Обобщенные решения нелокальных эллиптических задач

П. Л. Гуревич*

Аннотация

Рассмотрены эллиптические уравнения порядка $2m$ с общими нелокальными краевыми условиями в плоской ограниченной области G с кусочно-гладкой границей. Изучены обобщенные решения, принадлежащие пространству Соболева $W_2^m(G)$. Доказано, что неограниченный оператор, действующий в пространстве $L_2(G)$, соответствующий эллиптическому уравнению и определенный на функциях из пространства $W_2^m(G)$, удовлетворяющих однородным нелокальным условиям, фредгольмов.

Библиография: 29 названий.

Введение

В одномерном случае нелокальные задачи изучали еще А. Зоммерфельд [1], Я. Д. Тамаркин [2], М. Пиконе [3]. В работе Т. Карлемана [4] ищется гармоническая в двумерной ограниченной области функция, на которую налагается нелокальное условие, связывающее ее значения в различных точках границы. Другую постановку нелокальной задачи, возникающую в теории плазмы, рассмотрели А. В. Бицадзе и А. А. Самарский [5]: найти гармоническую в прямоугольнике функцию, удовлетворяющую нелокальным условиям на сдвигах границы; при этом сдвиги могут отображать точки границы внутрь области. Различные обобщения указанных задач рассматривали многие авторы [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Наиболее сложной оказывается ситуация, когда носитель нелокальных членов имеет непустое пересечение с границей области: решения нелокальной задачи могут иметь степенные особенности вблизи некоторых точек даже при бесконечно гладкой границе области и бесконечно дифференцируемой правой части [13, 14]. Поэтому для изучения таких задач применяют специальные весовые пространства, введенные В. А. Кондратьевым при исследовании краевых задач в областях с особенностями на границе [15]. Наиболее полная теория в этом случае построена в работах А. Л. Скубачевского [13, 16, 17, 18, 19].

Отметим, что интерес к нелокальным задачам в настоящее время вызван не только значительными теоретическими достижениями, но также важными приложениями, возникающими в биофизике, теории диффузионных процессов [20], теории плазмы [21] и т. д.

В работе изучаются *обобщенные решения* эллиптического уравнения порядка $2m$ в двумерной области G, удовлетворяющие нелокальным краевым условиям, которые заданы на частях Γ_j границы области $\partial G = \bigcup \overline{\Gamma_j}$. Под обобщенными решениями понимаются функции из пространства Соболева $W^m(G) = W_2^m(G)$. Доказано, что неограниченный оператор, действующий в пространстве $L_2(G)$ и соответствующий нелокальной эллиптической задаче, фредгольмов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00312), Мин. образования РФ (грант № E02-1.0-131) и INTAS (грант YSF 2002-008).

Заметим, что решение нелокальной задачи можно искать в пространстве «гладких» функций, а именно в пространстве Соболева $W^{2m}(G)$ (см. [22, 23]) или в весовых пространствах $H_a^{2m}(G)$, где $\|u\|_{H_a^k(G)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_G \rho^{2(a-k+|\alpha|)}|D^\alpha u|^2\right)^{1/2}$, $k \ge 0$ — целое, $a \in \mathbb{R}$, $\rho = \rho(y) = \operatorname{dist}(y, \mathcal{K})$, $\mathcal{K} = \bigcup \overline{\Gamma_j} \setminus \Gamma_j$ — конечное множество точек сопряжения нелокальных условий (см. [13, 17]). В обоих случаях задаче будет соответствовать ограниченный оператор, фредгольмовость которого определяется спектральными свойствами некоторых вспомогательных нелокальных задач с параметром. В свою очередь, на спектральные свойства вспомогательных задач влияют такие факторы, как значения коэффициентов в нелокальных условиях и геометрическая структура носителя нелокальных членов и границы области вблизи множества $\mathcal{K}$. Если же мы ищем обобщенные решения (т. е. функции из $W^m(G)$), то соответствующий неограниченный оператор оказывается фредгольмовым вне зависимости от перечисленных выше факторов.

Ранее вопрос о фредгольмовости неограниченного оператора в $L_2(G)$ изучался лишь в том случае, когда нелокальные условия заданы на сдвигах границы [19], или же в случае нелокального возмущения задачи Дирихле для уравнения второго порядка [11, 12]. Случай эллиптического уравнения порядка $2m$ с общими нелокальными условиями рассматривается впервые.

1 Постановка нелокальных задач в ограниченной области

1.1 Постановка задачи

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей ∂G. Введем множество $\mathcal{K} \subset \partial G$, состоящее из конечного числа точек. Пусть $\partial G \setminus \mathcal{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Gamma_i$, где Γ_i — открытые (в топологии ∂G) кривые класса C^∞. Будем предполагать, что в окрестности каждой точки $g \in \mathcal{K}$ область G совпадает с некоторым плоским углом.

Обозначим через $\mathbf{P}(y, D_y) = \mathbf{P}(y, D_{y_1}, D_{y_2})$ и $B_{i\mu s}(y, D_y) = B_{i\mu s}(y, D_{y_1}, D_{y_2})$ дифференциальные операторы порядков $2m$ и $m_{i\mu}$ ($m_{i\mu} \le m-1$) соответственно с комплекснозначными коэффициентами класса C^∞, а через $\mathbf{P}^0(y, D_y)$ и $B^0_{i\mu s}(y, D_y)$ — их главные однородные части ($i = 1, \dots, N$; $\mu = 1, \dots, m$; $s = 0, \dots, S_i$). Здесь $D_y = (D_{y_1}, D_{y_2})$, $D_{y_j} = -i\partial/\partial y_j$.

Сформулируем условия на операторы $\mathbf{P}(y, D_y)$ и $B_{i\mu 0}(y, D_y)$, которые будут соответствовать «локальной» эллиптической задаче. Предположим, что оператор $\mathbf{P}(y, D_y)$ *собственно эллиптичен на* $\overline{G}$; в частности, для всех $\theta \in \mathbb{R}^2$ и $y \in \overline{G}$ выполнена оценка

$$A^{-1}|\theta|^{2m} \le |\mathbf{P}^0(y, \theta)| \le A|\theta|^{2m}, \quad A > 0. \tag{1.1}$$

Далее, пусть $y \in \overline{\Gamma_i}$. Без ограничения общности можем считать, что вблизи заданной точки y кривая $\overline{\Gamma_i}$ определена уравнением $y_2 = 0$. Предположим, что *для всех* $i = 1, \dots, N$ *система операторов* $\{B_{i\mu 0}(y, D_y)\}_{\mu=1}^m$ *удовлетворяет условию накрытия по отношению к оператору* $\mathbf{P}(y, D_y)$. Другими словами, пусть многочлен

$$B'_{i\mu 0}(y, \tau) \equiv \sum_{\nu=1}^{m} b_{i\mu\nu}(y)\tau^{\nu-1} \equiv B^0_{i\mu 0}(y, 1, \tau) \ \left(\operatorname{mod} \mathbf{M}^+(y, \tau)\right)$$

есть остаток от деления $B^0_{i\mu 0}(y, 1, \tau)$ на $\mathbf{M}^+(y, \tau)$, где

$$\mathbf{M}^+(y, \tau) = \prod_{\nu=1}^{m} (\tau - \tau_\nu^+(y)),$$

$\tau_1^+(y), \dots, \tau_m^+(y)$ — корни с положительной мнимой частью многочлена $\mathbf{P}^0(y,1,\tau)$, причем $\mathbf{P}^0(y,1,\tau)$, $B^0_{i\mu 0}(y,1,\tau)$ и $\mathbf{M}^+(y,\tau)$ рассматриваются как многочлены от τ. Тогда условие накрытия означает, что

$$d_i(y) = \det \|b_{i\mu\nu}(y)\|^m_{\mu,\nu=1} \neq 0.$$

Так как каждая из дуг $\overline{\Gamma_i}$, $i=1,\dots,N$, — компакт, то

$$D = \min_{i=1,\dots,N} \inf_{y\in\overline{\Gamma_i}} |d_i(y)| > 0. \tag{1.2}$$

Подчеркнем, что нормальность операторов $B_{i\mu 0}(y,D_y)$ на дугах $\overline{\Gamma_i}$ не предполагается.

Для целых $k \geq 0$ обозначим через $W^k(G) = W^k_2(G)$ пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W^k(G)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_G |D^\alpha u|^2\, dy \right)^{1/2}$$

(при $k=0$ полагаем $W^0(G) = L_2(G)$). Для целых $k \geq 1$ введем пространство $W^{k-1/2}(\Gamma)$ следов на гладкой кривой $\Gamma \subset \overline{G}$ с нормой

$$\|\psi\|_{W^{k-1/2}(\Gamma)} = \inf \|u\|_{W^k(G)} \quad (u \in W^k(G) : u|_\Gamma = \psi). \tag{1.3}$$

Положим $\mathbf{B}^0_{i\mu} u = B_{i\mu 0}(y,D_y)u(y)|_{\Gamma_i}$. Как отмечалось выше, операторы $\mathbf{P}(y,D_y)$ и $\mathbf{B}^0_{i\mu}$ будут *соответствовать «локальной» краевой задаче.*

Определим операторы, соответствующие нелокальным условиям вблизи множества $\mathcal{K}$. Пусть Ω_{is} $(i=1,\dots,N;\ s=1,\dots,S_i)$ — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_i$ кривой $\overline{\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})}$ на множество $\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ так, что $\Omega_{is}(\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})) \subset G$ и

$$\Omega_{is}(g) \in \mathcal{K} \quad \text{для } g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}. \tag{1.4}$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{dist}(y,\mathcal{K}) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность множества $\mathcal{K}$. Таким образом, преобразования Ω_{is} отображают дуги $\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$ строго внутрь области G, а их концевые точки $\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ — в концевые точки.

Уточним структуру преобразований Ω_{is} вблизи множества $\mathcal{K}$. Обозначим преобразование $\Omega_{is} : \mathcal{O}_i \to \Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ через Ω^{+1}_{is}, а через $\Omega^{-1}_{is} : \Omega_{is}(\mathcal{O}_i) \to \mathcal{O}_i$ — преобразование, обратное к Ω_{is}. Назовем *орбитой* точки $g \in \mathcal{K}$, и обозначим $\operatorname{Orb}(g)$, множество всех точек вида $\Omega^{\pm1}_{i_q s_q}(\dots \Omega^{\pm1}_{i_1 s_1}(g)) \in \mathcal{K}$ $(1 \leq s_j \leq S_{i_j},\ j=1,\dots,q)$, т. е. всех тех, которые можно получить, применяя к g последовательно преобразования $\Omega^{+1}_{i_j s_j}$ или $\Omega^{-1}_{i_j s_j}$, отображающие точки множества $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}$.

Очевидно, для любых $g, g' \in \mathcal{K}$ либо $\operatorname{Orb}(g) = \operatorname{Orb}(g')$, либо $\operatorname{Orb}(g) \cap \operatorname{Orb}(g') = \varnothing$. Далее будем считать, что множество $\mathcal{K}$ состоит из одной орбиты (все результаты без труда переносятся на общий случай, когда $\mathcal{K}$ состоит из конечного числа непересекающихся орбит). Очевидно, множество (орбита) $\mathcal{K}$ состоит из N точек; обозначим их через g_j, $j=1,\dots,N$.

Будем считать ε настолько малым (см. ниже замечание 1.3), чтобы существовали окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ точек $g_j \in \mathcal{K}$, такие, что $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j) \supset \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$ и

1. в окрестности $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ граница ∂G совпадает с некоторым углом;
2. $\overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)} \cap \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)} = \varnothing$ для любых $g_j, g_k \in \mathcal{K}$, $k \neq j$;
3. если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \subset \mathcal{O}_i$ и $\Omega_{is}\big(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\big) \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$.

Для каждой точки $g_j \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ зафиксируем преобразование $y \mapsto y'(g_j)$, представляющее собой сдвиг на вектор $-\overrightarrow{Og_j}$ и поворот на некоторый угол и переводящее множество $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ в окрестность нуля $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$, а $G \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ и $\Gamma_i \cap \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ — соответственно в пересечение плоского угла $K_j = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ |\omega| < \omega_j\}$ с окрестностью $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$ и пересечение стороны $\gamma_{j\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2 : \ \omega = (-1)^\sigma \omega_j\}$ ($\sigma = 1$ или $\sigma = 2$) угла K_j с окрестностью $\mathcal{O}_{\varepsilon_1}(0)$. Здесь (ω, r) — полярные координаты точки y, $0 < \omega_j < \pi$.

Условие 1.1. *Преобразованию $\Omega_{is}(y)$ ($i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, S_i$) при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$, $g_j \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$, в новой системе координат $\{y'\}$ соответствует поворот и растяжение вектора y'.*

Замечание 1.1. Условие 1.1 совместно с условием $\Omega_{is}(\Gamma_i) \subset G$ означает, что если $g \in \Omega_{is}(\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}) \cap \overline{\Gamma_j} \cap \mathcal{K} \neq \varnothing$, то кривые $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i})$ и $\overline{\Gamma_j}$ пересекаются в точке g под ненулевым углом.

Выберем число ε_0, $0 < \varepsilon_0 \le \varepsilon$, удовлетворяющее следующему условию: если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(g_k) \subset \Omega_{is}\big(\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\big)$. Рассмотрим функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что

$$\zeta(y) = 1, \quad y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_0/2}(\mathcal{K}), \qquad \operatorname{supp} \zeta \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{K}). \tag{1.5}$$

Введем нелокальные операторы $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ по формуле

$$\mathbf{B}^1_{i\mu} u = \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big), \quad y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}), \qquad \mathbf{B}^1_{i\mu} u = 0, \quad y \in \Gamma_i \setminus (\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}))$$

(запись $\big(B_{i\mu s}(y, D_y)u\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)$ означает, что выражение $B_{i\mu s}(x, D_x)u(x)$ берется при значении аргумента $x = \Omega_{is}(y)$). Поскольку $\mathbf{B}^1_{i\mu} u = 0$, если $\operatorname{supp} u \subset \overline{G} \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon_0}(\mathcal{K})}$, то будем говорить, что операторы $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ *соответствуют нелокальным слагаемым с носителем вблизи множества $\mathcal{K}$*.

Для $\rho > 0$ обозначим $G_\rho = \{y \in G : \operatorname{dist}(y, \partial G) > \rho\}$. Рассмотрим операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$, удовлетворяющие следующему условию (ср. [13, 18, 22]).

Условие 1.2. *Существуют числа $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 0$ и $\rho > 0$ такие, что для всех*

$$u \in W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})}) \cap W^{2m}(G_\rho)$$

выполнены неравенства

$$\|\mathbf{B}^2_{i\mu} u\|_{W^{2m - m_{i\mu} - 1/2}(\Gamma_i)} \le c_1 \|u\|_{W^{2m}(G \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})})}, \tag{1.6}$$

$$\|\mathbf{B}^2_{i\mu} u\|_{W^{2m - m_{i\mu} - 1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})})} \le c_2 \|u\|_{W^{2m}(G_\rho)}; \tag{1.7}$$

здесь $i = 1, \dots, N$, $\mu = 1, \dots, m$, $c_1, c_2 > 0$.

Из неравенства (1.6), в частности, следует, что $\mathbf{B}^2_{i\mu} u = 0$, если $\operatorname{supp} u \subset \mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})$. Поэтому будем говорить, что операторы $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ *соответствуют нелокальным слагаемым с носителем вне множества $\mathcal{K}$.*

Условия 1.1 и 1.2 будем предполагать выполненными на протяжении всей статьи.

Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathbf{P}(y, D_y) u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{1.8}$$

$$\mathbf{B}_{i\mu} u \equiv \mathbf{B}^0_{i\mu} u + \mathbf{B}^1_{i\mu} u + \mathbf{B}^2_{i\mu} u = 0 \quad (y \in \Gamma_i; \ i = 1, \dots, N; \ \mu = 1, \dots, m), \tag{1.9}$$

где $f_0 \in L_2(G)$. Введем пространство $W^m_B(G)$, состоящее из функций $u \in W^m(G)$, удовлетворяющих однородным нелокальным условиям (1.9): $\mathbf{B}_{i\mu} u = 0$.

Рассмотрим неограниченный оператор $\mathbf{P} : \operatorname{Dom}(\mathbf{P}) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующий в пространстве распределений $\mathcal{D}'(G)$ по формуле

$$\mathbf{P} u = \mathbf{P}(y, D_y) u, \quad u \in \operatorname{Dom}(\mathbf{P}) = \{u \in W^m_B(G) : \mathbf{P}(y, D_y) u \in L_2(G)\}.$$

Определение 1.1. Функция u называется *обобщенным решением* задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$, если $u \in \mathrm{Dom}\,(\mathbf{P})$ и $\mathbf{P}u = f_0$.

Можно также дать другое, эквивалентное, определение обобщенного решения. Для этого запишем оператор $\mathbf{P}(y, D_y)$ в дивергентной форме:

$$\mathbf{P}(y, D_y) = \sum_{0 \le |\xi|, |\beta| \le m} D^\beta p_{\xi\beta}(y) D^\xi,$$

где $p_{\xi\beta}$ — бесконечно дифференцируемые функции.

Для всякого множества $X \in \mathbb{R}^2$, имеющего непустую внутренность, будем обозначать через $C_0^\infty(X)$ множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{X}$ функций с компактными носителями, содержащимися в X.

Определение 1.2. Функция u называется *обобщенным решением* задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$, если $u \in W_B^m(G)$ и для всех $v \in C_0^\infty(G)$ выполнено интегральное тождество

$$\sum_{0 \le |\xi|,\, |\beta| \le m} \int\limits_G p_{\xi\beta}(y) D^\xi u \overline{D^\beta v}\, dy = \int\limits_G f_0 \overline{v}\, dy.$$

Замечание 1.2. Обобщенные решения априори принадлежат пространству $W^m(G)$, тогда как условие 1.2 сформулировано для функций, принадлежащих пространству W^{2m} внутри области и вблизи гладкой части границы. Такая формулировка оправдана тем, что всякое обобщенное решение в действительности принадлежит пространству W^{2m} вне сколь угодно малой окрестности множества $\mathcal{K}$ (см. ниже лемму 2.1).

Замечание 1.3. Выше мы предположили, что число ε достаточно мало (тогда как $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ могут быть произвольными). Покажем, что это не ограничивает общности. Пусть имеется число $\hat\varepsilon$, $0 < \hat\varepsilon < \varepsilon$. Выберем число $\hat\varepsilon_0$, $0 < \hat\varepsilon_0 \le \hat\varepsilon$, удовлетворяющее следующему условию: если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$ и $\Omega_{is}(g_j) = g_k$, то $\mathcal{O}_{\hat\varepsilon_0}(g_k) \subset \Omega_{is}\big(\mathcal{O}_{\hat\varepsilon}(g_j)\big)$. Рассмотрим функцию $\hat\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\hat\zeta(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\hat\varepsilon_0/2}(\mathcal{K})$ и $\operatorname{supp}\hat\zeta \subset \mathcal{O}_{\hat\varepsilon_0}(\mathcal{K})$. Введем операторы $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ следующим образом: $\mathbf{B}^1_{i\mu} u = \sum\limits_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)$ при $y \in \Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$, $\mathbf{B}^1_{i\mu} u = 0$ при $y \in \Gamma_i \setminus (\Gamma_i \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}))$. Очевидно,

$$\mathbf{B}^0_{i\mu} + \mathbf{B}^1_{i\mu} + \mathbf{B}^2_{i\mu} = \mathbf{B}^0_{i\mu} + \hat{\mathbf{B}}^1_{i\mu} + \hat{\mathbf{B}}^2_{i\mu},$$

где $\hat{\mathbf{B}}^2_{i\mu} = \mathbf{B}^1_{i\mu} - \hat{\mathbf{B}}^1_{i\mu} + \mathbf{B}^2_{i\mu}$. Так как $\mathbf{B}^1_{i\mu} u - \hat{\mathbf{B}}^1_{i\mu} u = 0$ вблизи множества $\mathcal{K}$, то оператор $\mathbf{B}^1_{i\mu} - \hat{\mathbf{B}}^1_{i\mu}$ удовлетворяет при соответствующих $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ условию 1.2 (более подробно см. [22, § 1]). Таким образом, число ε всегда может быть выбрано настолько малым, насколько нам требуется. При этом, однако, следует иметь в виду, что оператор $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ и значения $\varkappa_1, \varkappa_2, \rho$ могут измениться.

1.2 Пример нелокальной задачи

Модельным для нас может служить следующий пример.

Пример 1.1. Пусть операторы $\mathbf{P}(y, D_y)$ и $B_{i\mu s}(y, D_y)$ — те же, что и выше. Пусть Ω_{is} ($i = 1, \dots, N$; $s = 1, \dots, S_i$) — бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность $\mathcal{O}_i$ (*всей*) кривой Γ_i на множество $\Omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ так, что $\Omega_{is}(\Gamma_i) \subset G$. Рассмотрим нелокальную задачу

$$\mathbf{P}(y, D_y)u = f_0(y) \quad (y \in G), \tag{1.10}$$

$$B_{i\mu 0}(y, D_y)u(y)|_{\Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y, D_y)u\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i} = 0 \qquad (y \in \Gamma_i;\ i = 1, \dots, N;\ \mu = 1, \dots, m). \tag{1.11}$$

Подчеркнем: *изначально мы не предполагаем, что преобразования* Ω_{is} *удовлетворяют условию* (1.4); *однако далее мы представим нелокальные операторы в виде суммы операторов* $\mathbf{B}^0_{i\mu}$, $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ *и* $\mathbf{B}^2_{i\mu}$, *причем преобразования, которые войдут в определение операторов* $\mathbf{B}^1_{i\mu}$, *будут удовлетворять условию* (1.4). Выберем для этого ε настолько малым, чтобы для любой точки $g \in \mathcal{K}$ множество $\overline{\mathcal{O}_\varepsilon(g)}$ пересекалось с дугой $\overline{\Omega_{is}(\Gamma_i)}$ только, если $g \in \overline{\Omega_{is}(\Gamma_i)}$. Если для $g \in \overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}$ выполнено $\Omega_{is}(g) \in \mathcal{K}$, то наложим на преобразование $\Omega_{is}(y)$ при $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g)$ условие 1.1.

Замечание 1.4. Согласно замечанию 1.1, условие 1.1 есть ограничение на геометрическую структуру носителя нелокальных членов вблизи множества $\mathcal{K}$. Если же $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i} \cap \mathcal{K}) \subset \partial G \setminus \mathcal{K}$, то на характер подхода кривой $\Omega_{is}(\overline{\Gamma_i})$ к границе ∂G (так же, как и в работах [13, 17]) никаких ограничений не налагается.

Обозначим через $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ функцию, удовлетворяющую соотношениям (1.5), и введем операторы $\mathbf{B}^0_{i\mu}u = B_{i\mu 0}(y, D_y)u(y)|_{\Gamma_i}$, $\mathbf{B}^1_{i\mu}u = \sum\limits_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i}$, $\mathbf{B}^2_{i\mu}u = \sum\limits_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y, D_y)((1-\zeta)u)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\Gamma_i}$ (см. рис. 1.1, 1.2). Так как носитель функции ζ сосредоточен вблизи множества $\mathcal{K}$, то можно считать, что преобразования Ω_{is}, фигурирующие в определении оператора $\mathbf{B}^1_{i\mu}$, заданы в некоторой окрестности множества $\mathcal{K}$ и удовлетворяют условию (1.4). Кроме того, согласно [22, п. 1.2] оператор $\mathbf{B}^2_{i\mu}$ удовлетворяет условию 1.2. Следовательно, задача (1.10), (1.11) представима в виде (1.8), (1.9).

1.3 Нелокальные задачи вблизи множества $\mathcal{K}$

При изучении задачи (1.8), (1.9) особое внимание следует уделять поведению решений в окрестности множества $\mathcal{K}$ точек сопряжения нелокальных условий. Выпишем соответствующие модельные задачи.

Обозначим $u(y)$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_j)$ через $u_j(y)$. Если $g_j \in \overline{\Gamma_i}$, $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j)$, $\Omega_{is}(y) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_1}(g_k)$, то обозначим $u(\Omega_{is}(y))$ через $u_k(\Omega_{is}(y))$. Тогда нелокальная задача (1.8), (1.9) в ε-окрестности множества (орбиты) $\mathcal{K}$ примет вид

$$\mathbf{P}(y, D_y)u_j = f_0(y) \quad (y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap G),$$

$$B_{i\mu 0}(y, D_y)u_j(y)|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} + \sum_{s=1}^{S_i} \big(B_{i\mu s}(y, D_y)(\zeta u_k)\big)\big(\Omega_{is}(y)\big)\big|_{\mathcal{O}_\varepsilon(g_j)\cap\Gamma_i} = f_{i\mu}(y)$$
$$\big(y \in \mathcal{O}_\varepsilon(g_j) \cap \Gamma_i;\ i \in \{1 \le i \le N : g_j \in \overline{\Gamma_i}\};\ j = 1, \dots, N;\ \mu = 1, \dots, m\big),$$

где $f_{i\mu} = -\mathbf{B}^2_{i\mu}u$.

Пусть $y \mapsto y'(g_j)$ — описанные в п. 1.1 преобразования координат. Обозначим $K^\varepsilon_j = K_j \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)$, $\gamma^\varepsilon_{j\sigma} = \gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(0)$, введем функции

$$U_j(y') = u_j(y(y')),\ f_j(y') = f_0(y(y')),\ y' \in K^\varepsilon_j, \qquad f_{j\sigma\mu}(y') = f_{i\mu}(y(y')),\ y' \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma},$$

где $\sigma = 1$ ($\sigma = 2$), если преобразование $y \mapsto y'(g_j)$ переводит Γ_i в сторону γ_{j1} (γ_{j2}) угла K_j, и переобозначим y' через y. Тогда в силу условия 1.1 задача (1.8), (1.9) примет вид

$$\mathbf{P}_j(y, D_y)U_j = f_j(y) \quad (y \in K^\varepsilon_j), \tag{1.12}$$

$$\sum_{k,s} (B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y) = f_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma^\varepsilon_{j\sigma}). \tag{1.13}$$

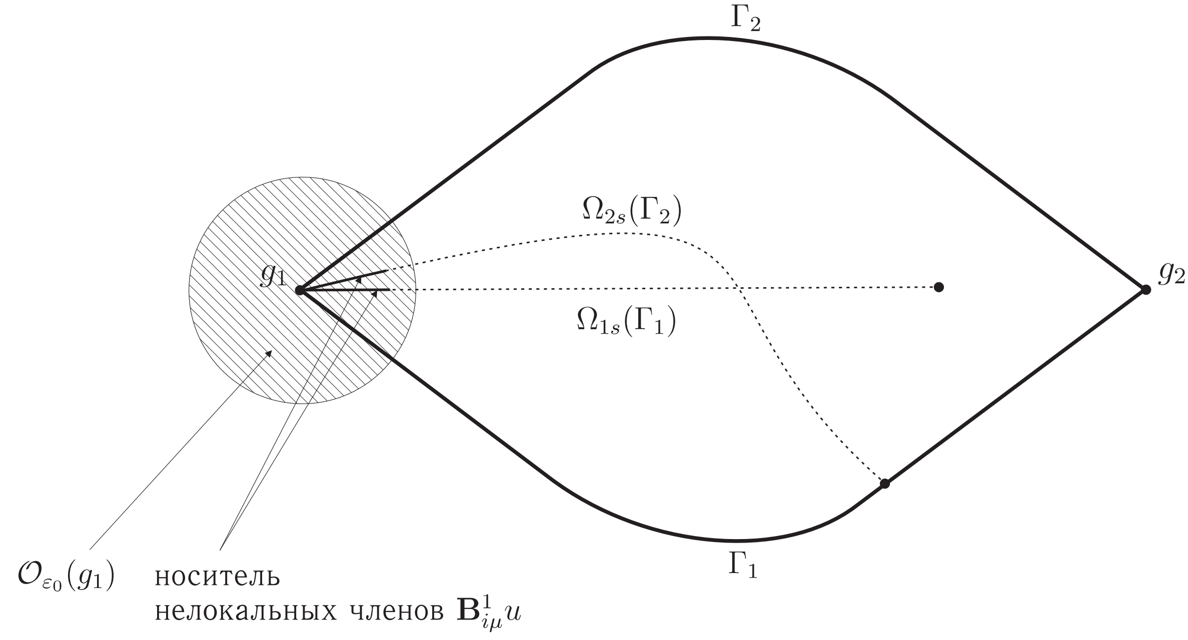

Рис. 1.1: К задаче (1.10), (1.11)

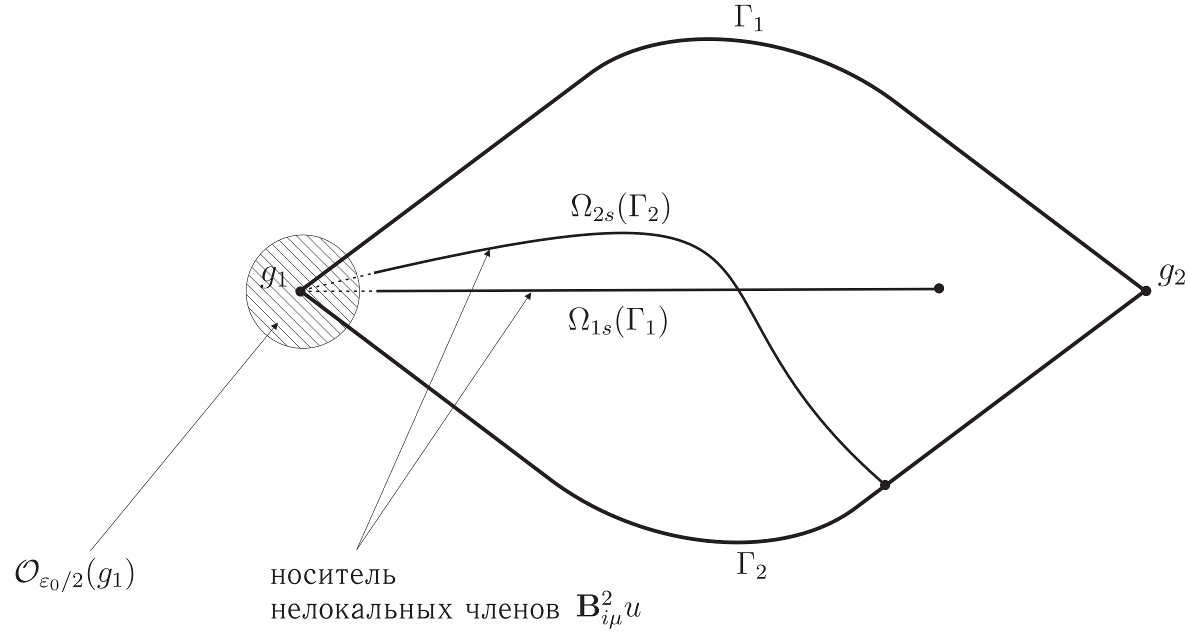

Рис. 1.2: К задаче (1.10), (1.11)

Здесь (и далее, если не оговорено противное) $j,k = 1,\dots,N$; $\sigma = 1,2$; $\mu = 1,\dots,m$; $s = 0,\dots,S_{j\sigma k}$; $\mathbf{P}_j(y,D_y)$ и $B_{j\sigma\mu ks}(y,D_y)$ — операторы порядков $2m$ и $m_{j\sigma\mu}$, $m_{j\sigma\mu} \le m-1$, соответственно с переменными коэффициентами класса C^∞:

$$\mathbf{P}_j(y,D_y) = \sum_{|\alpha|\le 2m} p_{j\alpha}(y)D_y^\alpha, \quad B_{j\sigma\mu ks}(y,D_y) = \sum_{|\alpha|\le m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu ks\alpha}(y)D_y^\alpha;$$

$\mathcal{G}_{j\sigma ks}$ — оператор поворота на угол $\omega_{j\sigma ks}$ и растяжения в $\chi_{j\sigma ks} > 0$ раз в плоскости $\{y\}$, причем $|(-1)^\sigma b_j + \omega_{j\sigma ks}| < b_k$, если $(k,s) \ne (j,0)$ (см. замечание 1.1), и $\omega_{j\sigma j0} = 0$, $\chi_{j\sigma j0} = 1$ (т. е. $\mathcal{G}_{j\sigma j0}y \equiv y$).

2 Фредгольмова разрешимость нелокальных задач

Сформулируем основной результат, доказательству которого будет посвящен этот параграф.

Теорема 2.1. *Пусть оператор $\mathbf{P}(y,D_y)$ собственно эллиптичен на $\overline{G}$ и для всех $i = 1,\dots,N$ система операторов $\{B_{i\mu 0}(y,D_y)\}_{\mu=1}^m$ удовлетворяет условию накрытия по отношению к $\mathbf{P}(y,D_y)$ на дуге $\overline{\Gamma_i}$. Пусть выполнены условия* 1.1 *и* 1.2. *Тогда оператор $\mathbf{P}$ фредгольмов.*

Замечание 2.1. Задаче (1.8), (1.9) можно сопоставить ограниченный оператор, действующий из $W^{2m}(G)$ в $L_2(G)$. Такой оператор изучен в [22, 23]: показано, что в отличие от рассматриваемого случая на его фредгольмовость влияют спектральные свойства некоторых вспомогательных нелокальных задач с параметром и выполнение определенных алгебраических соотношений между операторами $\mathbf{P}(y,D_y)$, $\mathbf{B}^0_{i\mu}$ и $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ в точках множества $\mathcal{K}$.

2.1 Конечномерность ядра

В этом пункте мы установим конечномерность ядра оператора $\mathbf{P}$. Для этого предварительно исследуем гладкость обобщенных решений задачи (1.8), (1.9) — сначала вне некоторой окрестности множества $\mathcal{K}$, а затем вблизи множества $\mathcal{K}$. Следующая лемма является обобщением части 1 теоремы 5 в [24].

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие* 1.2. *Пусть $u \in W^m(G)$ — обобщенное решение задачи* (1.8), (1.9) *с правой частью $f_0 \in L_2(G)$. Тогда*

$$u \in W^{2m}\big(G \setminus \overline{\mathcal{O}_\delta(\mathcal{K})}\big) \quad \text{при любом} \quad \delta > 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. 1) Обозначим через $W^k_{\mathrm{loc}}(G)$ пространство распределений v на G, таких, что $\psi v \in W^k(G)$ для всех $\psi \in C_0^\infty(G)$. По теореме 3.2 из [25, гл. 2] имеем

$$u \in W^{2m}_{\mathrm{loc}}(G). \tag{2.2}$$

Отсюда и из оценки (1.7) следует, что

$$\mathbf{B}^2_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}). \tag{2.3}$$

Зафиксируем произвольную точку $g \in \Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}$. Выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\overline{\mathcal{O}_\delta(g) \cap \Gamma_i} \subset \Gamma_i \setminus \overline{\mathcal{O}_{\varkappa_2}(\mathcal{K})}. \tag{2.4}$$

Тогда в окрестности $\mathcal{O}_\delta(g)$ функция u есть решение «локальной» задачи

$$\mathbf{P}(y,D_y)u = f_0(y) \quad (y \in \mathcal{O}_\delta(g) \cap G), \tag{2.5}$$
$$B_{i\mu 0}(y,D_y)u = f'_{i\mu}(y) \quad (y \in \mathcal{O}_\delta(g) \cap \Gamma_i;\ \mu = 1,\dots,m), \tag{2.6}$$

где $f'_{i\mu}(y) = -\mathbf{B}^1_{i\mu}u(y) - \mathbf{B}^2_{i\mu}u(y)$, $y \in \mathcal{O}_\delta(g)\cap\Gamma_i$. В силу соотношений (2.2), (2.3), (2.4) и определения оператора $\mathbf{B}^1_{i\mu}$ имеем $f'_{i\mu} \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\mathcal{O}_\delta(g)\cap\Gamma_i)$.

Применяя к задаче (2.5), (2.6) теорему 8.2 из [25, гл. 2][1], получим, что

$$u \in W^{2m}(\mathcal{O}_{\delta/2}(g)\cap G). \tag{2.7}$$

Используя метод разбиения единицы, из (2.2) и (2.7) выводим

$$u \in W^{2m}\big(G\setminus\overline{\mathcal{O}_{\varkappa_1}(\mathcal{K})}\big). \tag{2.8}$$

2) Из включения (2.8) и неравенства (1.6) следует, что

$$\mathbf{B}^2_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i). \tag{2.9}$$

Учитывая (2.9), мы можем повторить рассуждения п. 1) доказательства для произвольной точки $g\in\Gamma_i$ и $\delta>0$ такого, что

$$\overline{\mathcal{O}_\delta(g)\cap\Gamma_i}\subset\Gamma_i.$$

В результате получим включение (2.7), справедливое уже для произвольной точки $g\in\Gamma_i$. Отсюда и из (2.2), используя метод разбиения единицы, выводим (2.1). □

Теперь изучим гладкость решений задачи (1.8), (1.9) в окрестности множества $\mathcal{K}$. Так как вблизи множества $\mathcal{K}$ обобщенные решения могут иметь степенные особенности [13], то решения естественно рассматривать в соответствующих весовых пространствах. Введем эти пространства.

Пусть либо $Q=\{y\in\mathbb{R}^2:\ r>0,\ |\omega|<b\}$, либо $Q=\{y\in\mathbb{R}^2:\ 0<r<d,\ |\omega|<b\}$, $0<b<\pi$, $d>0$, либо $Q=G$; в первом и втором случаях обозначим через $\mathcal{M}$ множество $\{0\}$, а в третьем случае — множество $\mathcal{K}$. Введем пространство $H^k_a(Q)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{Q}\setminus\mathcal{M})$ по норме

$$\|w\|_{H^k_a(Q)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int\limits_Q \rho^{2(a-k+|\alpha|)}|D^\alpha_y w|^2dy\right)^{1/2},$$

где $a\in\mathbb{R}$, $k\ge0$ — целое, $\rho=\rho(y)=\operatorname{dist}(y,\mathcal{M})$. Через $H^{k-1/2}_a(\gamma)$ при $k\ge1$ обозначим пространство следов на гладкой кривой $\gamma\subset\overline{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H^{k-1/2}_a(\gamma)} = \inf\|w\|_{H^k_a(Q)}\quad (w\in H^k_a(Q): w|_\gamma=\psi). \tag{2.10}$$

Пусть u — обобщенное решение задачи (1.8), (1.9), а $U_j(y')=u_j(y(y'))$, $j=1,\dots,N$, — функции, соответствующие множеству (орбите) $\mathcal{K}$ и удовлетворяющие задаче (1.12), (1.13) с правой частью $\{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$ (см. п. 1.3).

Положим $d_1=\min\{\chi_{j\sigma ks},1\}/2$, $d_2=2\max\{\chi_{j\sigma ks},1\}$. Будем считать ε настолько малым, что $d_2\varepsilon<\varepsilon_1$. Тогда в силу леммы 2.1

$$U_j\in W^{2m}(K_j^{d_2\varepsilon}\cap\{|y|>\delta\})\quad\text{при любом } \delta>0. \tag{2.11}$$

Далее, из включения $U_j\in W^m(K_j^{d_2\varepsilon})$ и из [26, лемма 5.2] следует, что

$$U_j\in H^m_{a-m}(K_j^{d_2\varepsilon})\subset H^0_{a-2m}(K_j^{d_2\varepsilon}),\quad a>2m-1. \tag{2.12}$$

[1]В теореме 8.2 из [25, гл. 2] дополнительно предполагается, что операторы $B_{i\mu0}(y,D_y)$ нормальны на Γ_i, а их порядки различны. Однако нетрудно проверить, что упомянутая теорема верна и без этого предположения (см. [25, гл. 2, п. 8.3]).

Наконец, $f_j \in L_2(K_j^\varepsilon)$ и в силу леммы 2.1 и оценки (1.6) $f_{j\sigma\mu} \in W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)$. Следовательно, согласно [26, лемма 5.2]

$$f_j \in H_a^0(K_j^\varepsilon), \quad f_{j\sigma\mu} \in H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon), \quad a > 2m-1. \tag{2.13}$$

При помощи следующих двух лемм мы покажем, что из соотношений (2.11)–(2.13) вытекает включение $U_j \in H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})$.

Обозначим $K_{jq} = K_j \cap \{\varepsilon d_2^{-3} d_1^{4-q}/2 < |y| < \varepsilon d_2^{-3} d_2^{4-q}\}$, где $q = 0, \dots, 4$.

Лемма 2.2. *Пусть выполнено условие* 1.1. *Тогда для всех* $U \in \prod\limits_j W^{2m}(K_{j0})$ *справедлива оценка*

$$\sum_j \|U_j\|_{W^{2m}(K_{j4})} \le c \sum_j \big\{ \|\mathbf{P}_j(y, D_y)U_j\|_{L_2(K_{j1})} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \|\mathbf{B}_{j\sigma\mu}(y, D_y)U|_{\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j1}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j1}})} + \|U_j\|_{L_2(K_{j1})}\big\}, \tag{2.14}$$

где $c > 0$ *не зависит от* U.

Доказательство. Из общей теории эллиптических уравнений следует, что

$$\|U_j\|_{W^{2m}(K_{j4})} \le k_1\big(\|\mathbf{P}_j(y, D_y)U_j\|_{L_2(K_{j3})} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \|B_{j\sigma\mu j0}(y, D_y)U_j|_{\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j3}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j3}})} + \|U_j\|_{L_2(K_{j3})}\big). \tag{2.15}$$

Пусть $(k, s) \ne (j, 0)$. Так как при этом $\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma}) \cap \overline{K_{k2}}$ лежит строго внутри области K_{k1}, то, используя непрерывность оператора следа в пространствах Соболева, аналогично (2.15) получаем

$$\|B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)U_k(\mathcal{G}_{j\sigma ks}y)|_{\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j3}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j3}})} \le \\ \le k_2\|B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)U_k|_{\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma})\cap\overline{K_{k2}}}\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\mathcal{G}_{j\sigma ks}(\gamma_{j\sigma})\cap\overline{K_{k2}})} \le \\ \le k_3(\|\mathbf{P}_j(y, D_y)U_k\|_{L_2(K_{k1})} + \|U_k\|_{L_2(K_{k1})}). \tag{2.16}$$

Из оценок (2.15) и (2.16) вытекает (2.14). □

Замечание 2.2. Пусть нормы в $C^0(\overline{K_{j1}})$ коэффициентов $p_{j\alpha}$ операторов $\mathbf{P}_j(y, D_y)$ и нормы в $C^{2m-m_{j\sigma\mu}}(\overline{K_{j0}})$ коэффициентов $b_{j\sigma\mu ks\alpha}$ операторов $B_{j\sigma\mu ks}(y, D_y)$ ограничены константой C. Пусть той же константой C ограничены нормы в $C^1(\overline{K_{j1}})$ коэффициентов $p_{j\alpha}$, $|\alpha| = 2m$, при старших производных в операторах $\mathbf{P}_j(y, D_y)$. Тогда константа c в неравенстве (2.14) зависит только от C, от константы A в (1.1) и от константы D в (1.2).

Лемма 2.3. *Пусть выполнено условие* 1.1. *Предположим, что функция* U *удовлетворяет соотношениям* (2.11), (2.12) *и является решением задачи* (1.12), (1.13) *с правой частью* $\{f_j, f_{j\sigma\mu}\}$, *удовлетворяющей соотношениям* (2.13). *Тогда* $U \in \prod\limits_j H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})$ *и*

$$\sum_j \|U_j\|_{H_a^{2m}(K_j^{\varepsilon/d_2^3})} \le c \sum_j \big\{ \|f_j\|_{H_a^0(K_j^\varepsilon)} + \sum_{\sigma,\mu} \|f_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^\varepsilon)} + \|U_j\|_{H_{a-2m}^0(K_j^\varepsilon)} \big\}, \tag{2.17}$$

где $c > 0$ *не зависит от* U.

Доказательство. Обозначим $K_{jq}^s = K_j \cap \{\varepsilon d_2^{-3} d_1^{4-q} 2^{-s-1} < |y| < \varepsilon d_2^{-3} d_2^{4-q} 2^{-s}\}$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно,

$$\bigcup_{s=0}^{\infty} K_{j1}^s = K_j^{\varepsilon}, \quad \bigcup_{s=0}^{\infty} K_{j4}^s = K_j^{\varepsilon/d_2^3}. \tag{2.18}$$

Положим $U_j^s(y') = U_j(2^{-s}y')$ и сделаем замену переменных $y = 2^{-s}y'$ в уравнении

$$\mathbf{P}_j(y, D_y)U_j \equiv \sum_{|\alpha|\le 2m} p_{j\alpha}(y) D_y^{\alpha} U_j(y) = f_j(y) \quad (y \in K_{j1}^s)$$

и в нелокальных условиях

$$\sum_{k,s} \sum_{|\alpha|\le m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu ks\alpha}(x) D_x^{\alpha} U_j(x)|_{x=\mathcal{G}_{j\sigma ks}y} = f_{j\sigma\mu}(y) \quad (y \in \gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}^s});$$

умножая обе части первого из получившихся равенств на $2^{-s\cdot 2m}$, а второго — на $2^{-s\cdot m_{j\sigma\mu}}$, имеем

$$\sum_{|\alpha|\le 2m} p_{j\alpha}^s(y') 2^{s(|\alpha|-2m)} D_{y'}^{\alpha} U_j^s(y') = 2^{-s\cdot 2m} f_j^s(y') \quad (y' \in K_{j1}^0), \tag{2.19}$$

$$\sum_{k,s} \sum_{|\alpha|\le m_{j\sigma\mu}} b_{j\sigma\mu ks\alpha}^s(x') 2^{s(|\alpha|-m_{j\sigma\mu})} D_{x'}^{\alpha} U_j^s(x')|_{x'=\mathcal{G}_{j\sigma ks}y'} = 2^{-s\cdot m_{j\sigma\mu}} f_{j\sigma\mu}^s(y') \quad (y' \in \gamma_{j\sigma} \cap \overline{K_{j1}^0}), \tag{2.20}$$

где $p_{j\alpha}^s(y') = p_{j\alpha}(2^{-s}y')$, $b_{j\sigma\mu ks\alpha}^s(x') = b_{j\sigma\mu ks\alpha}(2^{-s}x')$, $f_j^s(y') = f_j(2^{-s}y')$ и $f_{j\sigma\mu}^s(y') = f_{j\sigma\mu}(2^{-s}y')$.

Применяя к задаче (2.19), (2.20) лемму 2.2, получим

$$\sum_j \|U_j^s\|_{W^{2m}(K_{j4}^0)} \le k_1 \sum_j \Big\{ \|2^{-s\cdot 2m} f_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \|2^{-s\cdot m_{j\sigma\mu}} f_{j\sigma\mu}^s\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j1}^0})} + \|U_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} \Big\}, \tag{2.21}$$

где константа k_1, в силу замечания 2.2, не зависит от s.

Обозначим через $\Phi_{j\sigma\mu} \in H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям: $\Phi_{j\sigma\mu}|_{\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon}} = f_{j\sigma\mu}$ и

$$\|\Phi_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_j^{\varepsilon})} \le 2\|f_{j\sigma\mu}\|_{H_a^{2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}^{\varepsilon})} \tag{2.22}$$

(существование такой функции вытекает из (2.10)). Тогда $\Phi_{j\sigma\mu}^s|_{\gamma_{j\sigma}\cap\overline{K_{j1}^0}} = f_{j\sigma\mu}^s$, где $\Phi_{j\sigma\mu}^s(y') = \Phi_{j\sigma\mu}(2^{-s}y')$. Следовательно, из (2.21) и (1.3) получаем

$$\sum_j \|U_j^s\|_{W^{2m}(K_{j4}^0)} \le k_1 \sum_j \Big\{ \|2^{-s\cdot 2m} f_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \|2^{-s\cdot m_{j\sigma\mu}} \Phi_{j\sigma\mu}^s\|_{W^{2m-m_{j\sigma\mu}}(K_{j1}^0)} + \|U_j^s\|_{L_2(K_{j1}^0)} \Big\}. \tag{2.23}$$

Делая в неравенстве (2.23) обратную замену переменных $y' = 2^s y$, получим

$$\sum_j \sum_{|\alpha|\le 2m} \|2^{-s|\alpha|} D_y^{\alpha} U_j\|_{L_2(K_{j4}^s)} \le k_1 \sum_j \Big\{ \|2^{-s\cdot 2m} f_j\|_{L_2(K_{j1}^s)} + \\ + \sum_{\sigma,\mu} \sum_{|\alpha|\le 2m-m_{j\sigma\mu}} \|2^{-s(|\alpha|+m_{j\sigma\mu})} \Phi_{j\sigma\mu}\|_{L_2(K_{j1}^s)} + \|U_j\|_{L_2(K_{j1}^s)} \Big\}. \tag{2.24}$$

Умножая неравенство (2.24) на $2^{-s(a-2m)}$, суммируя по s и учитывая (2.22) и (2.18), выводим (2.17). $\square$

Лемма 2.3 совместно с леммой 2.1 дает $u \in H_a^{2m}(G)$, $a > 2m-1$, где u — произвольное обобщенное решение задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 \in L_2(G)$.

Из [16, лемма 2.1] и [17, теорема 3.2] следует, что при почти всех $a > 2m-1$ множество решений из $H_a^{2m}(G)$ задачи (1.8), (1.9) с правой частью $f_0 = 0$ образует конечномерное пространство. Таким образом, доказан следующий результат.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия* 1.1 *и* 1.2. *Тогда ядро оператора* $\mathbf{P}$ *конечномерно.*

2.2 Замкнутость оператора и его образа. Конечномерность коядра

Для доказательства фредгольмовости оператора $\mathbf{P}$ нам потребуется рассмотреть задачу (1.8), (1.9) в пространствах с весом a таким, что $0 < a \le m$. Трудность здесь заключается в том, что из принадлежности $u \in H_a^{2m}(G)$ теперь, вообще говоря, не следует, что $\mathbf{B}_{i\mu}^2 u$ принадлежит $H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$; поэтому и сумма $\mathbf{B}_{i\mu}u = \mathbf{B}_{i\mu}^0 u + \mathbf{B}_{i\mu}^1 u + \mathbf{B}_{i\mu}^2 u$ может не принадлежать $H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Можно лишь гарантировать, что $\mathbf{B}_{i\mu}u \in H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, $a' > 2m-1$ (это следует из принадлежности $\mathbf{B}_{i\mu}u \in W^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ и [26, лемма 5.2]). Однако в [23, § 6] доказано, что

$$\{\mathbf{P}(y, D_y)u,\ \mathbf{B}_{i\mu}u\} \in \mathcal{H}_a^0(G,\Gamma) \dotplus \mathcal{R}_a^0(G,\Gamma) \quad \text{при всех} \quad u \in H_a^{2m}(G),\ a > 0,$$

где $\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma) = H_a^0(G) \times \prod\limits_{i,\mu} H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, а $\mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)$ — некоторое *конечномерное* пространство, вложенное в $\{0\} \times \prod\limits_{i,\mu} H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$ при любом $a' > 2m-1$, т. е. пространство $\mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)$ содержит лишь функции вида $\{0, f_{i\mu}\}$, $f_{i\mu} \in H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$, $f_{i\mu} \notin H_a^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)$. Зафиксируем некоторое число $a' > 2m-1$. Тогда любая функция $\{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{H}_a^0(G,\Gamma) \dotplus \mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)$ представима единственным образом в виде $\{f_0, f_{i\mu}\} = \{f_0, f_{i\mu}^1\} + \{0, f_{i\mu}^2\}$, где $\{f_0, f_{i\mu}^1\} \in \mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)$, $\{0, f_{i\mu}^2\} \in \mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)$, и ее норма равна

$$\|\{f_0, f_{i\mu}\}\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)\dotplus\mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)} = \Big(\|\{f_0, f_{i\mu}^1\}\|^2_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)} + \sum_{i,\mu} \|f_{i\mu}^2\|^2_{H_{a'}^{2m-m_{i\mu}-1/2}(\Gamma_i)}\Big)^{1/2}.$$

Более того, по теореме 6.1 из [23] оператор

$$\mathbf{L}_a = \{\mathbf{P}(y, D_y),\ \mathbf{B}_{i\mu}\} : H_a^{2m}(G) \to \mathcal{H}_a^0(G,\Gamma) \dotplus \mathcal{R}_a^0(G,\Gamma), \quad a > 0,$$

фредгольмов при почти всех $a > 0$. Другими словами, если $u \in H_a^{2m}(G)$, то $\mathbf{L}_a u$ «принадлежит» пространству $\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)$ с точностью до функции вида $\{0, f_{i\mu}\}$ из *конечномерного* пространства $\mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)$.

Используя оператор $\mathbf{L}_a$, докажем следующий результат.

Лемма 2.5. *Пусть выполнены условия* 1.1 *и* 1.2. *Тогда оператор* $\mathbf{P}$ *замкнут, образ* $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ *замкнут и* $\operatorname{codim}\mathcal{R}(\mathbf{P}) < \infty$.

Доказательство. 1) Рассмотрим при $0 < a \le m$ вспомогательный неограниченный оператор $\mathbf{P}_a : \mathrm{Dom}\,(\mathbf{P}_a) \subset L_2(G) \to L_2(G)$, действующий по формуле

$$\mathbf{P}_a u = \mathbf{P}(y, D_y)u, \quad u \in \mathrm{Dom}\,(\mathbf{P}_a) = \{u \in H_a^{2m}(G) :\ \mathbf{B}_{i\mu}u = 0,\ \mathbf{P}(y, D_y)u \in L_2(G)\}.$$

Зафиксируем такое a, $0 < a \le m$, чтобы оператор $\mathbf{L}_a$ был фредгольмов. Покажем, что тогда и оператор $\mathbf{P}_a$ будет фредгольмов.

Из фредгольмовости $\mathbf{L}_a$, компактности вложения $H_a^{2m}(G) \subset H_a^0(G)$ (см. [15, лемма 3.5]) и теоремы 7.1 из [27] следует, что для всех $u \in H_a^{2m}(G)$

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_1(\|\mathbf{L}_a u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)\dot{+}\mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)} + \|u\|_{H_a^0(G)}). \qquad (2.25)$$

Теперь пусть $u \in \mathrm{Dom}\,(\mathbf{P}_a)$. Тогда $\mathbf{L}_a u = \{\mathbf{P}(y, D_y)u, 0\}$, $\mathbf{P}(y, D_y)u \in L_2(G) \subset H_a^0(G)$, и, следовательно,

$$\|\mathbf{L}_a u\|_{\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)\dot{+}\mathcal{R}_a^0(G,\Gamma)} = \|\mathbf{P}(y, D_y)u\|_{H_a^0(G)}.$$

Отсюда и из (2.25), учитывая непрерывность вложения $L_2(G) \subset H_a^0(G)$ при $a > 0$, получим

$$\|u\|_{H_a^{2m}(G)} \le k_2(\|\mathbf{P}(y, D_y)u\|_{H_a^0(G)} + \|u\|_{H_a^0(G)}) \le k_3(\|\mathbf{P}(y, D_y)u\|_{L_2(G)} + \|u\|_{L_2(G)}), \qquad (2.26)$$

где $u \in \mathrm{Dom}\,(\mathbf{P}_a)$. Из неравенства (2.26) вытекает, что оператор $\mathbf{P}_a$ замкнут. Следовательно, снова используя (2.26) и теорему 7.1 из [27], получим что $\dim\ker\mathbf{P}_a < \infty$ (ясно, что $\ker\mathbf{P}_a = \ker\mathbf{L}_a$) и $\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$ замкнут.

Рассмотрим произвольную функцию $f_0 \in L_2(G)$. Очевидно, $f_0 \in H_a^0(G)$. В силу [23, следствие 6.1] существуют функционалы $F_1, \dots, F_{q_0}$ из сопряженного пространства $\mathcal{H}_a^0(G,\Gamma)^*$, такие, что если $\langle\{f_0, 0\},\ F_q\rangle = 0$, $q = 1, \dots, q_0$, то задача (1.8), (1.9) имеет решение $u \in H_a^{2m}(G)$. Так как

$$|\langle\{f_0, 0\},\ F_q\rangle| \le k_4\|f_0\|_{H_a^0(G)} \le k_5\|f_0\|_{L_2(G)},$$

то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существуют функции $f_1, \dots, f_{q_0} \in L_2(G)$ такие, что $\langle\{f_0, 0\},\ F_q\rangle = (f_0,\ f_q)_{L_2(G)}$, $q = 1, \dots, q_0$. Следовательно, $\mathrm{codim}\,\mathcal{R}(\mathbf{P}_a) \le q_0$. Итак, оператор $\mathbf{P}_a$ фредгольмов.

2) Поскольку $H_a^{2m}(G) \subset H_{a-m}^m(G) \subset W^m(G)$ при $a \le m$, то имеет место соотношение

$$\mathbf{P}_a \subset \mathbf{P}. \qquad (2.27)$$

Из (2.27), в частности, следует, что образ $\mathcal{R}(\mathbf{P})$ замкнут и $\mathrm{codim}\,\mathcal{R}(\mathbf{P}) \le \mathrm{codim}\,\mathcal{R}(\mathbf{P}_a) \le q_0$.

Осталось доказать, что $\mathbf{P}$ замкнут[2]. Обозначим через $h_1, \dots, h_k$ базис в пространстве

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{P}) \ominus \mathcal{R}(\mathbf{P}_a).$$

Тогда существуют функции $v_1, \dots, v_k \in \mathrm{Dom}\,(\mathbf{P})$ такие, что $\mathbf{P}v_j = h_j$, $j = 1, \dots, k$. Так как $h_j \notin \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$, то $v_j \notin \mathrm{Dom}\,(\mathbf{P}_a)$. Ясно также, что функции $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы, так как линейно независимы функции $h_1, \dots, h_k$.

Рассмотрим конечномерное пространство

$$\mathcal{N} = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_k, \ker\mathbf{P}) \ominus \ker\mathbf{P}_a.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{N} \cap \mathrm{Dom}\,\mathbf{P}_a = \{0\}$. Действительно, если $u \in \mathcal{N} \cap \mathrm{Dom}\,\mathbf{P}_a$, то

$$u = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + v,$$

где α_i — некоторые константы, $v \in \ker\mathbf{P}$. Тогда, учитывая (2.27), имеем

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i h_i = \mathbf{P}u = \mathbf{P}_a u \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a).$$

[2]Отметим, что из замкнутости образа некоторого оператора $\mathbf{P}$ в гильбертовом пространстве и конечномерности его ядра и коядра, вообще говоря, не следует замкнутость самого оператора $\mathbf{P}$; это можно показать, используя рассуждения, близкие к приведенным, например, в [28, гл. 2, п. 18]. Однако если дополнительно предположить, что оператор $\mathbf{P}$ является расширением фредгольмова оператора, то, как мы увидим, $\mathbf{P}$ будет замкнут.

Следовательно, $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, и, значит, $u = v$. Снова используя (2.27), видим, что $u = v \in \ker \mathbf{P}_a$. Отсюда, по определению пространства $\mathcal{N}$, получаем $u = 0$.

Обозначим через $\operatorname{Gr}\mathbf{P}$ ($\operatorname{Gr}\mathbf{P}_a$) график оператора $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}_a$). Как известно, оператор $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}_a$) замкнут тогда и только тогда, когда замкнут его график $\operatorname{Gr}\mathbf{P}$ ($\operatorname{Gr}\mathbf{P}_a$) в $L_2(G) \times L_2(G)$.

Так как $\operatorname{Gr}\mathbf{P}_a$ замкнут (как график замкнутого оператора) и $\operatorname{Gr}\mathbf{P}_a \subset \operatorname{Gr}\mathbf{P}$, а пространства $\mathcal{N}$ и $\mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$ конечномерны, то для доказательства замкнутости оператора $\mathbf{P}$ достаточно показать, что

$$\operatorname{Gr}\mathbf{P} \subset \operatorname{Gr}\mathbf{P}_a \dotplus (\mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp). \tag{2.28}$$

Очевидно, сумма в (2.28) действительно является прямой суммой: если

$$(u, f) \in \operatorname{Gr}\mathbf{P}_a \cap (\mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp),$$

то $u \in \operatorname{Dom}\mathbf{P}_a \cap \mathcal{N} = \{0\}$, и следовательно, $(u, f) = (u, \mathbf{P}_a u) = (0, 0)$.

Далее, пусть $(u, f) \in \operatorname{Gr}\mathbf{P}$, т. е. $u \in \operatorname{Dom}\mathbf{P}$ и $f = \mathbf{P}u$. Представим функцию f в виде суммы

$$f = f_1 + f_2,$$

где $f_1 \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)$, $f_2 \in \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$. Выберем элемент $u_1 \in \operatorname{Dom}(\mathbf{P}_a)$ такой, что $\mathbf{P}_a u_1 = f_1$. Тогда $u_2 = u - u_1 \in \operatorname{Dom}(\mathbf{P})$ и $\mathbf{P}u_2 = f_2$. Без ограничения общности можем считать, что

$$u_2 \perp \ker \mathbf{P}_a; \tag{2.29}$$

если это соотношение не выполнено, то следует рассмотреть проекцию u_{2a} функции u_2 на $\ker \mathbf{P}_a$ и заменить u_1 на $u_1 + u_{2a}$, а u_2 — на $u_2 - u_{2a}$. Очевидно, $(u_1, f_1) \in \operatorname{Gr}\mathbf{P}_a$ и, учитывая (2.29), $(u_2, f_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{R}(\mathbf{P}_a)^\perp$. Таким образом, соотношение (2.28) и вся лемма доказаны. ☐

Из лемм 2.4 и 2.5 вытекает теорема 2.1.

Замечание 2.3. Используя результаты работы [29], можно показать, что теорема 2.1 справедлива и в том случае, когда преобразования Ω_{is} *нелинейны* вблизи точек множества $\mathcal{K}$, а их линейные части удовлетворяют условию 1.1.

Автор выражает благодарность профессору А. Л. Скубачевскому за внимание к работе.

Список литературы

[1] Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodinamischen Erklärung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). 1909. Vol. 3. Reale Accad. Lincei. Roma. P. 116–124.

[2] Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград. 1917.

[3] Picone M. Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Academia nazionale dei Lincei. Atti dei convegni. 1932. Vol. 15. P. 942–948.

[4] Carleman T. Sur la théorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. Vol. 1. P. 132–151.

[5] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739-740.

[6] Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 187–246.

[7] Browder F. Non-local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math. 1964. Vol. 86. P. 735–750.

[8] Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д. О нелокальных граничных задачах для эллиптических уравнений // Математические исслед. 1971. Т. 6. Вып. 2(20). С. 63–73.

[9] Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем // Сиб. матем. журн. 1972. Т. 13. № 1. С. 165–181.

[10] Кишкис К.Ю. Об индексе задачи Бицадзе–Самарского для гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 105–110.

[11] Гущин А.К., Михайлов В.П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.

[12] Гущин А.К. Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 5. С. 17–36.

[13] Скубачевский А.Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Мат. сб. 1986. Т. 129 (171). № 2. С. 279–302.

[14] Skubachevskii A.L. Regularity of solutions for some nonlocal elliptic problem // Russian J. of Mathematical Physics. 2001. Vol. 8. P. 365–374.

[15] Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.

[16] Скубачевский А.Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 120–131.

[17] Скубачевский А.Л. О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 128–139.

[18] Skubachevskii A.L. On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 1991. Vol. 160. № 2. P. 323–341.

[19] Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser. 1997.

[20] Feller W. Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 77. P. 1–30.

[21] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.

[22] Gurevich P.L. Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, I // Russ. J. Math. Phys. 2003. Vol. 10. № 4. P. 436–466.

[23] Gurevich P.L. Solvability of nonlocal elliptic problems in Sobolev spaces, II // Russ. J. Math. Phys. 2004. Vol. 11. № 1. P. 1–44.

[24] Скубачевский А.Л. О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1590–1599.

[25] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

[26] Ковалева О.А., Скубачевский А.Л. Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом // Мат. заметки. 2000. Т. 67. Вып. 6. С. 882–898.

[27] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

[28] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

[29] Гуревич П.Л. Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения // Известия РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67. № 6. С. 81–120.