ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 379, № 1, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.22

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ДВУГРАННЫХ УГЛАХ И ФОРМУЛА ГРИНА

© 2001 г. П. Л. Гуревич

Представлено академиком В.А. Ильиным 14.02.2001 г.

Поступило 07.03.2001 г.

При изучении эллиптических задач с нелокальными условиями наибольшие трудности возникают в случае пересечения носителя нелокальных данных с границей (см. [1–4]). Это приводит к появлению степенных особенностей у решений вблизи некоторого множества. Поэтому нелокальные эллиптические задачи естественно рассматривать в весовых пространствах (см. [5, 6]). При получении априорных оценок решений и построении правого регуляризатора нелокальных задач в ограниченной области возникают модельные нелокальные краевые задачи в плоских и двугранных углах (см. [3, 4]). В настоящей работе предлагается подход к изучению нелокальных задач, основанный на использовании формулы Грина и сопряженных нелокальных задач. Это позволяет снять дополнительные ограничения работы [3] на соответствующую локальную модельную задачу и получить необходимые и достаточные условия фредгольмовости нелокальных задач в плоских углах и однозначной разрешимости нелокальных задач в двугранных углах. При этом в качестве сопряженных возникают нелокальные задачи трансмиссии, рассмотренные ранее в работах [7, 8] для ограниченной области из $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, а также в работе [9] в одномерном случае.

1. Рассмотрим двугранный угол $\Omega = \{x = (y, z): b_1 < \varphi < b_2, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ с гранями $\Gamma_j = \{x = (y, z): \varphi = b_j, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ $(j = 1, 2)$ и ребром $M = \{x = (y, z): y = 0, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$. Здесь $x = (y, z) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$; r, φ – полярные координаты точки y; $0 < b_1 < b_2 < 2\pi$.

Обозначим через $\mathcal{P}(D_y, D_z)$, $B_{j\mu}(D_y, D_z)$ и $B^{\mathcal{G}}_{j\mu}(D_y, D_z)$ однородные дифференциальные операторы с постоянными комплексными коэффициентами порядков $2m$, $m_{j\mu} \le 2m - 1$ и $m_{j\mu} \le 2m - 1$ соответственно ($j = 1, 2$; $\mu = 1, 2, \ldots, m$). Будем предполагать, что оператор $\mathcal{P}(D_y, D_z)$ собственно эллиптичен и система операторов $\{B_{j\mu}(D_y, D_z)\}_{\mu=1}^{m}$ является нормальной и накрывает $\mathcal{P}(D_y, D_z)$ на Γ_j, $j = 1, 2$ (см. [10, гл. 2]).

Рассмотрим в двугранном угле Ω нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{P}(D_y, D_z)U = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_{j\mu}(D_y, D_z)U \equiv B_{j\mu}(D_y, D_z)U|_{\Gamma_j} + \\ + (B^{\mathcal{G}}_{j\mu}(D_y, D_z)U)(\mathcal{G}_j y, z)\big|_{\Gamma_j} = g_{j\mu}(x), \quad x \in \Gamma_j.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь и далее индексы j, μ изменяются следующим образом: $j = 1, 2$; $\mu = 1, 2, \ldots, m$; запись $(B^{\mathcal{G}}_{j\mu}(D_y, D_z)U)(\mathcal{G}_j y, z)$ означает, что выражение $(B^{\mathcal{G}}_{j\mu}(D_{y'}, D_{z'})U)(x')$ берется при значении аргумента $x' = (\mathcal{G}_j y, z)$; $\mathcal{G}_j$ – оператор поворота на угол φ_j и растяжения в χ_j раз в плоскости $\{y\}$, так, что $b_1 < b_1 + \varphi_1 = b_2 + \varphi_2 = b < b_2$, $0 < \chi_j$. Отметим, что на нелокальные операторы $B^{\mathcal{G}}_{j\mu}(D_y, D_z)$ при этом никаких условий (кроме ограничения на порядок) не накладывается.

Введем пространство $H^l_a(\Omega)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{\Omega}\backslash M)$ по норме $\|w\|_{H^1_a(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| < l}\int_\Omega r^{2(a-l+|\alpha|)}|D_x^\alpha w(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, где $C_0^\infty(\overline{\Omega}\backslash M)$ – множество бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций с компактными носителями из $\overline{\Omega}\backslash M$; $a \in \mathbb{R}$, $l \ge 0$ – целое. Через $H_a^{l-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ при $l \ge 1$ обозначим пространство следов на $(n-1)$-мерной полуплоскости $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ с нормой $\|\psi\|_{H_a^{l-1/2}(\Gamma)} = \inf\|w\|_{H_a^l}(\Omega)$, $w \in H^l_a(\Omega): w|_\Gamma = \psi$.

Московский авиационный институт

Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{P}(D_y, D_z), \mathcal{B}_{j\mu}(D_y, D_z)\}: H_a^{2m} \to$$

$$\to H_a^0(\Omega) \times \prod_{j,\mu} H_a^{2m - m_{j\mu} - \frac{1}{2}}(\Gamma_j),$$

соответствующий задаче (1), (2).

2. Рассмотрим вспомогательную нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{P}(D_y, \theta)u = f(y), \quad y \in K, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_{j\mu}(D_y, \theta)u \equiv B_{j\mu}(D_y, \theta)u|_{\gamma_j} + \\ + (\mathcal{B}_{j\mu}^{\mathcal{G}}(D_y, \theta)u)(\mathcal{G}_j y)\big|_{\gamma_j} = g_{j\mu}(y), \quad y \in \gamma_j,\end{gathered} \tag{4}$$

где $K = \{y: b_1 < \varphi < b_2\}$, $\gamma_j = \{y: \varphi = b_j\}$; θ – произвольная точка единичной сферы $S^{n-3} = \{z \in \mathbb{R}^{n-2}: |z| = 1\}$.

Введем пространство $E_a^l(K)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{K}\backslash\{0\})$ по норме $\|w\|_{E_a^l(K)} = \left(\sum_{|\alpha| \le l} \int_K r^{2a}(r^{2((|\alpha|)-l)} + 1)\left|D_y^\alpha w(y)\right|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}$. Через $E_a^{l-\frac{1}{2}}(\gamma)$ при $l \ge 1$ обозначим пространство следов на луче $\gamma \subset \bar{K}$ с нормой $\|\psi\|_{E_a^{l-\frac{1}{2}}(\gamma)} = \inf\|w\|_{E_a^l(K)}$ ($w \in E_a^l(K): w|_\gamma = \psi$).

Обозначим $E_a^0(K, \gamma) = E_a^0(K) \times \prod_{j,\mu} E_a^{2m - m_{j\mu} - \frac{1}{2}}(\gamma_j)$.

Введем ограниченный оператор $\mathcal{L}(\theta)$: $E_m^{2m}(K) \to E_a^0(K, \gamma)$ по формуле

$$\mathcal{L}(\theta)u = \{\mathcal{P}(D_y, \theta)u, \mathcal{B}_{j\mu}(D_y, \theta)u\}.$$

Оператор $\mathcal{L}(\theta)$ соответствует нелокальной краевой задаче (3), (4). Разрешимость задач (1), (2) и (3), (4) тесно связана с расположением собственных значений некоторой модельной нелокальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Для получения этой задачи запишем операторы $\mathcal{P}(D_y, 0)$, $B_{j\mu}(D_y, 0)$, $B_{j\mu}^{\mathcal{G}}(D_y, 0)$ в полярных координатах: $\mathcal{P}(D_y, 0) = r^{-2m}\mathbf{P}(\varphi, D_\varphi, rD_r)$, $B_{j\mu}(D_y, 0) = r^{-m_{j\mu}}\mathbf{B}_{j\mu}(\varphi, D_\varphi, rD_r)$, $B_{j\mu}^{\mathcal{G}}(D_y, 0) = r^{-m_{j\mu}}\mathbf{B}_{j\mu}^{\mathcal{G}}(\varphi, D_\varphi, rD_r)$, где $D_\varphi = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $D_r = -i\frac{\partial}{\partial r}$. Положим $\theta = 0$, $\{f, g_{j\mu}\} = 0$ в (3) и (4), введем новую переменную $\tau = \ln r$ и сделаем преобразование Фурье по τ. В результате получим

$$\mathbf{P}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w(\varphi, \lambda) = 0, \quad b_1 < \varphi < b_2, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}B_{j\mu}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w(\varphi, \lambda)\big|_{\varphi = b_j} + \\ + e^{(i\lambda - m_{j\mu})\ln\chi_j}\mathbf{B}_{j\mu}^{\mathcal{G}}(\varphi, D_\varphi, \lambda)w(\varphi + \varphi_j, \lambda)\big|_{\varphi = b_j} = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$w(\varphi, \lambda) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} u(\varphi, \tau)e^{-i\lambda\tau}d\tau.$$

Эта задача является обыкновенным дифференциальным уравнением (5) для функции $w \in W_2^{2m}(b_1, b_2)$ с нелокальными условиями (6), связывающими значения фукнции w и ее производных в точке $\varphi = b_j$ со значениями функции w и ее производных во внутренней точке $\varphi = b$ интервала (b_1, b_2).

Лемма 1. *Пусть на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ *нет собственных значений модельной задачи* (5), (6). *Тогда для всех* $u \in E_a^{2m}(K)$ *и всех* $\theta \in S^{n-3}$

$$\|u\|_{E_a^{2m}(K)} \le c_2(\|\mathcal{L}(\theta)u\|_{E_a^0(K,\gamma)} + \|u\|_{L_2(K \cap S)}), \tag{7}$$

где $S = \{y: 0 < R_1 < r < R_2\}$, $c_1 > 0$ *не зависит от* θ, u. *Если при некотором* $\theta \in S^{n-3}$ *для всех* $u \in E_a^{2m}(K)$ *имеет место оценка* (7), *то на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ *нет собственных значений задачи* (5), (6).

Лемма 1 доказана в [3, §3]. Из леммы 1 следуют конечномерность ядра и замкнутость образца оператора $\mathcal{L}(\theta)$. Чтобы доказать конечномерность коядра оператора $\mathcal{L}(\theta)$, воспользуемся формулой Грина для задачи (3), (4).

3. Положим $\Gamma = \{x = (y, z): \varphi = b, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, $\gamma = \{y: \varphi = b\}$. Множества Γ, γ являются носителями нелокальных данных в задачах (1), (2) и (3), (4) соответственно. Обозначим $K_1 = \{y: b_1 < \varphi < b\}$, $K_2 = \{y: b < \varphi < b_2\}$. Пусть $\mathcal{Q}(D_y, D_z)$ формально сопряжен с $\mathcal{P}(D_y, D_z)$. Тогда, полагая $\mathcal{P} = \mathcal{P}(D_y, D_z)$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(D_y, D_z)$ и т.д., сформулируем следующий результат.

Теорема 1. *Для операторов* $\mathcal{P}$, $B_{j\mu}$ *и* $B_{j\mu}^{\mathcal{G}}$, *определенных в разделе* 1, *можно выбрать* (*не единственным образом*): 1) *систему нормальных на* Γ_j *операторов* $\{B'_{j\mu}\}_{\mu=1}^m$ *с постоянными коэффициентами и порядками* $2m - 1 - m'_{j\mu}$, *дополняющую* $\{B_{j\mu}\}_{\mu=1}^m$ *до системы Дирихле порядка* $2m$ *на* Γ_j[1]; 2) *систему* $\{B_\mu, B'_\mu\}_{\mu=1}^m$, *являющуюся системой Дирихле порядка* $2m$ *на* Γ, *такую, что*

[1] Определение системы Дирихле см. в [10, гл. 2, п. 2.2].

порядки операторов B_μ *и* B'_μ *равны* $2m - \mu$ *и* $m - \mu$ *соответственно.*

Если этот выбор сделан, то существуют операторы $C_{j\mu}$, $C'_{j\mu}$, T_ν *и* $T^{\mathcal{G}}_{j\mu}$ ($j = 1, 2$; $\mu = 1, 2, \ldots, m$; $\nu = 1, 2, \ldots, 2m$) *с постоянными коэффициентами, обладающие следующими свойствами*: (I) *порядки операторов* $C_{j\mu}$, $C'_{j\mu}$, T_ν *и* $T^{\mathcal{G}}_{j\mu}$ *равны* $m'_{j\mu}$, $2m - 1 - m_{j\mu}$, $\nu - 1$ *и* $\nu - 1$ *соответственно*; (II) *система* $\{C_{j\mu}\}_{\mu=1}^{m}$ *накрывает оператор* $\mathcal{Q}$ *на* Γ_j *и дополняет* $\{C'_{j\mu}\}_{\mu=1}^{m}$ *до системы Дирихле порядка* $2m$ *на* Γ_j, *система* $\{T_\nu\}_{\nu=1}^{2m}$ *есть система Дирихле порядка* $2m$ *на* Γ; (III) *для любых функций* $u \in E_a^{2m}(K)$, $v_j \in E_{-a+2m}^{2m}(K_j)$ *имеет место формула Грина с параметром* θ

$$\begin{gathered}\sum_j (\mathcal{P}(D_y, \theta)u, v_j)_{K_j} + \\ + \sum_{j,\mu} (\mathcal{B}_{j\mu}(D_y, \theta)u, C'_{j\mu}(D_y, \theta)v_j|_{\gamma_j})_{\gamma_j} + \\ + \sum_\mu (B_\mu(D_y, \theta)u|_\gamma, \mathcal{T}_\mu(D_y, \theta)v)_\gamma = \\ = \sum_j (u, \mathcal{Q}(D_y, \theta)v_j)_{K_j} + \\ + \sum_{j,\mu} (B'_{j\mu}(D_y, \theta)u|_{\gamma_j}, C_{j\mu}(D_y, \theta)v_j|_{\gamma_j})_{\gamma_j} + \\ + \sum_\mu (B'_\mu(D_y, \theta)u|_\gamma, \mathcal{T}_{m+\mu}(D_y, \theta)v)_\gamma.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $(\cdot, \cdot)_{K_j}$, $(\cdot, \cdot)_{\gamma_j}$ *и* $(\cdot, \cdot)_\gamma$ *– скалярные произведения соответственно в* $L_2(K_j)$, $L_2(\gamma_j)$ *и* $L_2(\gamma)$; $\mathcal{T}_\nu(D_y, \theta)v \equiv T_\nu(D_y, \theta)v_1|_\gamma - T_\nu(D_y, \theta)v_2|_\gamma + \sum_k (T^{\mathcal{G}}_{k\nu}(D_y, \theta)v_k)(\mathcal{G}_k^{-1}y)\big|_\gamma$; $\mathcal{G}_k^{-1}$ *– оператор поворота на угол* $-\varphi_k$ *и растяжения в* $\dfrac{1}{\chi_k}$ *раз в плоскости* $\{y\}$, $k = 1, 2$; $\nu = 1, 2, \ldots, 2m$.

Формула (8) порождает задачу, формально сопряженную к задаче (3), (4):

$$\mathcal{Q}(D_y, \theta)v_j = f_j(y), \quad y \in K_j, \tag{9}$$

$$\mathcal{C}_{j\mu}(D_y, \theta)v \equiv C_{j\mu}(D_y, \theta)v_j|_{\gamma_j} = g_{j\mu}(y), \quad y \in \gamma_j, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{T}_\nu(D_y, \theta)v \equiv T_\nu(D_y, \theta)v_1|_\gamma - T_\nu(D_y, \theta)v_2|_\gamma + \\ + \sum_k (T^{\mathcal{G}}_{k\nu}(D_y, \theta)v_k)(\mathcal{G}_k^{-1}y)\big|_\gamma = h_\nu(y), \quad y \in \gamma,\end{gathered} \tag{11}$$

где, как и ранее, $j = 1, 2$; $\mu = 1, 2, \ldots, m$; индексы ν, k здесь и далее изменяется следующим образом: $\nu = 1, 2, \ldots, 2m$, $k = 1, 2$; $\theta \in S^{n-3}$; $v(y) \equiv v_j(y)$ при $y \in K_j$. Задачу (9)–(11) будем называть нелокальной задачей трансмиссии.

Положим $\mathcal{E}^0_{-a+2m}(K, \gamma) = E^0_{-a+2m}(K) \times \prod_{j,\mu} E_{-a+2m}^{2m - m'_{jm} - \frac{1}{2}}(\gamma_j) \times \prod_\nu E_{-a+2m}^{2m-\nu+\frac{1}{2}}(\gamma)$. Обозначим также $\mathcal{E}^{2m}_{-a+2m}(K) = \bigotimes_j E^{2m}_{-a+2m}(K_j)$. Рассмотрим ограниченный оператор $\mathcal{M}(\theta)$: $\mathcal{E}^{2m}_{-a+2m}(K) \to \mathcal{E}^0_{-a+2m}(K, \gamma)$, действующий по формуле

$$\mathcal{M}(\theta)v = \{\mathcal{Q}(D_y, \theta)v, \mathcal{C}_{j\mu}(D_y, \theta)v, \mathcal{T}_\nu(D_y, \theta)v\}.$$

Здесь $\mathcal{Q}(D_y, \theta)v(y) \equiv \mathcal{Q}(D_y, \theta)v_j(y)$ при $y \in K_j$; v_j – сужение функции v на K_j. Оператор $\mathcal{M}(\theta)$ соответствует нелокальной задаче трансмиссии (9)–(11).

Л е м м а 2. *Пусть на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ *нет собственных значений модельной задачи* (5), (6). *Тогда для всех* $v \in \mathcal{E}^{2m}_{-a+2m}(K)$ *и всех* $\theta \in S^{n-3}$

$$\|v\|_{\mathcal{E}^{2m}_{-a+2m}(K)} \le c_2(\|\mathcal{M}(\theta)v\|_{\mathcal{E}^0_{-a+2m}(K,\gamma)} + \|v\|_{L_2(K \cap S')}), \tag{12}$$

где $S' = \{y: 0 < R'_1 < r < R'_2\}$; $c_2 > 0$ *не зависит от* θ, v. *Если при некотором* $\theta \in S^{n-3}$ *для всех* $v \in \mathcal{E}^{2m}_{-a+2m}(K)$ *имеет место оценка* (12), *то на прямой* $\operatorname{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ *нет собственных значений задачи* (5), (6).

Из леммы 2 следует, что $\mathcal{M}(\theta)$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

4. Для $\mathcal{L}(\theta)$ рассмотрим сопряженный оператор $\mathcal{L}^*(\theta)$: $(E^0_a(K, \gamma))^* \to (E^{2m}_a(K))^*$, действующий на $F = \{f, q_{j\mu}\} \in (E^0_a(K, \gamma))^*$ по формуле

$$\langle u, \mathcal{L}^*(\theta)F\rangle = \langle \mathcal{P}(D_y, \theta)u, f\rangle + \sum_{j,\mu} \langle \mathcal{B}_{j\mu}(D_y, \theta)u, g_{j\mu}\rangle$$

для любых $u \in E^{2m}_a(K)$. Здесь скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают полуторалинейные формы на соответствующих дуальных парах пространств.

Установим связь между ядрами операторов $\mathcal{L}^*(\theta)$ и $\mathcal{M}(\theta)$.

Л е м м а 3. *Ядро оператора* $\mathscr{L}^*(\theta)$ *совпадает с множеством, которое пробегает элемент* $\{v, C'_{j\mu}(D_y, \theta)v_j|_{\gamma_j}\}$, *когда* $v \in \mathscr{E}^{2m}_{-a+2m}(K)$, $v_j \in C^\infty(\overline{K}_j\{0\})$ *и является решением задачи* (9)–(11) *при* $\{f_j, q_{j\mu}, h_\nu\} = 0$.

Из лемм 1–3 вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть на прямой* $\mathrm{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ *нет собственных значений модельной задачи* (5), (6). *Тогда оператор* $\mathscr{L}(\theta)$ *фредгольмов при всех* $\theta \in S^{n-3}$. *Если при некотором* $\theta \in S^{n-3}$ *оператор* $\mathscr{L}(\theta)$ *фредгольмов, то на прямой* $\mathrm{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ *нет собственных значений задачи* (5), (6).

5. Исследуем разрешимость нелокальной краевой задачи (1), (2).

Т е о р е м а 3. *Пусть на прямой* $\mathrm{Im}\lambda = a + 1 - 2m$ *нет собственных значений модельной задачи* (5), (6) *и* $\dim\ker(\mathscr{L}(\theta)) = \mathrm{codim}\mathscr{R}(\mathscr{L}(\theta)) = 0$ *для всех* $\theta \in S^{n-3}$. *Тогда оператор* $\mathscr{L}$ *есть изоморфизм.*

Т е о р е м а 4. *Пусть операторв* $\mathscr{L}$ *фредгольмов. Тогда оператор* $\mathscr{L}(\theta)$ *есть изоморфизм при всех* $\theta \in S^{n-3}$.

Из леммы 1 и теорем 3, 4, в частности, следует, что если оператор $\mathscr{L}$ фредгольмов, то он изоморфизм.

6. Все результаты разделов 1–5 обобщаются на системы уравнений для N функций, определенных в N двугранных (плоских) углах, с нелокальными условиями, содержащими конечное число нелокальных членов и связывающими значения функций и их производных на гранях (сторонах) углов со значениями функций и их производных на некоторых полуплоскостях (лучах), лежащих строго внутри углов. Применение априорных оценок в весовых пространствах (аналогичных оценкам работ [3, 6]) позволяет изучить фредгольмовость оператора $\mathscr{L}(\theta)$: $E_a^{l+2m}(K) \to E_a^l(K) \times \prod_{j,\mu} E_a^{l+2m-m_{j\mu}-\frac{1}{2}}(\gamma_j)$ и обратимость оператора $\mathscr{L}$: $H_a^{l+2m}(\Omega) \to H_a^l(\Omega) \times \prod_{j,\mu} H_a^{l+2m-m_{j\mu}-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ для любых $l = 1, 2, \ldots$

Автор выражает глубокую благодарность проф. А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к данной работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01–01–01030), а также гранта (Е00–1–195) Министерства образования РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* // ДАН. 1985. Т. 280. № 3. С. 521–524.
2. *Скубачевский А.Л.* // Мат. сб. 1986. Т. 129 (171). № 2. С. 279–302.
3. *Скубачевский А.Л.* // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 120–131.
4. *Скубачевский А.Л.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 128–139.
5. *Кондратьев В.А.* // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
6. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
7. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* // ДАН. 1971. Т. 201. № 5. С. 1059–1062.
8. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.* // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13. № 1. С. 165–181.
9. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 795–804.
10. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.