ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 418, № 2, с. 151–154

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОКОНТРОЛЯ

© 2008 г. П. Л. Гуревич, В. Егер, А. Л. Скубачевский

Представлено академиком Ф.Л. Черноусько 21.06.2007 г.

Поступило 25.06.2007 г.

Рассматривается уравнение теплопроводности с краевым условием, содержащим функцию управления. Функция управления есть решение обыкновенного дифференциального уравнения, правая часть которого содержит нелинейный функционал, моделирующий эффект гистерезиса. Зависимость функционала от средней по области температуры обусловливает нелокальные эффекты. Подобного рода задачи возникают при моделировании процессов термоконтроля в химических реакторах и системах климат-контроля. Изучаются вопросы разрешимости и периодичности решений задачи.

1. Задача регулирования температуры внутри области посредством термоэлементов, установленных на границе области, возникает в химических реакторах и системах климат-контроля. В работе рассматривается математическая модель одного из процессов терморегулирования.

В нашей модели распределение температуры внутри области описывается уравнением теплопроводности, а краевое условие содержит функцию управления. Функция управления удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, в правой части которого стоит нелинейный функционал, зависящий от средней температуры внутри области и описывающий эффект гистерезиса.

Вопросы существования и единственности решения двухфазной задачи Стефана с гистерезисным управлением в краевом условии изучались в [1–3]. В настоящей работе получены результаты о существовании, единственности и периодичности решений в случае уравнения теплопроводности. Введены понятия сильного периодического решения и периодического в среднем решения и доказано, что существование периодического в среднем решения влечет существование сильного периодического решения с тем же периодом. Приведен пример, в котором существует единственное периодическое в среднем, а следовательно, и единственное сильное периодическое решение.

2. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ – ограниченная область с границей Γ класса C^∞. Обозначим через $w(x, t)$ температуру в точке $x \in Q$ в момент времени $t \geq 0$. Пусть $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t(x, t) = \Delta w(x, t) - p(x)w(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

с начальным условием

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in Q, \quad (2)$$

где $Q_T = Q \times (0, T)$, $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in L_2(Q)$ – вещественнозначные функции, $p(x) \geq 0$.

Краевое условие содержит вещественнозначную функцию управления $u(t)$ (которая будет определена ниже), регулирующую соответственно температуру на границе области, тепловой поток через границу или температуру окружающей среды:

$$-\gamma\frac{\partial w}{\partial \nu} = \sigma(x)(w(x, t) - w_e(x)) - K(x)(u(t) - u_c), \quad (x, t) \in \Gamma_T, \quad (3)$$

где $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$, ν – внешняя нормаль к Γ_T в точке (x, t), $\gamma \geq 0$, σ, w_e, $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – вещественнозначные функции, $\sigma(x) \geq 0$, $u_c > 0$; если $\gamma = 0$, то предполагаем, что $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$.

Для любой функции $v(x, t)$ положим

$$v_m(t) = \int_Q m(x)v(x, t)dx,$$

где $m \in L_\infty(Q)$ – заданная функция.

Пусть функция u есть решение задачи Коши:

$$u'(t) + au(t) = H(w_n, t), \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$u(0) = u_0, \quad (5)$$

Российский университет дружбы народов, Москва
Interdisciplinary Center for Scientific Computing of the University of Heidelberg, Germany

где $a > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$, а w – функция, удовлетворяющая соотношениям (1)–(3). Функционал $H(g, t)$, $g \in C[0, T]$, определен следующим образом: $H(g, 0) = 1$,

$$H(g,t) = \begin{cases} 1, \text{ если } g(t) \le w_1, \\ 1, \text{ если } w_1 < g(t) < w_2 \text{ и} \\ \exists\delta = \delta(g,t) > 0\colon H(g,\tau) = 1 \\ \text{при } t-\delta < \tau < t, \\ 0, \text{ если } w_1 < g(t) < w_2 \text{ и} \\ \exists\delta = \delta(g,t) > 0\colon H(g,\tau) = 0 \\ \text{при } t-\delta < \tau < t, \\ 0, \text{ если } g(t) \ge w_2, \end{cases} \tag{6}$$

при $t > 0$, где w_1 и w_2 ($w_1 < w_2$) – фиксированные числа. Таким образом, если $g(t) \in (w_1, w_2)$, то значение функционала H в момент t такое же, как и в момент, предшествующий t. Если $g(t)$ достигает нижнего порогового значения w_1 в момент t и значение функционала H равнялось нулю в момент, предшествующий t, то функционал переключается на значение, равное единице (в противном случае переключения не происходит). Если $g(t)$ достигает верхнего порогового значения w_2 в момент t и значение функционала H равнялось единице в момент, предшествующий t, то функционал переключается на значение, равное нулю (в противном случае переключения не происходит).

Для определенности будем считать, что

$$w_1 \le \int\limits_Q m(x)\varphi(x)dx < w_2. \tag{7}$$

3. Обозначим через $W_2^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_{W_2^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int\limits_Q |D^\alpha v(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Через $W_\infty^1(a, b)$, $a < b$, обозначим пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих первые обобщенные производные из $L_\infty(a, b)$, с нормой

$$\|u\|_{W_\infty^1(a,b)} = \max_{t \in [a,b]} |u(t)| + \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in (a,b)} |u'(t)|. \tag{8}$$

Обозначим через $W_2^{2,1}(Q \times (a, b))$, $a < b$, анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|w\|_{W_2^{2,1}(Q\times(a,b))} = \left(\int\limits_a^b \|w(\cdot,t)\|^2_{W_2^2(Q)}dt + \int\limits_a^b \|w_t(\cdot,t)\|^2_{L_2(Q)}dt\right)^{1/2}.$$

Положим

$$\mathcal{W}(Q_T) = W_2^{2,1}(Q_T) \times W_\infty^1(0,T).$$

Определение 1. Пара функций $(w, u) \in \mathcal{W}(Q_T)$ называется *сильным решением* задачи (1)–(5) в Q_T, если функция w удовлетворяет уравнению (1) п.в. в Q_T и условиям (2), (3) в смысле следов, а функция u удовлетворяет уравнению (4) п.в. на интервале $(0, T)$ и условию (5).

Определение 2. Пусть пара $(w, u) \in \mathcal{W}(Q_T)$ есть сильное решение задачи (1)–(5) в Q_T. Момент времени $t_1 \in (0, T)$ называется *моментом переключения*, если выполнено одно из следующих условий:

1) $\exists\delta = \delta(t_1)$: $H(w_m, \tau) = 1$ при $t_1 - \delta < \tau < t_1$ и $w_m(t_1) = w_2$,

2) $\exists\delta = \delta(t_1)$: $H(w_m, \tau) = 0$ при $t_1 - \delta < \tau < t_1$ и $w_m(t_1) = w_1$.

Наряду с пространством $\mathcal{W}(Q_T)$ сильных решений введем множество $\mathcal{V}$ начальных данных. Обозначим

$$\mathcal{V} = W_2^1(Q) \times \mathbb{R},$$

если $\gamma > 0$, и

$$\mathcal{V} = \{(\varphi, u_0) \in W_2^1(Q) \times \mathbb{R}\colon \sigma(x)(\varphi(x) - w_e(x)) - K(x)(u_0 - u_c) = 0 \ (x \in \Gamma)\},$$

если $\gamma = 0$.

Теорема 1. 1. *Пусть* $(\varphi, u_0) \in \mathcal{V}$ *и выполнено условие* (7). *Тогда существует единственное сильное решение* $(w, u) \in \mathcal{W}(Q_T)$ *задачи* (1)–(5) *в* Q_T.

2. *Если t' и t'' – два момента переключения* $(0 < t' < t'' < T)$, *то*

$$t'' - t' \ge \frac{(w_2 - w_1)^2}{c\|m\|_{L_\infty(Q)}(\|\varphi\|_{W_2^1(Q)} + a_1 + u_c)^2},$$

где $a_1 = \max\left(2, \frac{1}{a}, |u_0|, 1 + a|u_0|\right)$ *и* $c > 0$ *не зависит от* $m(x)$, u_c, w_1, w_2, u_0, φ, t', t''.

В силу утверждения 2 теоремы 1 множество моментов переключений на интервале $(0, T)$ конечно или пусто.

4. В этом разделе мы установим существование сильного T-периодического решения (w, u) задачи (1), (3), (4) в том случае, когда для некоторых начальных данных $(\varphi, u_0) \in \mathcal{V}$ существует такое сильное решение $(\tilde{w}, \tilde{u}) \in \mathcal{W}(Q_T)$ задачи (1)–(5) в Q_T, что $\tilde{w}_m(0) = \tilde{w}_m(T)$, $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(T)$ и $H(\tilde{w}_m, T) = 1$.

О п р е д е л е н и е 3. Пара (w, u) называется с и л ь н ы м T-п е р и о д и ч е с к и м р е ш е н и е м з а д а ч и (1), (3), (4), если для любого $T_0 \geq T$ выполнены следующие условия:

1) $(w, u) \in \mathscr{W}(Q_{T_0})$,

2) функция w удовлетворяет уравнению (1) п.в. в Q_{T_0} и равенству (3) на Γ_{T_0},

3) функция u удовлетворяет уравнению (4) п.в. на интервале $(0, T_0)$,

4) $w(\cdot, t) = w(\cdot, t + T)$, $u(t) = u(t + T)$ и $H(w_m, t) = H(w_m, t + T)$ при $t \in [0, T_0 - T]$.

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что задача (1), (3), (4) о б л а д а е т с в о й с т в о м п е р и о д и ч н о с т и в с р е д н е м, если существует пара $(\varphi, u_0) \in \mathscr{V}$ и число $T > 0$ такие, что для любого $T_0 \geq T$ сильное решение $(\tilde{w}, \tilde{u}) \in \mathscr{W}(Q_{T_0})$ задачи (1)–(5) в Q_{T_0} с начальными данными $(\varphi, u_0) \in \mathscr{V}$ удовлетворяет равенствам

$$\tilde{w}_m(t) = \tilde{w}_m(t+T), \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}(t+T),$$

$$H(\tilde{w}_m, t) = H(\tilde{w}_m, t+T), \quad t \in [0, T_0 - T].$$

Сильное решение $(\tilde{w}, \tilde{u})$ будем называть T-п е р и о д и ч е с к и м в с р е д н е м.

Т е о р е м а 2. *Пусть задача* (1), (3), (4) *обладает свойством периодичности в среднем и пусть* $(\tilde{w}, \tilde{u})$ – *такое T-периодическое в среднем решение, что*

$$w_1 \leq \tilde{w}_m(0) < w_2.$$

Если $p(x) \equiv 0$ и $\sigma(x) \equiv 0$, *то предположим также, что* $m(x) \equiv m_0 = \text{const}$.

Тогда существует единственное сильное T-периодическое решение $(w, \tilde{u})$ *задачи* (1), (3), (4) *такое, что* $w_m(t) = \tilde{w}_m(t)$ *при* $t \geq 0$. *При этом*

$$\|\tilde{w}(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{W_2^1(Q)} \to 0 \ \text{при} \ t \to \infty.$$

Теорема 2 гарантирует условное существование сильного периодического решения (т.е. при условии, что имеется периодическое в среднем решение). Идея доказательства теоремы 2 состоит в следующем. Пусть $(w, u) \in \mathscr{W}(Q_{T_0})$ – сильное решение задачи (1)–(5) в Q_{T_0} с начальными данными $(\varphi, \tilde{u}(0)) \in \mathscr{V}$ (которое существует для любого $T_0 > 0$ согласно теореме 1). Введем нелинейный оператор

$$G\colon \varphi(x) \mapsto w(x, T),$$

где T – период периодического в среднем решения $(\tilde{w}, \tilde{u})$. Область определения оператора G состоит из таких функций φ, что

$$(\varphi, \tilde{u}(0)) \in \mathscr{V}, \quad w_m(t) = \tilde{w}_m(t),$$
$$u(t) = \tilde{u}(t), \quad t \geq 0.$$

Можно доказать, что область определения оператора G есть непустое замкнутое множество в $W_2^1(Q)$, а оператор G сжимающий. Применяя теорему Банаха о неподвижной точке, получаем требуемый результат.

Используя теорему 2, можно доказать следующее утверждение.

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2 *и пусть* $\tilde{u}(t) \not\equiv \text{const}$.

Тогда для любого $\varphi_0 \in [w_1, w_2)$ *существует такое сильное T-периодическое решение* (w, u) *задачи* (1), (3), (4), *что*

$$w_m(0) = \varphi_0.$$

5. В этом разделе мы рассмотрим задачу термоконтроля, которая обладает свойством периодичности в среднем. В этом случае, согласно теореме 2, существует также сильное периодическое решение.

Рассмотрим задачу (1)–(5), считая, что $p(x) \equiv 0$, $\sigma(x) \equiv 0$, $\gamma = 1$ и $m(x) \equiv m_0$:

$$w_t(x, t) = \Delta w(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{9}$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in Q, \tag{10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = K(x)(u(t) - u_c), \quad (x, t) \in \Gamma_T; \tag{11}$$

функция управления $u(t)$ есть решение задачи Коши

$$u'(t) + au(t) = H(w_m, t), \quad t \in (0, T), \tag{12}$$

$$u(0) = u_0, \tag{13}$$

где u_c, $a > 0$, $H(w_m, 0) = 1$, $H(w_m, t)$ при $t > 0$ задан по формуле (6), а средняя температура

$$w_m(t) = m_0 \int_Q w(x, t) dx.$$

Для доказательства свойства периодичности в среднем покажем, что средняя температура $w_m(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. Интегрируя уравнение (9) по области Q, имеем

$$w'_m(t) = m_0 \int_Q \Delta w dx = m_0 \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Отсюда и из (11) получим

$$w'_m(t) = k(u(t) - u_c), \quad t \in (0, T), \tag{14}$$

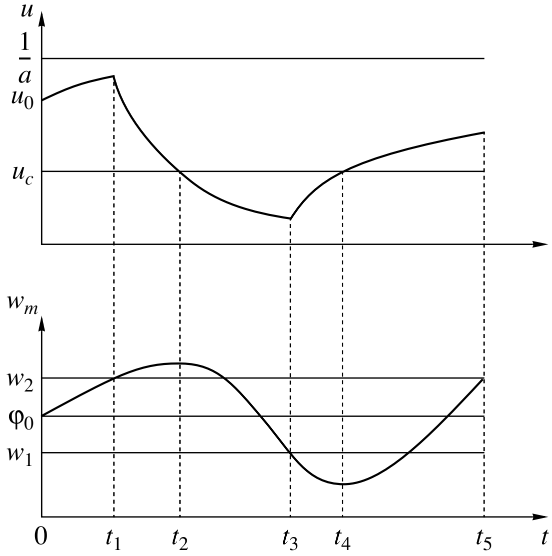

Рис. 1. Поведение функций $u(t)$ и $w_m(t)$. Здесь t_1, t_3 и t_5 – моменты переключений, t_2 и t_4 – моменты, когда $u(t) = u_c$, т.е. критические точки функции $w_m(t)$.

где $k = m_0\int_\Gamma K(x)dx$. Начальное условие для функции $w_m(t)$ имеет вид

$$w_m(0) = m_0\int_Q w(x, 0)dx = m_0\int_Q \varphi(x)dx. \qquad (15)$$

Поведение функций $u(t)$ и $w_m(t)$ показано схематически на рис. 1 (в случае, когда $m_0\int_\Gamma K(x)d\Gamma > 0$, $u_c < u_0 < \frac{1}{a}$ и $w_1 \le \varphi_0 < w_2$).

Анализируя задачу Коши (12), (13) для функции управления $u(t)$ и задачу Коши (14), (15) средней температуры $w_m(t)$, можно доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $m_0\int_\Gamma K(x)d\Gamma > 0$, $u_c < \frac{1}{a}$ *и* $w_1 \le \varphi_0 < w_2$.

Тогда на отрезке $\left[u_c, \frac{1}{a}\right]$ *существует единственное начальное значение* $\hat{u}_0$ *функции управления, такое, что решения* $u(t)$ *и* $w_m(t)$ *задач* (12), (13) *и* (14), (15) *соответственно периодичны с одним и тем же периодом. Указанное начальное управление* $\hat{u}_0$ *удовлетворяет неравенствам* $u_c < \hat{u}_0 < \frac{1}{a}$. *Пара* $(w_m(t), u(t))$ *представляет собой устойчивый цикл на фазовой плоскости* (w_m, u) *(см. рис.* 2).

Из теоремы 2 об условном существовании сильного периодического решения и теоремы 3 о существовании периодического в среднем решения вытекает следующий результат.

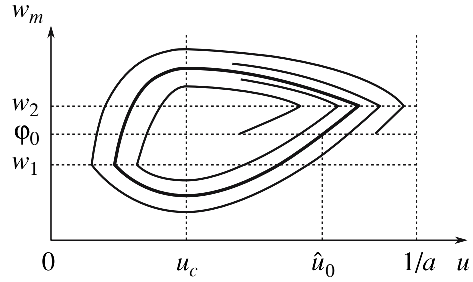

Рис. 2. Траектория предельного цикла $(w_m(t), u(t))$.

Теорема 4. 1. *Пусть* $m_0\int_\Gamma K(x)d\Gamma > 0$, $u_c < \frac{1}{a}$ *и* $w_1 \le \varphi_0 < w_2$.

Тогда существует единственное сильное периодическое решение (w, u) *задачи* (9), (11), (12), *такое, что*

$$u(0) \in \left[u_c, \frac{1}{a}\right], \quad w_m(0) = \varphi_0.$$

При этом начальное значение $u(0)$ *удовлетворяет неравенствам* $u_c < u(0) < \frac{1}{a}$.

2. *Если* $(\tilde{w}, \tilde{u})$ *– такое периодическое в среднем решение задачи* (9), (11), (12), *что*

$$\tilde{u}(0) \in \left[u_c, \frac{1}{a}\right], \quad \tilde{w}_m(0) = \varphi_0,$$

то

$$\tilde{u}(t) \equiv u(t), \quad \tilde{w}_m(t) \equiv w_m(t),$$
$$\|\tilde{w}(\cdot, t) - w(\cdot, t)\|_{W_2^1(Q)} \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

где (w, u) *– сильное периодическое решение из утверждения* 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07–01–00268) и фонда им. Александра фон Гумбольдта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Colli P., Grasselli M., Sprekels J.* // Appl. Math. Optim. 1999. V. 39. P. 229–255.
2. *Friedmann A., Hoffmann K.-H.* // SIAM J. Control. Optim. 1988. V. 26. P. 42–55.
3. *Hoffmann K.-H., Niezgódka M., Sprekels J.* // Nonlinear Anal. 1990. V. 15. P. 955–976.
4. *Lions J.L., Magenes E.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. II. B.; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1972.