Математические заметки

том 72 выпуск 2 август 2002

УДК 517.956.22

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ДВУГРАННЫХ УГЛАХ

П. Л. Гуревич

В работе рассматриваются нелокальные эллиптические задачи в двугранных и плоских углах, возникающие при изучении нелокальных задач в ограниченной области в случае пересечения носителя нелокальных данных с границей. Изучаются фредгольмова и однозначная разрешимость указанных задач в соответствующих весовых пространствах. В качестве аппарата исследований применяются априорные оценки решений и формула Грина для нелокальных эллиптических задач.

Библиография: 15 названий.

При изучении эллиптических задач с нелокальными условиями наибольшие трудности возникают в случае пересечения носителя нелокальных данных с границей (см. [1]–[4]). Это приводит к появлению степенных особенностей у решений вблизи некоторого множества, поэтому нелокальные эллиптические задачи естественно рассматривать в весовых пространствах (см. [5]–[7]). При получении априорных оценок решений и построении правого регуляризатора нелокальных задач в ограниченной области возникают модельные нелокальные краевые задачи в двугранных углах (см. [3], [4]). В настоящей работе предлагается подход к изучению нелокальных задач, основанный на использовании формулы Грина и сопряженных нелокальных задач. Такой подход позволяет снять дополнительные ограничения работы [3] на соответствующую "локальную" модельную задачу и получить необходимые и достаточные условия фредгольмовости нелокальных задач в плоских углах и однозначной разрешимости таких задач в двугранных углах. При этом в качестве сопряженных возникают нелокальные задачи трансмиссии, рассматривавшиеся в работах [8] (в случае ограниченной области с гладкой границей), [9] (в одномерном случае) и др.

В данной работе мы ограничимся для наглядности нелокальными возмущениями задачи Дирихле для оператора Лапласа.

1. Постановка нелокальных эллиптических краевых задач

1.1. Введем двугранный угол

$$\Omega = \{x = (y,z)\colon r > 0,\, b_1 < \varphi < b_2,\, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-01030, а также гранта № E00-1-195 Министерства образования РФ.

с гранями

$$\Gamma_j = \{x = (y, z) \colon r > 0,\ \varphi = b_j,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}, \qquad j = 1, 2,$$

и ребром $M = \{x = (y, z) \colon y = 0,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$. Здесь $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$; r, φ – полярные координаты точки y; $0 < b_1 < b_2 < 2\pi$. Рассмотрим нелокальную краевую задачу в двугранном угле Ω

$$\Delta U(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$U(x)|_{\Gamma_j} + a_j U(\mathscr{G}_j y, z)|_{\Gamma_j} = g_j(x), \qquad x \in \Gamma_j. \tag{1.2}$$

Здесь и далее индекс j принимает значения $j = 1, 2$; $a_j \in \mathbb{C}$; $\mathscr{G}_j$ есть оператор поворота на угол φ_j и растяжения в χ_j раз в плоскости $\{y\}$. При этом $b_1 < b_1 + \varphi_1 = b_2 + \varphi_2 = b < b_2$, $0 < \chi_j$.

Введем пространство $H_a^l(\Omega)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus M)$ по норме

$$\|w\|_{H_a^l(\Omega)} = \biggl(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int_\Omega r^{2(a-l+|\alpha|)} |D_x^\alpha w(x)|^2 \, dx\biggr)^{1/2},$$

где $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus M)$ – множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций с компактными носителями из $\overline{\Omega} \setminus M$; $a \in \mathbb{R}$, $l \geqslant 0$ целое. Через $H_a^{l-1/2}(\Gamma')$ при $l \geqslant 1$ обозначим пространство следов на $\Gamma' = \{x = (y, z) \colon r > 0,\ \varphi = b',\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, $b_1 \leqslant b' \leqslant b_2$, с нормой $\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma')} = \inf \|w\|_{H_a^l(\Omega)}$, $w \in H_a^l(\Omega) \colon w|_{\Gamma'} = \psi$. Введем ограниченный оператор

$$\mathscr{L}_\Omega \colon H_a^2(\Omega) \to H_a^0(\Omega, \Gamma) = H_a^0(\Omega) \times \prod_j H_a^{3/2}(\Gamma_j)$$

по формуле

$$\mathscr{L}_\Omega U = \{\Delta U, U(x)|_{\Gamma_j} + a_j U(\mathscr{G}_j y,\ z)|_{\Gamma_j}\}.$$

Обозначим через $W^l(Q)$, $l \geqslant 0$ целое, пространство Соболева функций, интегрируемых в квадрате вместе со всеми обобщенными производными вплоть до l-го порядка по Q, где $Q \subset \mathbb{R}^n$ – область с липшицевой границей. Через $W^{l-1/2}(\Upsilon)$ при $l \geqslant 1$ обозначим пространство следов на $(n-1)$-мерном гладком многообразии $\Upsilon \subset \overline{Q}$.

Лемма 1.1. *Для любых $w \in W^l(Q)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место оценка*

$$|\lambda|^{l-s} \|w\|_{W^s(Q)} \leqslant c(\|w\|_{W^l(Q)} + |\lambda|^l \|w\|_{L_2(Q)}). \tag{1.3}$$

Здесь $0 < s < l$; $c > 0$ не зависит от w, λ.

Лемма 1.2. *Для любых $w \in W^1(Q)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнена оценка*

$$|\lambda|^{1/2} \|w|_\Upsilon\|_{L^2(\Upsilon)} \leqslant c(\|w\|_{W^1(Q)} + |\lambda| \|w\|_{L_2(Q)}). \tag{1.4}$$

Здесь $c > 0$ не зависит от w, λ.

Доказательство лемм 1.1, 1.2 содержится в [10, гл. 1]. Используя лемму 1.1 и свойства весовых пространств, в работе [2, § 1] был получен следующий результат.

Лемма 1.3. *Для любых $w \in H_a^l(\Omega)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено*

$$|\lambda|^s \|w\|_{H_{a-s}^{l-s}(\Omega)} \leqslant c(\|w\|_{H_a^l(\Omega)} + |\lambda|^l \|w\|_{H_{a-l}^0(\Omega)}). \tag{1.5}$$

Здесь $0 < s < l$; $c > 0$ не зависит от w, λ.

1.2. Рассмотрим вспомогательную нелокальную краевую задачу в плоском угле:

$$\Delta u(y) - u(y) = f(y), \qquad y \in K, \tag{1.6}$$

$$u(y)|_{\gamma_j} + a_j u(\mathscr{G}_j y)|_{\gamma_j} = g_j(y), \qquad y \in \gamma_j, \tag{1.7}$$

где $K = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ 0 < b_1 < \varphi < b_2 < 2\pi\}$, $\gamma_j = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \varphi = b_j\}$.

Аналогично предыдущему вводятся пространства функций $H_a^l(K)$ и $H_a^{l-1/2}(\gamma')$, где $\gamma' = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \varphi = b'\}$, $b_1 \leqslant b' \leqslant b_2$. Введем пространство $E_a^l(K)$ как пополнение $C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|w\|_{E_a^l(K)} = \biggl(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int_K r^{2a}(r^{2(|\alpha|-l)} + 1)|D_y^\alpha w(y)|^2\, dy \biggr)^{1/2}.$$

Через $E_a^{l-1/2}(\gamma')$ при $l \geqslant 1$ обозначим пространство следов на луче γ' с нормой

$$\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')} = \inf \|w\|_{E_a^l(K)}, \qquad w \in E_a^l(K) : w|_{\gamma'} = \psi.$$

Конструктивные определения пространств $H_a^{l-1/2}(\Gamma')$, $H_a^{l-1/2}(\gamma')$ и $E_a^{l-1/2}(\gamma')$, эквивалентные данным, см. в [6, § 1]. Установим одно свойство весовых пространств, которое потребуется ниже.

Лемма 1.4. *Для любой $\psi \in E_a^{l-1/2}(\gamma')$ имеет место оценка*

$$\biggl(\int_{\gamma'} r^{2(a-(l-1/2))}|\psi|^2\, d\gamma \biggr)^{1/2} \leqslant c\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')},$$

где $c > 0$ не зависит от ψ.

Доказательство. Из [7, гл. 6, п. 1.3] следует, что норма $\|u\|_{E_a^l(K)}$ и норма

$$\biggl(\sum_{k=0}^{l} \int_0^\infty r^{2(a-(l-1/2))} \sum_{j=0}^{l-k} (1+r)^{2(l-k-j)} \|(rD_r)^k u(r,\cdot)\|^2_{W^j(b_1,b_2)}\, dr \biggr)^{1/2} \tag{1.8}$$

эквивалентны; здесь $u(r,\varphi)$ есть функция $u(y)$, записанная в полярных координатах.

Выберем функцию $u \in E_a^l(K)$ так, что $u|_{\gamma'} = \psi$, $\|u\|_{E_a^l(K)} \leqslant 2\|\psi\|_{E_a^{l-1/2}(\gamma')}$. Поскольку $u(r,\varphi)|_{\varphi=b'} = \psi(r)$, в силу непрерывности операции взятия следа в пространствах Соболева имеем $|\psi(r)|^2 \leqslant k_1\|u(r,\cdot)\|^2_{W^l(b_1,b_2)}$. Отсюда и из эквивалентности нормы $\|u\|_{E_a^l(K)}$ и нормы (1.8) получим

$$\int_{\gamma'} r^{2(a-(l-1/2))}|\psi|^2\, d\gamma \leqslant k_1 \int_0^\infty r^{2(a-(l-1/2))}\|u(r,\cdot)\|^2_{W^l(b_1,b_2)}\, dr \leqslant k_2\|u\|^2_{E_a^l(K)}. \tag{1.9}$$

Из (1.9) и неравенства $\|u\|_{E^l_a(K)} \leqslant 2\|\psi\|_{E^{l-1/2}_a(\gamma')}$ следует утверждение леммы.

Введем ограниченный оператор

$$\mathscr{L}_K : E^2_a(K) \to E^0_a(K,\gamma) = E^0_a(K) \times \prod_j E^{3/2}_a(\gamma_j)$$

по формуле

$$\mathscr{L}_K u = \{\Delta u - u, u(y)|_{\gamma_j} + a_j u(\mathscr{G}_j y)|_{\gamma_j}\}.$$

1.3. Следуя работе [3], рассмотрим модельную аналитическую оператор-функцию

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\lambda) : W^2(b_1,b_2) \to W^0[b_1,b_2] = L_2(b_1,b_2) \times \mathbb{C}^2,$$

определенную по формуле

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\lambda)\widetilde{U} = \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2}\widetilde{U}(\varphi) - \lambda^2\widetilde{U}(\varphi), \qquad \widetilde{U}(\varphi)|_{\varphi=b_j} + a_j e^{i\lambda \ln \chi_j}\widetilde{U}(\varphi+\varphi_j)|_{\varphi=b_j} \right\}.$$

Введем в гильбертовых пространствах $W^2(b_1,b_2)$ и $W^0[b_1,b_2]$ эквивалентные нормы, зависящие от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ $(|\lambda| \geqslant 1)$:

$$|||\widetilde{U}|||_{W^2(b_1,b_2)} = (\|\widetilde{U}\|^2_{W^2(b_1,b_2)} + |\lambda|^4\|\widetilde{U}\|^2_{L_2(b_1,b_2)})^{1/2},$$

$$|||\{\widetilde{F},\widetilde{G}_j\}|||_{W^0[b_1,b_2]} = \left(\|\widetilde{F}\|^2_{L_2(b_1,b_2)} + \sum_j |\lambda|^3|\widetilde{G}_j|^2\right)^{1/2}.$$

Лемма 1.5. *Для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\widetilde{\mathscr{L}}(\lambda)$ фредгольмов, $\operatorname{ind}\widetilde{\mathscr{L}}(\lambda) = 0$; для любого $h \in \mathbb{R}$ существует $q_0 > 1$ такое, что для $\lambda \in J_{h,q_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}\lambda = h, |\operatorname{Re}\lambda| \geqslant q_0\}$ оператор $\widetilde{\mathscr{L}}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda) \colon W^0[b_1,b_2] \to W^2(b_1,b_2)$ и*

$$|||\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)\widetilde{\Phi}|||_{W^2(b_1,b_2)} \leqslant c|||\widetilde{\Phi}|||_{W^0[b_1,b_2]} \tag{1.10}$$

для всех $\widetilde{\Phi} \in W^0[b_1,b_2]$, где $c > 0$ не зависит от λ и $\widetilde{\Phi}$; оператор-функция $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda) \colon W^0[b_1,b_2] \to W^2(b_1,b_2)$ конечномероморфна.

Лемма 1.6. *Для любого $0 < \varepsilon < 1/\max|\ln\chi_j|$ существует $q > 1$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \varepsilon \ln|\operatorname{Re}\lambda|, |\operatorname{Re}\lambda| \geqslant q\}$ не содержит полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$; для каждого полюса λ_0 оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$ существует $\delta > 0$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \operatorname{Im}\lambda_0| < \delta\}$ не содержит полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$.*

Леммы 1.5, 1.6 доказаны в [3, § 2]. В [3, § 3] получен также следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$. Тогда для всех $u \in E^2_a(K)$ выполнена оценка*

$$\|u\|_{E^2_a(K)} \leqslant c(\|\mathscr{L}_K u\|_{E^0_a(K,\gamma)} + \|u\|_{L_2(K\cap S)}), \tag{1.11}$$

где $S = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < R_1 < r < R_2\}$; $c > 0$ не зависит от u.

Если для всех $u \in E^2_a(K)$ имеет место оценка (1.11), *то на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a-1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$.*

Из теоремы 1.1 вытекает конечномерность ядра и замкнутость образа оператора $\mathscr{L}_K$. Для доказательства конечномерности коядра оператора $\mathscr{L}_K$ получим формулы Грина для нелокальных задач и изучим задачи, сопряженные к нелокальным краевым задачам относительно формулы Грина.

2. Формулы Грина для нелокальных эллиптических задач

2.1. Введем множество $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ \varphi = b\}$ (напомним: $b = b_j + \varphi_j$). Множество γ является носителем нелокальных данных в задаче (1.6), (1.7). Обозначим

$$K_1 = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ b_1 < \varphi < b\}, \qquad K_2 = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\ b < \varphi < b_2\}.$$

Пусть n_j есть нормаль к γ_j, направленная вне области K_j, n – нормаль к γ, направленная вне области K_2. Будем обозначать через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{K_j}$, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\gamma_j}$, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\gamma}$ скалярные произведения в $L_2(K_j)$, $L_2(\gamma_j)$, $L_2(\gamma)$ соответственно.

Теорема 2.1. *Для $u \in C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$, $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ имеет место формула Грина*

$$\begin{aligned}
&\sum_j (\Delta u - u, v_j)_{K_j} + \sum_j \left(u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}, \frac{\partial v_j}{\partial n_j}\Big|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} \\
&\qquad + \left(u|_\gamma, \frac{\partial v_2}{\partial n}\Big|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}\Big|_\gamma - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathcal{G}_k^{-1} y)|_\gamma \right)_\gamma \\
&\quad = \sum_j (u, \Delta v_j - v_j)_{K_j} + \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial n_j}\Big|_{\gamma_j}, v_j|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma, v_2|_\gamma - v_1|_\gamma \right)_\gamma,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\mathcal{G}_k^{-1}$ – оператор поворота на угол $-\varphi_k$ и растяжения в $1/\chi_k$ раз в плоскости $\{y\}$; индекс k здесь и далее принимает значения $k = 1, 2$.

Доказательство. Умножим $\Delta u - u$ на $\bar{v}_j$, проинтегрируем по K_j и воспользуемся дважды формулой интегрирования по частям; в результате получим

$$\begin{aligned}
&\int_{K_1} (\Delta u - u) \cdot \bar{v}_1\, dx + \int_{\gamma_1} u|_{\gamma_1} \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} d\gamma - \int_\gamma u|_\gamma \cdot \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n}\Big|_\gamma d\gamma \\
&\quad = \int_{K_1} u \cdot (\Delta \bar{v}_1 - \bar{v}_1)\, dy + \int_{\gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n_1}\Big|_{\gamma_1} \cdot \bar{v}_1|_{\gamma_1} d\gamma - \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma \cdot \bar{v}_1|_\gamma\, d\gamma, \\
&\int_{K_2} (\Delta u - u) \cdot \bar{v}_2\, dx + \int_\gamma u|_\gamma \cdot \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial n}\Big|_\gamma d\gamma + \int_{\gamma_2} u\Big|_{\gamma_2} \cdot \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} d\gamma \\
&\quad = \int_{K_2} u \cdot (\Delta \bar{v}_2 - \bar{v}_2)\, dy + \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma \cdot \bar{v}_2|_\gamma\, d\gamma + \int_{\gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n_2}\Big|_{\gamma_2} \cdot \bar{v}_2|_{\gamma_2} d\gamma.
\end{aligned}$$

Сложим последние два равенства:

$$\begin{aligned}
&\sum_j \int_{K_j} (\Delta u - u) \cdot \bar{v}_j\, dx + \sum_j \int_{\gamma_j} u|_{\gamma_j} \cdot \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial n_j}\Big|_{\gamma_j} d\gamma + \int_\gamma u|_\gamma \cdot \left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial n}\Big|_\gamma - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial n}\Big|_\gamma \right) d\gamma \\
&\quad = \sum_j \int_{K_j} u \cdot (\Delta \bar{v}_j - \bar{v}_j)\, dx + \sum_j \int_{\gamma_j} \frac{\partial u}{\partial n_j}\Big|_{\gamma_j} \cdot \bar{v}_j|_{\gamma_j} d\gamma + \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma \cdot (\bar{v}_2|_\gamma - \bar{v}_1|_\gamma)\, d\gamma.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Но

$$\int_{\gamma_j} u|_{\gamma_j} \cdot \frac{\partial \bar v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} d\gamma = \int_{\gamma_j} (u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}) \cdot \frac{\partial \bar v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} d\gamma - \int_{\gamma_j} a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j} \cdot \frac{\partial \bar v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} d\gamma$$
$$= \int_{\gamma_j} (u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathcal{G}_j y)|_{\gamma_j}) \cdot \frac{\partial \bar v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} d\gamma - \int_{\gamma} u|_{\gamma} \cdot a_j \chi_j^{-1} \frac{\partial \bar v_j}{\partial n_j}(\mathcal{G}_j^{-1} y)|_{\gamma}\, d\gamma,$$

где $\mathcal{G}_j^{-1}$ – оператор поворота на угол $-\varphi_j$ и растяжения в $1/\chi_j$ раз в плоскости $\{y\}$. Отсюда и из (2.2) следует формула (2.1).

Замечание 2.1. Формула (2.1) распространяется по непрерывности на случай $u \in E_a^2(K)$, $v_j \in E^2_{-a+2}(K)$. Действительно, $C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ плотно в $E_a^2(K)$, $C_0^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ плотно в $E^2_{-a+2}(K_j)$, поэтому найдутся последовательности $\{u_p\}_{p=1}^\infty \subset C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ и $\{v_{jq}\}_{q=1}^\infty \subset C_0^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$, сходящиеся к u и v в $E_a^2(K)$ и $E^2_{-a+2}(K_j)$ соответственно. При этом для функций u_p и v_{jq} справедлива формула Грина (2.1). Переходя к пределу при $p, q \to \infty$, получаем формулу Грина для функций u и v (переход к пределу возможен в силу неравенства Коши–Буняковского и леммы 1.4).

2.2. Будем обозначать через $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\beta_1}$, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\beta_2}$, $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathbb{C}}$ скалярные произведения в $L_2(b_1, b)$, $L_2(b, b_2)$, $\mathbb{C}$ соответственно. Аналогично теореме 2.1 доказывается

Теорема 2.2. *Для любых* $\widetilde U \in C^\infty([b_1, b_2])$, $\widetilde V_1 \in C^\infty([b_1, b])$, $\widetilde V_2 \in C^\infty([b, b_2])$ *и* $\lambda \in \mathbb{C}$ *имеет место формула Грина с параметром* λ:

$$\sum_j \left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\widetilde U - \lambda^2 \widetilde U, \widetilde V_j\right)_{\beta_j} + \sum_j \left(\widetilde U|_{\varphi=b_j} + a_j e^{i\lambda \ln \chi_j} \widetilde U(\varphi + \varphi_j)|_{\varphi=b_j}, (-1)^j \frac{d\widetilde V_j}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=b_j}\right)_{\mathbb{C}}$$
$$+ \left(\widetilde U|_{\varphi=b}, \frac{d\widetilde V_1}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=b} - \frac{d\widetilde V_2}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=b} - \sum_k (-1)^k \bar a_k e^{-i\bar\lambda \ln \chi_k} \frac{d\widetilde V_k}{d\varphi}(\varphi - \varphi_k)|_{\varphi=b}\right)_{\mathbb{C}}$$
$$= \sum_j \left(\widetilde U, \frac{d^2}{d\varphi^2}\widetilde V_j - \overline{\lambda}^2 \widetilde V_j\right)_{\beta_j} + \sum_j \left((-1)^j \frac{d\widetilde U}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=b_j}, \widetilde V_j|_{\varphi=b_j}\right)_{\mathbb{C}}$$
$$+ \left(-\frac{d\widetilde U}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=b}, \widetilde V_2|_{\varphi=b} - \widetilde V_1|_{\varphi=b}\right)_{\mathbb{C}}. \tag{2.3}$$

Замечание 2.2. Формула (2.3) распространяется по непрерывности на случай $\widetilde U \in W^2(b_1, b_2)$, $\widetilde V_1 \in W^2(b_1, b)$, $\widetilde V_2 \in W^2(b, b_2)$ (см. замечание 2.2 [11, гл. 2]).

3. Постановка нелокальных эллиптических задач трансмиссии

3.1. Формула (2.1) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (1.6), (1.7):

$$\Delta v_j(y) - v_j(y) = f_j(y), \qquad y \in K_j, \tag{3.1}$$
$$v_j|_{\gamma_j} = g_j(y), \qquad y \in \gamma_j,$$
$$v_2|_\gamma - v_1|_\gamma = h_1(y), \qquad \frac{\partial v_2}{\partial n}\bigg|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}\bigg|_\gamma - \sum_k \bar a_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathcal{G}_k^{-1} y)|_\gamma = h_2(y), \qquad y \in \gamma. \tag{3.2}$$

Задачу (3.1), (3.2) назовем *нелокальной задачей трансмиссии* в плоском угле K.

Положим

$$\mathscr{E}^0_{-a+2}(K,\gamma)=E^0_{-a+2}(K)\times\prod_j E^{3/2}_{-a+2}(\gamma_j)\times\prod_\nu E^{3/2-\nu}_{-a+2}(\gamma);$$

здесь и далее $\nu=0,1$. Обозначим также

$$\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)=\bigoplus_j E^2_{-a+2}(K_j).$$

Рассмотрим ограниченный оператор $\mathscr{M}_K:\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)\to\mathscr{E}^0_{-a+2}(K,\gamma)$, действующий по формуле

$$\mathscr{M}_K v=\left\{w-v,\, v_j|_{\gamma_j},\, v_2|_\gamma-v_1|_\gamma,\, \frac{\partial v_2}{\partial n}\bigg|_\gamma-\frac{\partial v_1}{\partial n}\bigg|_\gamma-\sum_k \bar a_k\chi_k^{-1}\frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1}y)|_\gamma\right\}.$$

Здесь и далее v_j есть сужение функции $v\in\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$ на K_j, $w\equiv\Delta v_j$ при $y\in K_j$. (Отметим, что мы не можем считать $w\equiv\Delta v$ при $y\in K$, так как функция $v\in\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$ может иметь "разрыв" на γ.)

Лемма 3.1. *Для любых $g_j\in E^{3/2}_{-a+2}(\gamma_j)$ и $h_\nu\in E^{3/2-\nu}_{-a+2}(\gamma)$ существует функция $v\in\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$, удовлетворяющая условиям (3.2) и такая, что*

$$\|v\|_{\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)}\leqslant c\left(\sum_j\|g_j\|_{E^{3/2}_{-a+2}(\gamma_j)}+\sum_\nu\|h_\nu\|_{E^{3/2-\nu}_{-a+2}(\gamma)}\right),$$

где $c>0$ не зависит от g_j и h_ν.

Доказательство. В силу леммы 3.1′ [6] существуют $w_j\in E^2_{-a+2}(K_j)$ такие, что

$$w_j|_{\gamma_j}=g_j(y),\qquad y\in\gamma_j, \tag{3.3}$$

$$\|w_j\|_{E^2_{-a+2}(K_j)}\leqslant k_1\|g_j\|_{E^{3/2}_{-a+2}(\gamma_j)}. \tag{3.4}$$

Повторяя доказательство леммы 3.1′ [6], построим $\widehat w_2\in E^2_{-a+2}(K_2)$ такую, что

$$\widehat w_2|_\gamma=h_1(y),\qquad \frac{\partial\widehat w_2}{\partial n}\bigg|_\gamma=h_2(y)+\sum_k\bar a_k\chi_k^{-1}\frac{\partial w_k}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1}y)|_\gamma,\quad y\in\gamma, \tag{3.5}$$

$$\|\widehat w_2\|_{E^2_{-a+2}(K_2)}\leqslant k_2\left(\|h_1\|_{E^{3/2}_{-a+2}(\gamma)}+\left\|h_2+\sum_k\bar a_k\chi_k^{-1}\frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1}y)|_\gamma\right\|_{E^{1/2}_{-a+2}(\gamma)}\right). \tag{3.6}$$

Введем функции $\zeta,\zeta_j\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta_j(\varphi)=1$ для $|b_j-\varphi|<\varepsilon/2$, $\zeta_j(\varphi)=1$ для $|b_j-\varphi|>\varepsilon$; $\zeta(\varphi)=1$ для $|b-\varphi|<\varepsilon/2$, $\zeta(\varphi)=1$ для $|b-\varphi|>\varepsilon$. Здесь $\varepsilon=\min_j\{|b-b_j|\}/4$. Функции ζ, ζ_j являются мультипликаторами в пространствах $E^2_{-a+2}(K_j)$. Отсюда и из (3.3)–(3.6) следует, что функция v такая, что $v=v_1=\zeta_1w_1$ при $y\in K_1$, $v=v_2=\zeta_2w_2+\zeta\widehat w_2$ при $y\in K_2$, удовлетворяет условиям леммы.

3.2. Обозначим

$$\mathscr{W}^2(b_1, b_2) = W^2(b_1, b) \oplus W^2(b, b_2).$$

Аналогично разделу 1 для задачи (3.1), (3.2) рассмотрим модельную оператор-функцию $\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda)\colon \mathscr{W}^2(b_1, b_2) \to \mathscr{W}^0[b_1, b_2] = L_2(b_1, b_2) \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, определенную по формуле

$$\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda)\widetilde{V} = \Big\{\widetilde{W}(\varphi) - \lambda^2 \widetilde{V}(\varphi), \widetilde{V}_j(\varphi)|_{\varphi=b_j}, \widetilde{V}_2(\varphi)|_{\varphi=b} - \widetilde{V}_1(\varphi)|_{\varphi=b},$$
$$\frac{d\widetilde{V}_1}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=b} - \frac{d\widetilde{V}_2}{d\varphi}\bigg|_{\varphi=b} - \sum_k (-1)^k \bar{a}_k e^{-i\lambda \ln \chi_k} \frac{d\widetilde{V}_k}{d\varphi}(\varphi - \varphi_k)|_{\varphi=b}\Big\}.$$

Здесь $\widetilde{V}_j$ есть сужение функции $\widetilde{V} \in \mathscr{W}^2(b_1, b_2)$ на K_j, $\widetilde{W}(\varphi) \equiv (d^2/d\varphi^2)\widetilde{V}_1(\varphi)$ при $\varphi \in (b_1, b)$, $\widetilde{W}(\varphi) \equiv (d^2/d\varphi^2)\widetilde{V}_2(\varphi)$ при $\varphi \in (b, b_2)$. Установим некоторые свойства оператор-функции $\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda)$. Введем в гильбертовых пространствах $\mathscr{W}^2(b_1, b_2)$ и $\mathscr{W}^0[b_1, b_2]$ эквивалентные нормы, зависящие от параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geqslant 1$:

$$|||\widetilde{V}|||_{\mathscr{W}^2(b_1,b_2)} = (\|\widetilde{V}\|^2_{\mathscr{W}^2(b_1,b_2)} + |\lambda|^4 \|\widetilde{V}\|^2_{L_2(b_1,b_2)})^{1/2},$$
$$|||\{\widetilde{F}, \widetilde{G}_j, \widetilde{H}_\nu\}|||_{\mathscr{W}^0[b_1,b_2]} = \Big(\|\widetilde{F}\|^2_{L_2(b_1,b_2)} + \sum_j |\lambda|^3 |\widetilde{G}_j|^2 + \sum_\nu |\lambda|^{3-2\nu} |\widetilde{H}_\nu|^2\Big)^{1/2}.$$

Лемма 3.2. *Для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *оператор* $\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda)$ *фредгольмов,* $\operatorname{ind}\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda) = 0$; *для любого* $h \in \mathbb{R}$ *существует* $q_0 > 1$ *такое, что для* $\lambda \in J_{h,q_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\lambda = h, |\operatorname{Re}\lambda| \geqslant q_0\}$ *оператор* $\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda)$ *имеет ограниченный обратный* $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)\colon \mathscr{W}^0[b_1, b_2] \to \mathscr{W}^2(b_1, b_2)$ *и*

$$|||\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)\widetilde{\Phi}|||_{\mathscr{W}^2(b_1,b_2)} \leqslant c|||\widetilde{\Phi}|||_{\mathscr{W}^0[b_1,b_2]} \tag{3.7}$$

для всех $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{W}^0[b_1, b_2]$, *где* $c > 0$ *не зависит от* λ *и* $\widetilde{\Phi}$; *оператор-функция* $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)\colon \mathscr{W}^0[b_1, b_2] \to \mathscr{W}^2(b_1, b_2)$ *конечномероморфна.*

Доказательство. В случае $a_j = 0$, т.е. когда отсутствуют операторы, соответствующие нелокальным членам, обозначим $\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda)$ через $\widetilde{\mathscr{M}}_0(\lambda)$. Следуя схеме, разработанной Аграновичем и Вишиком в работе [10], можно показать, что существуют такие $0 < \varepsilon_1 < \pi/2$ и $q_1 > 1$, что при

$$\lambda \in Q_{\varepsilon_1,q_1} = \{\lambda\colon |\lambda| \geqslant q_1, |\arg\lambda| \leqslant \varepsilon_1\} \cup \{\lambda\colon |\lambda| \geqslant q_1, |\arg\lambda - \pi| \leqslant \varepsilon_1\}$$

существует обратный оператор $\widetilde{\mathscr{M}}_0^{-1}(\lambda)$; при этом справедлива оценка

$$|||\widetilde{\mathscr{M}}_0^{-1}(\lambda)\widetilde{\Phi}|||_{\mathscr{W}^2(b_1,b_2)} \leqslant k_1|||\widetilde{\Phi}|||_{\mathscr{W}^0[b_1,b_2]} \tag{3.8}$$

для всех $\widetilde{\Phi} \in \mathscr{W}^0[b_1, b_2]$, где $k_1 > 0$ не зависит от λ и $\widetilde{\Phi}$.

Введем оператор $\widetilde{\mathscr{M}}_t(\lambda) = \widetilde{\mathscr{M}}_0(\lambda) + t(\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda) - \widetilde{\mathscr{M}}_0(\lambda))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Докажем, что для любого $h \in \mathbb{R}$ существует такое $q_0 > 0$, что при $\lambda \in J_{h,q_0}$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$k_2|||\widetilde{\mathscr{M}}_t(\lambda)\widetilde{V}|||_{\mathscr{W}^0[b_1,b_2]} \leqslant |||\widetilde{V}|||_{\mathscr{W}^2(b_1,b_2)} \leqslant k_3|||\widetilde{\mathscr{M}}_t(\lambda)\widetilde{V}|||_{\mathscr{W}^0[b_1,b_2]} \tag{3.9}$$

для всех $\widetilde{V} \in \mathscr{W}^2(b_1, b_2)$, где $k_2, k_3 > 0$ не зависят от λ, t и V.

Обозначим $\widetilde{\mathscr{M}}_t(\lambda)\widetilde{V} = \widetilde{\Phi}$. Тогда $\widetilde{\mathscr{M}}_0(\lambda)\widetilde{V} = \widetilde{\Phi} + \widetilde{\Psi}$, где

$$\widetilde{\Psi} = \left(0, 0, 0, 0, t\sum_k (-1)^k \bar{a}_k e^{-i\lambda \ln \chi_k} \frac{d\widetilde{V}_k}{d\varphi}(\varphi - \varphi_k)|_{\varphi=b}\right).$$

В силу (3.8)

$$|||\widetilde{V}|||_{\mathscr{W}^2(b_1,b_2)} \leqslant k_1 |||\widetilde{\Phi} + \widetilde{\Psi}|||_{\mathscr{W}^0[b_1,b_2]}. \tag{3.10}$$

Положим $\varepsilon = \min_j\{|b - b_j|\}/4$ и выберем $q_0 \geqslant q_1$ так, чтобы $J_{h,q_0} \subset Q_{\varepsilon_1,q_1}$. Тогда, используя неравенства (1.3), (1.4), получим

$$\begin{aligned} I_1 &= |\lambda|^{1/2}\left|\bar{a}_1 e^{-i\lambda\ln\chi_1}\frac{d\widetilde{V}_1}{d\varphi}(\varphi - \varphi_1)|_{\varphi=b}\right| \\ &\leqslant k_4\left\{\left\|\frac{d\widetilde{V}_1}{d\varphi}\right\|_{W^1(b_1,b_1+\varepsilon/2)} + |\lambda|\left\|\frac{d\widetilde{V}_1}{d\varphi}\right\|_{L^2(b_1,b_1+\varepsilon/2)}\right\} \leqslant k_5|||\widetilde{V}_1|||_{W^2(b_1,b_1+\varepsilon/2)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Пусть q_1 настолько велико, что в области Q_{ε_1,q_1} имеет место теорема 4.1 [10, гл. 1]. Тогда из неравенства (3.11) и теоремы 4.1 [10, гл. 1] при помощи формулы Лейбница и интерполяционного неравенства (1.3) получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant k_5|||\zeta_1\widetilde{V}_1|||_{W^2(b_1,b_1+\varepsilon/2)} \leqslant k_6\left(\left|\left|\left|\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} - \lambda^2\right)(\zeta_1\widetilde{V}_1)\right|\right|\right|_{L_2(b_1,b)} + |\lambda|^{3/2}|\widetilde{V}_1(\varphi)|_{\varphi=b_1}\right) \\ &\leqslant k_7\left(\left|\left|\left|\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} - \lambda^2\right)\widetilde{V}_1\right|\right|\right|_{L_2(b_1,b)} + |\lambda|^{-1}|||\widetilde{V}_1|||_{W^2(b_1,b)} + |\lambda|^{3/2}|\widetilde{V}_1(\varphi)|_{\varphi=b_1}\right), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где ζ_1 та же, что и в доказательстве леммы 3.1. Аналогично (3.11), (3.12) оценивается $I_2 = |\lambda|^{1/2}\left|\bar{a}_2 e^{-i\lambda\ln\chi_2}(d\widetilde{V}_2/d\varphi)(\varphi - \varphi_2)|_{\varphi=b}\right|$:

$$I_2 \leqslant k_8\left(\left|\left|\left|\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} - \lambda^2\right)\widetilde{V}_2\right|\right|\right|_{L_2(b,b_2)} + |\lambda|^{-1}|||\widetilde{V}_2|||_{W^2(b,b_2)} + |\lambda|^{3/2}|\widetilde{V}_2(\varphi)|_{\varphi=b_2}\right). \tag{3.13}$$

Считая, что q_0 достаточно велико, из (3.10), (3.12), (3.13) получим правую часть неравенства (3.9). Левая часть неравенства (3.9) очевидна. Применяя стандартный метод продолжения по параметру t (см. доказательство теоремы 7.1 [12, гл. 2, § 7]), в силу неравенства (3.9) и существования обратного оператора $\widetilde{\mathscr{M}}_0^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in Q_{\varepsilon_1,q_1}$ убеждаемся в том, что для $\lambda \in J_{h,q_0}$ оператор $\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda)$ также имеет ограниченный обратный и при этом выполняется неравенство (3.7). Используя теорему 16.4 [13] об устойчивости индекса фредгольмова оператора по отношению к компактным возмущениям, нетрудно показать, что оператор $\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda)$ фредгольмов для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{ind}\widetilde{\mathscr{M}}(\lambda) = 0$. Отсюда, из существования $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in J_{h,q_0}$ и теоремы 1 [14] заключаем, что оператор-функция $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$ конечномероморфна.

Аналогично лемме 2.2 [3] при помощи (3.10)–(3.13) доказывается

Лемма 3.3. *Для любого* $0 < \varepsilon < 1/\max|\ln\chi_j|$ *существует* $q > 1$ *такое, что множество* $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \varepsilon\ln|\operatorname{Re}\lambda|, |\operatorname{Re}\lambda| \geqslant q\}$ *не содержит полюсов оператор-функции* $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$; *для каждого полюса* λ_0 *оператор-функции* $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что множество* $\{\lambda \in \mathbb{C}\colon 0 < |\operatorname{Im}\lambda - \operatorname{Im}\lambda_0| < \delta\}$ *не содержит полюсов оператор-функции* $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$.

3.3. Рассмотрим для функций v_j вспомогательную систему двух уравнений

$$\Delta v_j(y) = \hat{f}_j(y), \qquad y \in K_j, \tag{3.14}$$

с краевыми условиями и нелокальными условиями трансмиссии (3.2). Введем пространство

$$\mathscr{H}^0_{-a+2}(K,\gamma) = H^0_{-a+2}(K) \times \prod_j H^{3/2}_{-a+2}(\gamma_j) \times \prod_\nu H^{3/2-\nu}_{-a+2}(\gamma).$$

Обозначим также $\mathscr{H}^2_{-a+2}(K) = \bigoplus_j H^2_{-a+2}(K_j)$.

Аналогично теореме 2.1 [3] из леммы 3.2 получим следующий результат.

Лемма 3.4. *Пусть прямая* $\operatorname{Im}\lambda = -a+1$ *не содержит полюсов оператор-функции* $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$. *Тогда нелокальная задача трансмиссии* (3.14), (3.2) *имеет единственное решение* $v \in \mathscr{H}^2_{-a+2}(K)$ *для любой правой части* $\{\hat{f}, g_j, h_\nu\} \in \mathscr{H}^0_{-a+2}(K,\gamma)$ *и выполнена оценка*

$$\|v\|_{\mathscr{H}^2_{-a+2}(K)} \leqslant c\|\{\hat{f}, g_j, h_\nu\}\|_{\mathscr{H}^0_{-a+2}(K,\gamma)},$$

где $c > 0$ *не зависит от* $\{\hat{f}, g_j, h_\nu\}$; $v(y) \equiv v_j(y)$, $\hat{f}(y) \equiv \hat{f}_j(y)$ *при* $y \in K_j$.

Лемма 3.4 понадобится в разделе 4 при выводе априорных оценок решений задачи (3.1), (3.2).

4. Априорные оценки решений нелокальных эллиптических задач

4.1. Введем множество

$$\Gamma = \{x = (y,z)\colon r > 0,\ \varphi = b,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}.$$

Множество Γ является носителем нелокальных данных в задаче (1.1), (1.2). Обозначим

$$\Omega_1 = \{x = (y,z)\colon r > 0,\ b_1 < \varphi < b,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\},$$
$$\Omega_2 = \{x = (y,z)\colon r > 0,\ b < \varphi < b_2,\ z \in \mathbb{R}^{n-2}\}.$$

Пусть n_j есть нормаль к Γ_j, направленная вне области Ω_j, n – нормаль к Γ, направленная вне области Ω_2. Положим $d_1 = \min\{1, \chi_j^{-1}\}/2$, $d_2 = 2\max\{1, \chi_j^{-1}\}$;

$$\Omega_j^p = \Omega_j \cap \{x = (y,z)\colon r_1 d_1^{3-p} < r < r_2 d_2^{3-p},\ |z| < 2^{-p-1}\},$$
$$\Omega^p = \Omega \cap \{x = (y,z)\colon r_1 d_1^{3-p} < r < r_2 d_2^{3-p},\ |z| < 2^{-p-1}\},$$

где $p = 0, \dots, 3$; $0 < r_1 < r_2$.

Обозначим

$$\mathscr{W}^2(\Omega^p) = \bigoplus_j W^2(\Omega_j^p).$$

Пусть V_j есть сужение $V \in \mathscr{W}^2(\Omega^p)$ на Ω_j^p.

Лемма 4.1. *Для всех $V \in \mathscr{W}^2(\Omega^0)$ и $|\lambda| \geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$\begin{aligned}\|V\|_{\mathscr{W}^2(\Omega^3)} \leqslant c\biggl(&\sum_j \|\Delta V_j\|_{W^2(\Omega_j^0)} + \sum_j \|V_j|_{\Gamma_j}\|_{W^{3/2}(\Gamma_j\cap\bar\Omega^0)} \\ &+ \|V_2|_\Gamma - V_1|_\Gamma\|_{W^{3/2}(\Gamma\cap\bar\Omega^0)} \\ &+ \biggl\|\frac{\partial V_2}{\partial n}\biggr|_\Gamma - \frac{\partial V_1}{\partial n}\biggr|_\Gamma - \sum_k \bar a_k\chi_k^{-1}\frac{\partial V_k}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1}y,z)|_\Gamma\biggr\|_{W^{1/2}(\Gamma\cap\bar\Omega^0)} \\ &+ |\lambda|^{-1}\|V\|_{\mathscr{W}^2(\Omega^0)} + |\lambda|\|V\|_{L_2(\Omega^0)}\biggr),\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $c>0$ не зависит от λ и V.

Доказательство. Из теоремы 1 [15] следует априорная оценка

$$\begin{aligned}\|V\|_{\mathscr{W}^2(\Omega^3)} \leqslant k_1\biggl(&\sum_j \|\Delta V_j\|_{W^2(\Omega_j^2)} + \sum_j \|V_j|_{\Gamma_j}\|_{W^{3/2}(\Gamma_j\cap\bar\Omega^2)} \\ &+ \|V_2|_\Gamma - V_1|_\Gamma\|_{W^{3/2}(\Gamma\cap\bar\Omega^2)} + \biggl\|\frac{\partial V_2}{\partial n}\biggr|_\Gamma - \frac{\partial V_1}{\partial n}\biggr|_\Gamma\biggr\|_{W^{1/2}(\Gamma\cap\bar\Omega^2)} + \|V\|_{L_2(\Omega^2)}\biggr).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Обозначим

$$W = \sum_k \bar a_k \chi_k^{-1}\frac{\partial(\zeta_k V_k)}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1}y,z),$$

где ζ_k те же, что и в доказательстве леммы 3.1. Очевидно,

$$W|_{\Gamma\cap\overline\Omega^2} = \sum_k \bar a_k\chi_k^{-1}\frac{\partial V_k}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1}y,z)|_{\Gamma\cap\overline\Omega^2}. \tag{4.3}$$

Применяя теорему 5.1 [11, гл. 2], формулу Лейбница и неравенство (1.3), получим

$$\begin{aligned}\|W|_{\Gamma\cap\overline\Omega^2}\|_{W^{1/2}(\Gamma\cap\overline\Omega_j^2)} &\leqslant k_2\sum_k \|\zeta_k V_k\|_{W^2(\Omega_k^1)} \\ &\leqslant k_3\sum_k\{\|\Delta V_k\|_{L_2(\Omega_k^0)} + \|V_k|_{\Gamma_k}\|_{W^{3/2}(\Gamma_k\cap\overline\Omega_k^0)} + |\lambda|^{-1}\|V_k\|_{W^2(\Omega_k^0)} + |\lambda|\|V_k\|_{L_2(\Omega_k^0)}\}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Из (4.2)–(4.4) следует неравенство (4.1).

Лемма 4.2. *Пусть $v_j \in W^2_{\mathrm{loc}}(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ – решение нелокальной задачи трансмиссии (3.14), (3.2) такое, что $v \in H^0_{-a}(K)$, а $\{\hat f, g_j, h_\nu\} \in \mathscr{H}^0_{-a+2}(K,\gamma)$. Тогда $v \in \mathscr{H}^2_{-a+2}(K)$, при этом*

$$\|v\|_{\mathscr{H}^2_{-a+2}(K)} \leqslant c(\|\{\hat f, g_j, h_\nu\}\|_{\mathscr{H}^0_{-a+2}(K,\gamma)} + \|v\|_{H^0_{-a}(K)}), \tag{4.5}$$

где $c>0$ не зависит от v.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.2 [3] доказательство леммы 4.2 следует из леммы 3.1 и аналога леммы 4.1 при $n = 2$.

4.2. Пусть

$$K_j^{ps} = K_j \cap \{r_1 d_1^{3-p} \cdot 2^s < r < r_2 d_2^{3-p} \cdot 2^s\},$$
$$K^{ps} = K \cap \{r_1 d_1^{3-p} \cdot 2^s < r < r_2 d_2^{3-p} \cdot 2^s\},$$

где $0 < r_1 < r_2$; $s \geqslant 1$; $p = 0, \dots, 3$.

Обозначим

$$\mathscr{W}^2(K^{ps}) = \bigoplus_j W^2(K_j^{ps}).$$

Пусть v_j есть сужение $v \in \mathscr{W}^2(K^{ps})$ на K_j^{ps}.

Лемма 4.3. *Пусть $s \geqslant 1$. Предположим, что $v \in \mathscr{W}^2(K^{0s})$,*

$$v_j|_{\gamma_j} = 0, \quad y \in \gamma_j \cap \overline{K}_j^{0s}, \qquad v_2|_\gamma - v_1|_\gamma = 0, \quad y \in \gamma \cap K^{0s},$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial n}\bigg|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}\bigg|_\gamma - \sum_k \bar{a}_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1} y)|_\gamma = 0, \quad y \in \gamma \cap K^{0s}.$$

Тогда для $|\lambda| \geqslant 1$

$$2^{s(-a+2)} \|v\|_{\mathscr{W}^2(K^{3s})} \leqslant c\biggl(2^{s(-a+2)} \sum_j \|\Delta v_j - v_j\|_{L_2(K_j^{0s})} + |\lambda|^{-1} 2^{s(-a+2)} \|v\|_{\mathscr{W}^2(K^{0s})}$$
$$+ |\lambda| 2^{s(-a)} \|v\|_{L_2(K^{0s})}\biggr), \tag{4.6}$$

где $c > 0$ не зависит от v, λ и s.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.3 [3] лемма 4.3 доказывается путем подстановки функции $V(y, z) = e^{i \cdot 2^s (\theta, z)} v(y)$, $\theta \in \mathbb{R}^{n-2}$, $|\theta| = 1$, в неравенство (4.1), последующей заменены переменных $y' = 2^s y$ и умножения обеих частей полученного неравенства на $2^{s(-a)}$.

Теорема 4.1. *Пусть $v_j \in W_{\mathrm{loc}}^2(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ – решение задачи* (3.1), (3.2) *такое, что $v \in E_{-a}^0(K)$, а $\{f, g_j, h_\nu\} \in \mathscr{E}_{-a+2}^0(K, \gamma)$. Тогда $v \in \mathscr{E}_{-a+2}^2(K)$, при этом*

$$\|v\|_{\mathscr{E}_{-a+2}^2(K)} \leqslant c(\|\{f, g_j, h_\nu\}\|_{\mathscr{E}_{-a+2}^0(K,\gamma)} + \|v\|_{E_{-a}^0(K)}), \tag{4.7}$$

где $c > 0$ не зависит от v; $v(y) \equiv v_j(y)$, $f(y) \equiv f_j(y)$ при $y \in K_j$.

Доказательство. 1) Согласно лемме 3.1 достаточно рассмотреть случай $\{g_j, h_\nu\} = 0$. Пусть $r_1 = d_1, r_2 = d_2$. Тогда

$$K_j^{ps} = K_j \cap \{d_1^{4-p} \cdot 2^s < r < d_2^{4-p} \cdot 2^s\},$$
$$K^{ps} = K \cap \{d_1^{4-p} \cdot 2^s < r < d_2^{4-p} \cdot 2^s\},$$

где $s \geqslant 1$; $p = 0, \dots, 3$. Обозначим также $K_j^{30} = K_j \cap \{r < d_2\}$. Введем функции ψ, $\hat{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(r) = 1$ при $r < d_2$, $\psi(r) = 0$ при $r > 2d_2$; $\hat{\psi}(r) = 1$ при $r < 2d_2^2$, $\hat{\psi}(r) = 0$ при $r > 3d_2^2$.

По лемме 4.2

$$\|v\|_{\mathscr{E}^2_{-a+2}(K_j^{30})} \leqslant k_1 \|\psi v\|_{\mathscr{H}^2_{-a+2}(K)} \leqslant k_2 \left(\sum_j \|\Delta(\psi v_j)\|_{H^0_{-a+2}(K_j)} + \|\psi v\|_{H^0_{-a}(K)} \right). \tag{4.8}$$

Оценим $\|\Delta(\psi v_j)\|_{H^0_{-a+2}(K_j)}$. Используя формулу Лейбница и ограничение на носители функций $\psi, \hat{\psi}$, получим

$$\begin{aligned} \|\Delta(\psi v_j)\|_{H^0_{-a+2}(K_j)} &\leqslant \|\Delta(\psi v_j) - \psi v_j\|_{H^0_{-a+2}(K_j)} + \|\psi v_j\|_{H^0_{-a+2}(K_j)} \\ &\leqslant k_3(\|\Delta v_j - v_j\|_{E^0_{-a+2}(K_j)} + \|\hat{\psi} v_j\|_{H^1_{-a+1}(K_j)}). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Неравенства (4.8), (4.9) и интерполяционное неравенство (1.5) дают

$$\|v\|_{\mathscr{E}^2_{-a+2}(K^{30})} \leqslant k_4 \left(\sum_j \|f_j\|_{E^0_{-a+2}(K_j)} + |\lambda|^{-1} \|v\|_{\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)} + |\lambda| \|v\|_{E^0_{-a}(K)} \right). \tag{4.10}$$

2) В силу леммы 4.3 при $s \geqslant 1$

$$\|v\|_{\mathscr{E}^2_{-a+2}(K^{3s})} \leqslant k_5 \left(\sum_j \|f_j\|_{E^0_{-a+2}(K_j^{0s})} + |\lambda|^{-1} \|v\|_{\mathscr{E}^2_{-a+2}(K^{0s})} + |\lambda| \|v\|_{E^0_{-a}(K^{0s})} \right). \tag{4.11}$$

Складывая (4.10) и (4.11) для $s \geqslant 1$, при достаточно больших $|\lambda|$ получим (4.7).

Аналогично теореме 3.1 [3.1] из лемм 3.1, 3.4 и 4.3 выводится следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = -a + 1$ *нет полюсов оператор-функции* $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$. *Тогда для* $v \in \mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$ *выполнена оценка*

$$\|v\|_{\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)} \leqslant c(\|\mathscr{M}_K v\|_{\mathscr{E}^0_{-a+2}(K,\gamma)} + \|v\|_{L_2(K \cap S')}), \tag{4.12}$$

где $S' = \{y \in \mathbb{R}^2 : 0 < R_1' < r < R_2'\}$; $c > 0$ *не зависит от* v.

Обратно, если для всех $v \in \mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$ *имеет место оценка* (4.12), *то на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = -a + 1$ *нет полюсов оператор-функции* $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$.

Из теоремы 4.2 следует, что $\mathscr{M}_K$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ. Отметим, что это утверждение не следует из оценки (4.7) (справедливой, даже если на прямой $\operatorname{Im}\lambda = -a + 1$ есть полюсы $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$), так как вложение $\mathscr{E}^2_{-a+2}(K) \subset E^0_{-a}(K)$ непрерывно, но не компактно.

Далее будет установлена связь между ядрами операторов $\mathscr{M}_K$ и $\mathscr{L}_K^*$ ($\mathscr{L}_K^*$ – оператор, сопряженный с $\mathscr{L}_K$). Для изучения оператора $\mathscr{L}_K^*$ нам понадобится утверждение об априорных оценках и гладкости решений одной вспомогательной задачи. Сформулируем это утверждение в следующем пункте.

4.3. Рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathscr{L}\colon W^2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{3/2}(\mathbb{R}^1),$$

действующий по формуле

$$\mathscr{L}U = (\Delta U, U|_{x_2=0}, U|_{x_2=0}).$$

Отметим, что задача, соответствующая оператору $\mathscr{L}$, носит искусственный характер: это не краевая задача (так как решение U ищется во всем $\mathbb{R}^2$) и не задача трансмиссии (так как на прямой $\{x_2 = 0\}$ задаются не условия сопряжения, а след функции U, да к тому же дважды). Однако при выводе априорных оценок для решений сопряженных нелокальных задач – в следующем пункте – мы столкнемся с задачей именно такого типа, что объясняется спецификой используемого метода “отделения нелокальностей”.

Введем ограниченный оператор

$$\mathscr{L}^*\colon L_2(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{-3/2}(\mathbb{R}^1) \to W^{-2}(\mathbb{R}^2),$$

сопряженный к $\mathscr{L}$. Оператор $\mathscr{L}^*$ действует на $\{f, g_j\} \in L_2(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{-3/2}(\mathbb{R}^1)$ по формуле

$$\langle U, \mathscr{L}^*\{f, g_j\}\rangle = (\Delta U, f)_{\mathbb{R}^2} + \sum_j \langle U|_{x_2=0}, g_j\rangle_{\mathbb{R}^1} \qquad \text{для любых} \quad U \in W^2(\mathbb{R}^2),$$

где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathbb{R}^2}$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^2)$, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathbb{R}^1}$ обозначает полуторалинейную форму на паре пространств $W^{3/2}(\mathbb{R}^1)$, $W^{-3/2}(\mathbb{R}^1)$.

Обозначим $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, $\mathbb{R}^2_- = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$. Для целых $l \geqslant 0$ введем пространство

$$\mathscr{W}^l(\mathbb{R}^2) = W^l(\mathbb{R}^2_+) \oplus W^l(\mathbb{R}^2_-).$$

Лемма 4.4. *При всяком целом фиксированном $l \geqslant 0$ если*

$$\{f, g_j\} \in L_2(\mathbb{R}^2) \times \prod_j W^{-3/2+l}(\mathbb{R}^1), \qquad \mathscr{L}^*\{f, g_j\} \in \begin{cases} W^{-2+l}(\mathbb{R}^2) & \text{при} \ \ l < 2, \\ \mathscr{W}^{-2+l}(\mathbb{R}^2) & \text{при} \ \ l \geqslant 2, \end{cases}$$

то $f \in \mathscr{W}^l(\mathbb{R}^2)$ и

$$\|f\|_{\mathscr{W}^l(\mathbb{R}^2)} \leqslant c_l \biggl(\|\mathscr{L}^*\{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|f\|_{W^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \sum_j \|g_j\|_{W^{-3/2+l}(\mathbb{R}^1)} \biggr), \tag{4.13}$$

где

$$\|\,\cdot\,\|_{-2+l} = \begin{cases} \|\,\cdot\,\|_{W^{-2+l}(\mathbb{R}^2)} & \text{при} \ \ l < 2, \\ \|\,\cdot\,\|_{\mathscr{W}^{-2+l}(\mathbb{R}^2)} & \text{при} \ \ l \geqslant 2, \end{cases}$$

$c_l > 0$ не зависят от $\{f, g_j\}$.

Доказательство проводится по схеме [11, гл. 2] (см. теоремы 4.1, 4.3 [11, гл. 2]).

Отметим, что в отличие от модельных задач во всем пространстве (см. [11, гл. 2, § 3]) в данном случае оператор $\mathscr{L}^*$ содержит распределения с носителями на прямой $\{x_2=0\}$. В связи с этим гладкость функции f может нарушаться на прямой $\{x_2=0\}$, даже если $\mathscr{L}^*\{f,g_j\}$ бесконечно гладкая в $\mathbb{R}^2$. Более того, лемма 4.4 означает, что для повышения гладкости функции f в $\mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_-$ необходимо потребовать дополнительную гладкость не только от $\mathscr{L}^*\{f,g_j\}$, но и от распределений g_j.

4.4. Теперь изучим оператор, сопряженный к $\mathscr{L}_K$. Для целых $l\geqslant 0$ обозначим через $(E^l_a(K))^*$, $(E^{l+1/2}_a(\gamma_j))^*$ и $(E^{l+1/2}_a(\gamma))^*$ пространства, сопряженные с $E^l_a(K)$, $E^{l+1/2}_a(\gamma_j)$ и $E^{l+1/2}_a(\gamma)$ относительно скалярных произведений в $L_2(K)$, $L_2(\gamma_j)$ и $L_2(\gamma)$ соответственно. Очевидно, $(E^0_a(K))^*=E^0_{-a}(K)$.

Положим $\hat\gamma_j=\{y\colon \varphi=b_j \text{ или } \varphi=b_j+\pi\}$, $\hat\gamma=\{y\colon \varphi=b \text{ или } \varphi=b+\pi\}$. Очевидно, $\gamma_j\subset\hat\gamma_j$, $\gamma\subset\hat\gamma$. Для целых $l\geqslant 0$ обозначим через $W^{-l}_{\overline{K}}(\mathbb{R}^2)$, $W^{-l-1/2}(\hat\gamma_j)$ и $W^{-l-1/2}(\hat\gamma)$ пространства, сопряженные с $W^l(K)$, $W^{l+1/2}(\hat\gamma_j)$ и $W^{l+1/2}(\hat\gamma)$ соответственно.

Введем функции $\psi_p\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такие, что $\psi_p(y)=1$ при $r_1d_1^{3-p}<r<r_2d_2^{3-p}$, $\psi_p(y)=0$ при $r<2r_1d_1^{3-p}/3$ и $r>3r_2d_2^{3-p}/2$. Здесь $0<r_1<r_2$; $p=0,\dots,3$.

Для $g_j\in(E^{l+1/2}_a(\gamma_j))^*$ обозначим через ψ_pg_j распределение из $W^{-l-1/2}(\hat\gamma_j)$, определяемое соотношением $\langle u_{\hat\gamma_j},\psi_pg_j\rangle_{\hat\gamma_j}=\langle\psi_pu_{\hat\gamma_j},g_j\rangle_{\gamma_j}$ для всех $u_{\hat\gamma_j}\in W^{l+1/2}(\hat\gamma_j)$. Здесь $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\hat\gamma_j}$, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\gamma_j}$ – полуторалинейные формы на дуальных парах $W^{l+1/2}(\hat\gamma_j)$, $W^{-l-1/2}(\hat\gamma_j)$ и $E^{l+1/2}(\gamma_j)$, $E^{-l-1/2}(\gamma_j)$ соответственно. Аналогично, для $g\in(E^{l+1/2}_a(\gamma))^*$ вводится распределение $\psi_pg_j\in W^{-l-1/2}(\hat\gamma)$.

Для оператора $\mathscr{L}_K\colon E^2_a(K)\to E^0_a(K,\gamma)$, введенного в разделе 1, рассмотрим сопряженный оператор

$$\mathscr{L}_K^*\colon (E^0_a(K,\gamma))^*\to(E^2_a(K))^*,\qquad \text{где}\quad (E^0_a(K,\gamma))^*=E^0_{-a}(K)\times\prod_j(E^{3/2}_a(\gamma_j))^*.$$

Оператор $\mathscr{L}_K^*$ действует на $\{f,g_j\}\in(E^0_a(K,\gamma))^*$ для любых $u\in E^2_a(K)$ по формуле

$$\langle u,\mathscr{L}_K^*\{f,g_j\}\rangle=(\Delta u-u,f)_K+\sum_j\langle u|_{\gamma_j}+a_ju(\mathscr{G}_jy)|_{\gamma_j},g_j\rangle_{\gamma_j}.$$

Здесь $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_K$ обозначает скалярное произведение в $L_2(K)$, а $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ и $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\gamma_j}$ обозначают полуторалинейные формы на соответствующих дуальных парах пространств.

Для целых $l\geqslant 0$ положим $\mathscr{W}^l(K)=\bigoplus_j W^l(K_j)$.

Теорема 4.3. *Пусть* $\{f,g_j\}\in(E^0_a(K,\gamma))^*$, $\mathscr{L}_K^*\{f,g_j\}\in(E^2_a(K))^*$. *Тогда при всяком целом фиксированном* $l\geqslant 0$ *если*

$$\psi_0\mathscr{L}_K^*\{f,g_j\}\in\begin{cases} W^{-2+l}_{\overline{K}}(\mathbb{R}^2) & \text{при}\ \ l<2,\\ \mathscr{W}^{-2+l}(K) & \text{при}\ \ l\geqslant 2,\end{cases}$$

то $\psi_3\{f,g_j\}\in\mathscr{W}^l(K)\times\prod_jW^{-3/2+l}(\hat\gamma_j)$ *и*

$$\begin{aligned}&\|\psi_3\{f,g_j\}\|_{\mathscr{W}^l(K)\times\prod_jW^{-3/2+l}(\hat\gamma_j)}\\ &\qquad\leqslant c_l(\|\psi_0\mathscr{L}_K^*\{f,g_j\}\|_{-2+l}+\|\psi_0\{f,g_j\}\|_{W^{-1}_{\overline{K}}(\mathbb{R}^2)\times\prod_jW^{-5/2}(\hat\gamma_j)}),\end{aligned}\tag{4.14}$$

где

$$\|\cdot\|_{-2+l} = \begin{cases} \|\cdot\|_{W_{\overline{K}}^{-2+l}(\mathbb{R}^2)} & \textit{при} \quad l < 2, \\ \|\cdot\|_{\mathscr{W}^{-2+l}(K)} & \textit{при} \quad l \geqslant 2, \end{cases}$$

$c_l > 0$ *не зависит от* $\{f, g_j\}$.

Доказательство. 1) Введем оператор

$$\mathscr{L}_{\mathscr{G}}^* \colon E_{-a}^0(K) \times \prod_j \{(E_a^{3/2}(\gamma_j))^* \times (E_a^{3/2}(\gamma))^*\} \to (E_a^2(K))^*,$$

действующий на $\{f, g_j, g_j'\} \in E_{-a}^0(K) \times \prod_j \{(E_a^{3/2}(\gamma_j))^* \times (E_a^{3/2}(\gamma))^*\}$ для любых $u \in E_a^2(K)$ по формуле

$$\langle u, \mathscr{L}_{\mathscr{G}}^* \{f, g_j, g_j'\}\rangle = (\Delta u - u, f)_K + \sum_j \{\langle u|_{\gamma_j}, g_j\rangle_{\gamma_j} + \langle a_j u|_\gamma, g_j'\rangle_\gamma\}.$$

Для $g_j \in (E_a^{3/2}(\gamma_j))^*$ определим распределение $g_j^{\mathscr{G}} \in (E_a^{3/2}(\gamma))^*$ соотношением

$$\langle u_\gamma, g_j^{\mathscr{G}}\rangle_\gamma = \langle u_\gamma(\mathscr{G}_j \cdot), g_j\rangle_{\gamma_j} \qquad \text{для всех} \quad u_\gamma \in E_a^{3/2}(\gamma).$$

Заметим, что $\psi_p g_j^{\mathscr{G}} \in W^{-3/2+l}(\hat\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\psi_p(\mathscr{G}_j \cdot) g_j \in W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j)$; при этом существуют константы $k_1, k_2 > 0$ (зависящие от l) такие, что

$$k_1 \|\psi_p(\mathscr{G}_j \cdot) g_j\|_{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j)} \leqslant \|\psi_p g_j^{\mathscr{G}}\|_{W^{-3/2+l}(\hat\gamma)} \leqslant k_2 \|\psi_p(\mathscr{G}_j \cdot) g_j\|_{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j)}. \tag{4.15}$$

Из определения операторов $\mathscr{L}_K^*$ и $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}^*$ следует, что

$$\mathscr{L}_{\mathscr{G}}^* \{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\} = \mathscr{L}_K^* \{f, g_j\}. \tag{4.16}$$

2) Пусть $\varepsilon, \zeta, \zeta_j$ обозначают то же, что и в доказательстве леммы 3.1. Введем функции $\hat\zeta_j, \hat\zeta, \bar\zeta_j, \bar\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $\hat\zeta_j(\varphi) = 1$ для $|b_j - \varphi| < 3\varepsilon/2$, $\hat\zeta_j(\varphi) = 0$ для $|b_j - \varphi| > 2\varepsilon$; $\hat\zeta(\varphi) = 1$ для $|b - \varphi| < 3\varepsilon/2$, $\hat\zeta(\varphi) = 0$ для $|b - \varphi| > 2\varepsilon$; $\bar\zeta_j(\varphi) = 1$ для $|b_j - \varphi| < \varepsilon/8$, $\bar\zeta_j(\varphi) = 0$ для $|b_j - \varphi| > \varepsilon/4$; $\bar\zeta(\varphi) = 1$ для $|b - \varphi| < \varepsilon/8$, $\bar\zeta(\varphi) = 0$ для $|b - \varphi| > \varepsilon/4$.

Носитель функции ζ_i не пересекается с γ и γ_k при $k \ne i$, поэтому $\psi_p \zeta_i g_k = 0$, $\psi_p \zeta_i g_j^{\mathscr{G}} = 0$; следовательно,

$$\langle u, \mathscr{L}_{\mathscr{G}}^*(\psi_p \zeta_i \{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\})\rangle = (\psi_p \zeta_i \Delta u - \psi_p \zeta_i u, f)_K + \langle (\psi_p \zeta_i u)|_{\gamma_i}, g_i\rangle_{\gamma_i}.$$

Поскольку замена переменных типа поворота переводит оператор Лапласа в оператор Лапласа и сохраняет принадлежность функций соответствующим пространствам Соболева, мы можем воспользоваться теоремой 4.3 [11, гл. 2][1]. Отсюда, из соотношения (4.16) и формулы Лейбница следует, что

$$\psi_1 \zeta_i \{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\} \in W^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j) \times W^{-3/2+l}(\hat\gamma)\},$$

$$\begin{aligned} &\|\psi_1 \zeta_i \{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\}\|_{W^l(K) \times \prod_j \{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j) \times W^{-3/2+l}(\hat\gamma)\}} \\ &\qquad \leqslant k_3 (\|\psi_0 \mathscr{L}_K^* \{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0 \hat\zeta_i f\|_{W_{\overline{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \|\psi_0 g_i\|_{W^{-5/2}(\hat\gamma_i)}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

[1] В теореме 4.3 [11, гл. 2] рассматриваются операторы с переменными коэффициентами, из-за чего накладываются дополнительные ограничения на носители рассматриваемых функций. Однако легко видеть, что в случае операторов с постоянными коэффициентами эти ограничения могут быть сняты.

Отсюда, в частности, при помощи (4.15) получим, что $\psi_2 g_i^{\mathscr{G}} \in W^{-3/2+l}(\hat\gamma)$ и

$$\|\psi_2 g_i^{\mathscr{G}}\|_{W^{-3/2+l}(\hat\gamma)} \leqslant k_4(\|\psi_0 \mathscr{L}_K^*\{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0\hat\zeta_i f\|_{W_{\overline{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \|\psi_0 g_i\|_{W^{-5/2}(\hat\gamma_i)}). \tag{4.18}$$

3) Носитель функции ζ не пересекается с γ_j, поэтому $\psi_p\zeta_i g_j = 0$; следовательно,

$$\langle u, \mathscr{L}_{\mathscr{G}}^*(\psi_p\zeta\{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\})\rangle = (\psi_p\zeta\Delta u - \psi_p\zeta u, f)_K + \sum_k \langle(\psi_p\zeta u)|_\gamma, g_k^{\mathscr{G}}\rangle_\gamma.$$

Таким образом, учитывая свойства носителей функций ψ_p и ζ, оператор $\mathscr{L}_{\mathscr{G}}^*$, действующий на $\psi_p\zeta\{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\}$, можно трактовать как сопряженный к оператору задачи

$$\Delta u - u = \hat f(y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \qquad u|_{\hat\gamma} = \hat g_1(y), \quad u|_{\hat\gamma} = \hat g_2(y), \quad y \in \hat\gamma,$$

которая (после соответствующей замены переменных типа поворота) совпадает с точностью до младшего члена u с задачей п. 3 данного раздела. По доказанному выше $\psi_2 g_k^{\mathscr{G}} \in W^{-3/2+l}(\hat\gamma)$; поэтому мы можем воспользоваться леммой 4.4. Тогда из соотношения (4.16) и формулы Лейбница получим

$$\psi_3\zeta\{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\} \in \mathscr{W}^l(K) \times \prod_j\{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j) \times W^{-3/2+l}(\hat\gamma)\},$$

$$\begin{aligned}&\|\psi_3\zeta\{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\}\|_{\mathscr{W}^l(K)\times\prod_j\{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j)\times W^{-3/2+l}(\hat\gamma)\}}\\ &\qquad\leqslant k_5\left(\|\psi_2\mathscr{L}_K^*\{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_2\hat\zeta f\|_{W_{\overline{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \sum_j \|\psi_2 g_j^{\mathscr{G}}\|_{W^{-3/2+l}(\hat\gamma)}\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Отметим, что именно здесь возникает пространство $\mathscr{W}^l(K)$, т.е. гладкость функции f нарушается на луче γ. Это происходит из-за наличия нелокальных членов в краевом условии (1.7) и, как следствие, в сопряженном операторе $\mathscr{L}_K^*$.

Из неравенств (4.19) и (4.18) имеем

$$\begin{aligned}&\|\psi_3\zeta\{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\}\|_{\mathscr{W}^l(K)\times\prod_j\{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j)\times W^{-3/2+l}(\hat\gamma)\}}\\ &\qquad\leqslant k_6\left(\|\psi_0\mathscr{L}_K^*\{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0\hat\zeta f\|_{W_{\overline{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)} + \sum_j \|\psi_0 g_j\|_{W^{-5/2}(\hat\gamma_j)}\right).\end{aligned} \tag{4.20}$$

4) Носитель функции $\zeta_0 = 1 - \sum_i \zeta_i - \zeta$ не пересекается с γ_j и γ, поэтому $\psi_p\zeta_0 g_j = 0$, $\psi_p\zeta_0 g_j^{\mathscr{G}} = 0$; следовательно,

$$\langle u, \mathscr{L}_{\mathscr{G}}^*(\psi_p\zeta_0\{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\})\rangle = (\psi_p\zeta_0\Delta u - \psi_p\zeta_0 u, f)_K.$$

Из теоремы 3.1 [11, гл. 2], соотношения (4.16) и формулы Лейбница получим

$$\psi_1\zeta_0\{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\} \in W^l(K) \times \prod_j\{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j) \times W^{-3/2+l}(\hat\gamma)\},$$

$$\begin{aligned}&\|\psi_1\zeta_0\{f, g_j, g_j^{\mathscr{G}}\}\|_{W^l(K)\times\prod_j\{W^{-3/2+l}(\hat\gamma_j)\times W^{-3/2+l}(\hat\gamma)\}}\\ &\qquad\leqslant k_7(\|\psi_0\mathscr{L}_K^*\{f, g_j\}\|_{-2+l} + \|\psi_0\bar\zeta_0 f\|_{W_{\overline{K}}^{-1}(\mathbb{R}^2)}),\end{aligned} \tag{4.21}$$

где $\bar\zeta_0 = 1 - \sum_i \bar\zeta_i - \bar\zeta$.

Теперь априорная оценка (4.14) вытекает из неравенств (4.17), (4.20) и (4.21).

5. Разрешимость нелокальных эллиптических краевых задач

В данном разделе собраны основные результаты о разрешимости нелокальных задач в плоских и двугранных углах (теоремы 5.1–5.3).

5.1. Прежде всего установим связь между ядрами операторов $\mathscr{L}_K^*$ и $\mathscr{M}_K$.

Лемма 5.1. *Ядро* $\ker(\mathscr{L}_K^*)$ *оператора* $\mathscr{L}_K^*$ *совпадает с множеством, которое пробегает элемент* $\{v, (\partial v_j/\partial n_j)|_{\gamma_j}\}$, *когда* $v \in \mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$, $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ *и удовлетворяет задаче* (3.1), (3.2) *при* $\{f, g_j, h_\nu\} = 0$. *Здесь* $v(y) \equiv v_j(y)$, $f(y) \equiv f_j(y)$ *при* $y \in K_j$.

Доказательство. 1) Пусть $v \in \mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$, $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ и удовлетворяет задаче (3.1), (3.2) при $\{f, g_j, h_\nu\} = 0$. Тогда для любой $u \in C_0^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$ в силу теоремы 2.1

$$\sum_{j=1}(\Delta u - u, v_j)_{K_j} + \sum_j \left(u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathscr{G}_j y)|_{\gamma_j}, \frac{\partial v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} = 0. \tag{5.1}$$

Из непрерывности оператора вложения $\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$ в $E^0_{-a}(K)$ следует, что $v \in E^0_{-a}(K)$. Кроме того, по неравенству Коши–Буняковского и теореме 1.4

$$\left| \left(u_{\gamma_j}, \frac{\partial v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} \right|^2 \leqslant k_1 \int_{\gamma_j} r^{2(a-3/2)} |u_{\gamma_j}|^2 \, d\gamma \cdot \int_{\gamma_j} r^{2(-a+3/2)} \left| \frac{\partial v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} \right|^2 d\gamma$$
$$\leqslant k_2 \|u_{\gamma_j}\|^2_{E_a^{3/2}(\gamma_j)} \cdot \left\| \frac{\partial v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} \right\|^2_{E^{1/2}_{-a+2}(\gamma_j)}$$

для всех $u_{\gamma_j} \in E_a^{3/2}(\gamma_j)$. Следовательно, $(\partial v_j/\partial n_j)|_{\gamma_j} \in (E_a^{3/2}(\gamma_j))^*$.

Таким образом,

$$\left\{ v, \frac{\partial v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} \right\} \in E^0_{-a}(K) \times \prod_j (E_a^{3/2}(\gamma_j))^*$$

и в силу определения оператора $\mathscr{L}_K^*$ и тождества (5.1)

$$\left\langle u, \mathscr{L}_K^* \left\{ v, \frac{\partial v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} \right\} \right\rangle = 0 \qquad \text{для всех} \quad u \in C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\}).$$

Но $C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ плотно в $E_a^2(K)$, следовательно, $\{v, (\partial v_j/\partial n_j)|_{\gamma_j}\} \in \ker(\mathscr{L}_K^*)$.

2) Пусть теперь, наоборот, $\{v, \psi_j\} \in \ker(\mathscr{L}_K^*)$. Из теоремы 4.3 следует, что $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$, $\psi_j \in C^\infty(\gamma_j)$. Тогда из определения оператора $\mathscr{L}_K^*$ вытекает, что для любого $u \in C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$

$$(\Delta u - u, v)_K = -\sum_j (u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathscr{G}_j y)|_{\gamma_j}, \psi_j)_{\gamma_j},$$

что совместно с формулой Грина (2.1) дает

$$\begin{aligned}
&\sum_j \left(u|_{\gamma_j} + a_j u(\mathscr{G}_j y)|_{\gamma_j}, \frac{\partial v_j}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} - \psi_j \right)_{\gamma_j} \\
&\qquad + \left(u|_\gamma, \frac{\partial v_2}{\partial n}\bigg|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}\bigg|_\gamma - \sum_k \bar a_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1} y)|_\gamma \right)_\gamma \\
&\quad = \sum_j (u, \Delta v_j - v_j)_{K_j} + \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j}, v_j|_{\gamma_j} \right)_{\gamma_j} + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\gamma, v_2|_\gamma - v_1|_\gamma \right)_\gamma . \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Полагая $\operatorname{supp} u \in K_j$, из (5.2) получим, что $\Delta v_j - v_j = 0$.

В силу леммы 2.2 [11, гл. 2] для всякой системы функций $\{\Theta_{j\mu}\}_{\mu=1}^2$ из $C_0^\infty(\gamma_j)$ найдется функция $u \in C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ такая, что

$$u|_{\gamma_j} = \Theta_{j1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n_j}\bigg|_{\gamma_j} = \Theta_{j2}, \qquad u = 0 \ \text{ в окрестности } \gamma.$$

Отсюда, из (5.2) и того, что $\Delta v_j - v_j = 0$, получим $(\partial v_j/\partial n_j)|_{\gamma_j} - \psi_j = 0$ и $v_j|_{\gamma_j} = 0$. Аналогично,

$$v_2|_\gamma - v_1|_\gamma = 0, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial n}\bigg|_\gamma - \frac{\partial v_1}{\partial n}\bigg|_\gamma - \sum_k \bar a_k \chi_k^{-1} \frac{\partial v_k}{\partial n_k}(\mathscr{G}_k^{-1} y)|_\gamma = 0.$$

Наконец, из того, что $v \in E^0_{-a}(K)$, $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j \setminus \{0\})$, и теоремы 4.1 вытекает принадлежность функции v пространству $\mathscr{E}^2_{-a+2}(K)$.

Теорема 5.1. *Оператор $\mathscr{L}_K$ фредгольмов тогда и только тогда, когда на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть оператор $\mathscr{L}_K$ фредгольмов, тогда по теореме 7.1 [13] имеет место оценка (1.11) и, следовательно, по теореме 1.1 на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$.

Пусть, наоборот, на прямой $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$. Тогда по теореме 1.1 оператор $\mathscr{L}_K$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

Докажем, что ядро оператора $\mathscr{L}_K^*$ конечномерно. Из формулы Грина (2.3), замечания 2.2 и лемм 1.5, 3.2 вытекает, что λ_0 является полюсом оператора $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\bar\lambda_0$ является полюсом оператора $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$. Значит, на прямой $\operatorname{Im}\lambda = -a + 1$ нет полюсов оператор-функции $\widetilde{\mathscr{M}}^{-1}(\lambda)$. Следовательно, по теореме 4.2 оператор $\mathscr{M}_K$ имеет конечномерное ядро, размерность которого в силу леммы 5.1 совпадает с размерностью ядра оператора $\mathscr{L}_K^*$.

5.2. Перейдем к изучению разрешимости нелокальной краевой задачи (1.1), (1.2) в двугранном угле. Сводя задачу (1.1), (1.2) к задаче (1.6), (1.7) с помощью преобразования Фурье по $z\colon U(y,z) \to \widehat{U}(y,\eta)$ и замены переменных $y' = |\eta| \cdot y$, аналогично доказательству леммы 7.3 [6] получим следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a - 1$ *нет полюсов оператор-функции* $\widetilde{\mathscr{L}}^{-1}(\lambda)$ *и* $\dim\ker\mathscr{L}_K = \operatorname{codim}\mathscr{R}(\mathscr{L}_K) = 0$. *Тогда оператор* $\mathscr{L}_\Omega$ *есть изоморфизм.*

Используя формулу Грина для нелокальной задачи (1.1), (1.2) в двугранном угле Ω, аналогичную формуле Грина (2.1) для задачи (1.6), (1.7) в плоском угле K, и повторяя рассуждения работы [6, § 8], получим следующее необходимое условие фредгольмовости оператора $\mathscr{L}_\Omega$.

Теорема 5.3. *Если оператор* $\mathscr{L}_\Omega$ *фредгольмов, то оператор* $\mathscr{L}_K$ *есть изоморфизм.*

Из теорем 1.1, 5.2 и 5.3 следует, что если $\mathscr{L}_\Omega$ фредгольмов, то он изоморфизм.

Автор выражает глубокую признательность профессору А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бицадзе А. В. Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. №3. С. 521–524.
[2] Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. 1986. Т. 129 (171). №2. С. 279–302.
[3] Скубачевский А. Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. №1. С. 120–131.
[4] Скубачевский А. Л. О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. №1. С. 128–139.
[5] Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
[6] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Тр. ММО. 1978. Т. 37. С. 49–93.
[7] Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
[8] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Формула Грина и теоремы о гомеоморфизмах для нелокальных эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. №5. С. 1059–1062.
[9] Ильин В. А., Моисеев Е. И. Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. №5. С. 795–804.
[10] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. №3. С. 53–161.
[11] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
[12] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
[13] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
[14] Блехер П. М. Об операторах, зависящих мероморфно от параметра // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1969. №5. С. 30–36.
[15] Шефтель З. Г. Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами // Сиб. матем. ж. 1965. Т. 6. №3. С. 636–668.

Московский государственный авиационный институт (технический университет)
E-mail: `gurevichp@mtelecom.ru`
Поступило
12.11.2001
RtitleendRtitleEtitleendEtitle