$$\mathbf{P}(x, D)u = f_0(x), \qquad x \in G, \tag{6.1}$$

$$\widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}(x, D)u \equiv \sum_{s=0}^{\widehat{S}_i}(\widehat{B}_{i\mu s}(x, D)u)(\widehat{\omega}_{is}(x))|_{\Upsilon_i} = g_{i\mu}(x), \quad x \in \Upsilon_i, \quad i = 1, \dots, N_0, \quad \mu = 1, \dots, m. \tag{6.2}$$

Здесь $\mathbf{P}(x,D)$, $\widehat{B}_{i\mu 0}(x,D) = B_{i\mu 0}(x,D)$ – те же дифференциальные операторы[6], что и в §1, $\widehat{B}_{i\mu s}(x,D)$, $s = 1,\dots,\widehat{S}_i$, – некоторые дифференциальные операторы порядков $m_{i\mu}$ с комплекснозначными коэффициентами класса C^∞; $\widehat{\omega}_{is}$, $i = 1,\dots,N_0$, $s = 1,\dots,\widehat{S}_i$, – бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathscr{O}_i$ многообразия Υ_i на множество $\widehat{\omega}_{is}(\mathscr{O}_i)$ так, что $\widehat{\omega}_{is}(\Upsilon_i) \subset G$, $\omega_{i0}(x) \equiv x$. Предположим, что множество

$$\widehat{\mathscr{K}} = \Big\{\bigcup_i (\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i)\Big\} \cup \Big\{\bigcup_{i,s} \widehat{\omega}_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i)\Big\} \cup \Big\{\bigcup_{j,p}\bigcup_{i,s} \widehat{\omega}_{jp}\big(\widehat{\omega}_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \Upsilon_j\big)\Big\}$$

представимо в виде $\widehat{\mathscr{K}} = \bigcup_{j=1}^{3}\bigcup_{p=1}^{\widehat{N}_j} \widehat{\mathscr{K}}_{jp}$, где

$$\widehat{\mathscr{K}}_1 = \bigcup_{p=1}^{\widehat{N}_1} \widehat{\mathscr{K}}_{1p} = \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i, \qquad \widehat{\mathscr{K}}_2 = \bigcup_{p=1}^{\widehat{N}_2} \widehat{\mathscr{K}}_{2p} \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i, \qquad \widehat{\mathscr{K}}_3 = \bigcup_{p=1}^{\widehat{N}_3} \widehat{\mathscr{K}}_{3p} \subset G$$

(ср. с (1.1)). Здесь $\widehat{\mathscr{K}}_{jp}$ – непересекающиеся $(n-2)$-мерные связные многообразия без края класса C^∞ (точки, если $n = 2$), причем $\widehat{N}_1 = N_1$, $\widehat{\mathscr{K}}_{1p} = \mathscr{K}_{1p}$, $p = 1,\dots,N_1$.

Пусть преобразования $\widehat{\omega}_{is}$ удовлетворяют условиям 1.3, 1.4. Более того, предположим, что операторы $\widehat{B}_{i\mu s}(x,D)$ и преобразования $\widehat{\omega}_{is}$, $s = 1,\dots,\widehat{S}_i$, таковы, что для каждой точки $g \in \widehat{\mathscr{K}}_1 = \mathscr{K}_1$ оператор $\mathscr{L}_g^{\widehat{\omega}}$ (который вводится аналогично оператору $\mathscr{L}_g^{\omega}$ из §1) совпадает с оператором $\mathscr{L}_g^{\mathscr{G}}$, определенным в §1.

Таким образом, $\widehat{\omega}_{is}$ – линейная в окрестности $\mathscr{K}_1$ часть преобразования ω_{is}.

Введем ограниченный оператор, соответствующий нелокальной задаче (6.1), (6.2),

$$\widehat{\mathbf{L}} = \big\{\mathbf{P}(x,D),\ \widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}(x,D)\big\}\colon H_b^{l+2m}(G) \to \mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon).$$

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия леммы* 4.1, *и пусть* $b > l+2m-1$. *Тогда операторы* $\mathbf{L}$, $\widehat{\mathbf{L}}\colon H_b^{l+2m}(G) \to \mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)$ *фредгольмовы и* $\operatorname{ind}\mathbf{L} = \operatorname{ind}\widehat{\mathbf{L}}$.

Доказательство. Введем оператор $\mathbf{L}_t\colon H_b^{l+2m}(G) \to \mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)$ по формуле

$$\mathbf{L}_t u = \big\{\mathbf{P}(x,D)u,\ \mathbf{B}_{i\mu}(x,D) + t(\widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}(x,D) - \mathbf{B}_{i\mu}(x,D))\big\}.$$

Очевидно, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}$, $\mathbf{L}_1 = \widehat{\mathbf{L}}$.

Преобразования ω_{is} и $\widehat{\omega}_{is}$ совпадают с точностью до бесконечно малых в некоторой окрестности множества $\mathscr{K}_1$; поэтому в силу теоремы 5.1 операторы $\mathbf{L}_t$ будут фредгольмовы при всех t. Далее, для любых t_0, t

$$\|\mathbf{L}_t u - \mathbf{L}_{t_0} u\|_{\mathscr{H}_b^l(G,\Upsilon)} \leqslant k_{t_0}|t-t_0|\,\|u\|_{H_b^{l+2m}(G)},$$

[6]Достаточно потребовать, чтобы совпадали главные однородные части операторов $\mathbf{P}(x,D)$ и $\widehat{B}_{i\mu 0}(x,D)$ из данного параграфа и соответствующих операторов из §1. Однако для простоты будем считать, что совпадают и младшие члены.

где $k_{t_0} > 0$ не зависит от $t \in [0,1]$. Следовательно, в силу [29, теорема 16.2] имеем $\operatorname{ind} \mathbf{L}_t = \operatorname{ind} \mathbf{L}_{t_0}$ для всех t из некоторой достаточно малой окрестности точки t_0. Указанные окрестности покрывают отрезок $[0,1]$. Выделяя конечное подпокрытие, получаем $\operatorname{ind} \mathbf{L} = \operatorname{ind} \mathbf{L}_0 = \operatorname{ind} \mathbf{L}_1 = \operatorname{ind} \widehat{\mathbf{L}}$. Теорема доказана.

Аналогично предыдущему при помощи теоремы 5.2, вместо теоремы 5.1, доказывается устойчивость индекса нелокальной краевой задачи (1.2), (1.3) при $n = 2$, $b \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $\widehat{N}_j = N_j,\ \widehat{\mathscr{K}}_{jp} = \mathscr{K}_{jp},\ j = 1,2,3,\ p = 1,\dots,N_j$.

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.2. *Тогда операторы* $\mathbf{L}$, $\widehat{\mathbf{L}}\colon \widetilde{H}_b^{l+2m}(G) \to \widetilde{\mathscr{H}}_b^l(G,\Upsilon)$ *фредгольмовы и* $\operatorname{ind} \mathbf{L} = \operatorname{ind} \widehat{\mathbf{L}}$.

2. Приведем другое доказательство теоремы 6.2, использующее идеи работы [15] (теорема 6.1 может быть доказана аналогичным образом, но с привлечением леммы 5.2 из [12]; мы не будем на этом останавливаться). Это доказательство более громоздко, однако оно проясняет суть явления: почему индекс оператора полностью определяется линейной частью преобразований ω_{is} в окрестности множества $\mathscr{K}_1$. Будет показано, что если оба оператора $\mathbf{L}$ и $\widehat{\mathbf{L}}$ фредгольмовы, то разность их сужений на ядро $\ker(\mathbf{P}) \subset \widetilde{H}_b^{l+2m}(G)$ оператора $\mathbf{P} = \mathbf{P}(y,D)$ (напомним, что $x = y$ при $n = 2$) можно "свести" к сумме двух операторов, один из которых имеет сколь угодно малую норму, а квадрат другого – компактный. При этом оператор с малой нормой возникает за счет нелинейной добавки в преобразованиях ω_{is} в окрестности множества $\mathscr{K}_1$, а оператор, квадрат которого компактен, – за счет преобразований, порождающих множества $\mathscr{K}_2$ и $\mathscr{K}_3$ (см. §1). Отметим, что указанная процедура не противоречит примеру из §2, поскольку она содержит такую операцию, как проектирование на подпространство $\ker(\mathbf{P})$, имеющее бесконечномерное ортогональное дополнение. По той же причине описанный прием сам по себе не доказывает, что оператор $\widehat{\mathbf{L}}$ фредгольмов, если $\mathbf{L}$ фредгольмов (или наоборот), а только позволяет доказать, что $\operatorname{ind} \mathbf{L} = \operatorname{ind} \widehat{\mathbf{L}}$, если априори известно, что оба оператора фредгольмовы.

1) Итак, введем операторы

$$\mathbf{B}, \widehat{\mathbf{B}}\colon \widetilde{H}_b^{l+2m}(G) \to \widetilde{\mathscr{H}}_b^l(\partial G) = \prod_{i=1}^{N_0} \prod_{\mu=1}^{m} \widetilde{H}_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i),$$

действующие по формулам $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_{i\mu}(y,D)\}$, $\widehat{\mathbf{B}} = \{\widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}(y,D)\}$. Обозначим через $\mathbf{C}$, $\widehat{\mathbf{C}}$ сужения операторов $\mathbf{B}$, $\widehat{\mathbf{B}}$ на подпространство $\ker(\mathbf{P}) \subset \widetilde{H}_b^{l+2m}(G)$. По теореме 5.1 операторы $\mathbf{L}$, $\widehat{\mathbf{L}}$ фредгольмовы. Следовательно, в силу [15, лемма 1.1] операторы $\mathbf{C}$, $\widehat{\mathbf{C}}$ также фредгольмовы, и для доказательства теоремы достаточно показать, что $\operatorname{ind} \mathbf{C} = \operatorname{ind} \widehat{\mathbf{C}}$.

2) Обозначим через $\mathbf{C}^1$, $\widehat{\mathbf{C}}^1$ сужения операторов $\mathbf{C}$, $\widehat{\mathbf{C}}$ на подпространство $\ker(\mathbf{C})^\perp \subset \ker(\mathbf{P})$. Очевидно, $\mathbf{C}^1 = \mathbf{C}\mathbf{I}_0$, $\widehat{\mathbf{C}}^1 = \widehat{\mathbf{C}}\mathbf{I}_0$, где $\mathbf{I}_0\colon \ker(\mathbf{C})^\perp \to \ker(\mathbf{P})$ – оператор вложения $\ker(\mathbf{C})^\perp$ в $\ker(\mathbf{P})$. Очевидно, $\dim\ker(\mathbf{I}_0) = 0$, $\operatorname{codim} \mathscr{R}(\mathbf{I}_0) = \dim\ker(\mathbf{C}) = m_0 < \infty$. Следовательно, по теореме 12.2 из [29]

$$\operatorname{ind} \mathbf{C}^1 = \operatorname{ind} \mathbf{C} + \operatorname{ind} \mathbf{I}_0 = \operatorname{ind} \mathbf{C} - m_0,$$

$$\operatorname{ind} \widehat{\mathbf{C}}^1 = \operatorname{ind} \widehat{\mathbf{C}} + \operatorname{ind} \mathbf{I}_0 = \operatorname{ind} \widehat{\mathbf{C}} - m_0.$$

Таким образом, достаточно доказать, что $\operatorname{ind}\mathbf{C}^1 = \operatorname{ind}\widehat{\mathbf{C}}^1$.

3) Обозначим через $\mathbf{P}_\perp$ оператор ортогонального проектирования $\widetilde{\mathscr{H}}_b^l(\partial G)$ на $\mathscr{R}(\mathbf{C}^1)^\perp$. Поскольку $\operatorname{codim}\mathscr{R}(\mathbf{C}^1) < \infty$, оператор $\mathbf{P}_\perp$ является конечномерным. Следовательно,

$$\operatorname{ind}\widehat{\mathbf{C}}^1 = \operatorname{ind}\big(\mathbf{C}^1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)\big).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\operatorname{ind}\mathbf{C}^1 = \operatorname{ind}\big(\mathbf{C}^1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)\big).$$

Так как $\mathbf{C}^1u$, $\mathbf{C}^1u + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)u \in \mathscr{R}(\mathbf{C}^1)$ при $u \in \ker(\mathbf{C})^\perp$, то можно рассматривать $\mathbf{C}^1$, $\mathbf{C}^1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)$ как операторы, действующие из $\ker(\mathbf{C})^\perp$ в $\mathscr{R}(\mathbf{C}^1)$. Тогда индексы этих операторов увеличатся на одно и то же число $m_1 = \operatorname{codim}\mathscr{R}(\mathbf{C}^1)$.

Очевидно, оператор $\mathbf{C}^1\colon \ker(\mathbf{C})^\perp \to \mathscr{R}(\mathbf{C}^1)$ имеет ограниченный обратный $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{C}^1)^{-1}\colon \mathscr{R}(\mathbf{C}^1) \to \ker(\mathbf{C})^\perp$ и $\operatorname{ind}\mathbf{C}^1 = 0$. По теореме 12.2 из [29]

$$\operatorname{ind}\big(\mathbf{C}^1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)\big) = \operatorname{ind}\big(\mathbf{I} + \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)\big).$$

Осталось показать, что $\operatorname{ind}\big(\mathbf{I} + \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)\big) = 0$.

4) Введем функцию $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\psi_\varepsilon(y) = 1$ при $y \in \mathscr{O}_{\varepsilon/2}(\mathscr{K})$, $\psi_\varepsilon(y) = 0$ при $y \notin \mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{K})$,

$$|D^\alpha\psi_\varepsilon(y)| \leqslant k_\alpha(\tilde\rho(y))^{-|\alpha|}, \qquad y \in \mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{K}), \tag{6.3}$$

где $k_\alpha > 0$ не зависят от ε.

Рассмотрим операторы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2\colon \ker(\mathbf{C})^\perp \to \ker(\mathbf{C})^\perp$, действующие по формулам

$$\mathbf{A}_1u = \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})\psi_\varepsilon u,$$
$$\mathbf{A}_2u = \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})(1 - \psi_\varepsilon)u.$$

Очевидно, $\mathbf{I} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)$. Носитель функции $(1 - \psi_\varepsilon)u$ отделен от множества $\mathscr{K}_1$, поэтому в силу доказательства теоремы 3.1 из [15] оператор $(\mathbf{A}_2)^2$ компактный.

Рассмотрим оператор $\mathbf{A}_1$. Поскольку оператор $\mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)$ ограниченный, имеем

$$\|\mathbf{A}_1u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} \leqslant c\|(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})\psi_\varepsilon u\|_{\widetilde{\mathscr{H}}_b^l(\partial G)}.$$

Отсюда, используя метод разбиения единицы, а также оценки (4.2)–(4.7) и (6.3), получим

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}_1u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} &\leqslant c_1\big(\varepsilon\|\psi_\varepsilon u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} \\ &\qquad + \|\mathbf{P}\psi_\varepsilon u\|_{\widetilde{H}_b^{l}(G)}\big) + k_1(\varepsilon)\|u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m-1}(G)} \\ &\leqslant c_2\big(\varepsilon\|u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} \\ &\qquad + \|\mathbf{P}\psi_\varepsilon u\|_{\widetilde{H}_b^{l}(G)}\big) + k_1(\varepsilon)\|u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m-1}(G)}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Так как $u \in \ker(\mathbf{P})$, из неравенства (6.4) и формулы Лейбница получаем

$$\|\mathbf{A}_1 u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} \leqslant c_2\varepsilon\|u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} + k_2(\varepsilon)\|u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m-1}(G)}, \tag{6.5}$$

где c_2 не зависит от ε. Из (6.5), компактности вложения $\widetilde{H}_b^{l+2m}(G) \subset \widetilde{H}_b^{l+2m-1}(G)$ и леммы 5.1 следует, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{F}_1$, где $\|\mathbf{M}_1\| \leqslant 2c_2\varepsilon$, а $\mathbf{F}_1$ – конечномерный оператор.

Таким образом, $\mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1) = \mathbf{M}_1 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{A}_2$. Следовательно, при достаточно малом ε из [29, теоремы 15.4 и 16.2] вытекает, что

$$\operatorname{ind}\big(\mathbf{I} + \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)\big) = 0.$$

Теорема 6.2 доказана.

Автор выражает глубокую признательность профессору А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodinamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). Reale Accad. Lincei. Roma. 1909. V. 3. P. 116–124.
2. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
3. *Picone M.* Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Ser. IV. 1932. V. 15. P. 942–948.
4. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications // Verh. Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. V. 1. P. 132–151.
5. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. №4. С. 739–740.
6. *Бицадзе А. В.* Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций // ДАН СССР. 1985. Т. 280. №3. С. 521–524.
7. *Кишкис К. Ю.* Об индексе задачи Бицадзе–Самарского для гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. №1. С. 105–110.
8. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. №1. С. 121–160.
9. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). №2. С. 279–302.
10. *Скубачевский А. Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №1. С. 120–131.
11. *Скубачевский А. Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №1. С. 128–139.
12. *Ковалева О. А., Скубачевский А. Л.* Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №6. С. 882–898.
13. *Gurevich P. L.* Nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles and the Green formula // Mitt. Math. Semin. Gießen. 2001. V. 247. P. 1–74.
14. *Гуревич П. Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2003. Т. 23.
15. *Skubachevskii A. L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 160. № 2. P. 323–341.

16. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
17. *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations // Ann. of Math. 1952. V. 55. P. 468–519.
18. *Feller W.* Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 1–30.
19. *Taira K.* On the existence of Feller semigroups with boundary conditions // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 99. P. 1–65.
20. *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теор. вероятн. и ее применения. 1959. Т. 4. № 2. С. 172–185.
21. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
22. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.
23. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
24. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
25. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Тр. Моск. матем. об-ва. 1978. Т. 37. С. 49–93.
26. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 197. С. 54–112.
27. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
28. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954.
29. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

Московский авиационный институт
(государственный технический университет)
E-mail: gurevichp@yandex.ru

Поступило в редакцию
15.III.2002