FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
VORLESUNG SS 2016

Algebraische Gruppen

Lei Zhang

September 28, 2016

BESCHREIBUNG

Ein Gruppenschema ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Schemata über einem festen Körper. Eine algebraische Gruppe ist ein Gruppenschema, dessen zugrundeliegendes Schema von endlichem Typ ist. Ein zentrales Beispiel ist die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Bei dieser Vorlesung handelt es sich um eine Einführung in die algebraische Gruppe. Das Ziel ist eine Klassifikation der *glatten* algebraischen Gruppen über einem *perfekten* Körper. Sei G eine solche Gruppe. Die Zusammenhangskomponente G^0 von G ist eine normale Untergruppe und der Quotient $G_{\text{ét}} := G/G^0$ ist eine endliche algebraische Gruppe die étale ist. Nach dem Satz von Chevalley, ist jede algebraische Gruppe über einem perfekten Körper (auf eindeutige Weise) eine Erweiterung einer abelschen Varietät durch eine affine algebraische Gruppe, d.h. wir haben (auf eindeutige Weise) die folgende exakte Sequenz

$$1 \to G_{\text{aff}} \to G^0 \to A \to 1$$

wobei G_{aff} eine affine Untergruppe von G bezeichnet und A eine abelsche Varietät ist. Damit ist G_{aff} eine glatte affine algebraische Gruppe. Wir werden sehen, dass es eine eindeutige Untergruppe G_{sol} von G_{aff} gibt, die der größste zusammenhängende glatte auflösbare Normalteiler ist. Die Untergruppe G_{sol} heißt *das Radikal von* G_{aff}. Der Quotient $G_{\text{aff}}/G_{\text{sol}}$ ist eine halbeinfache algebraische Gruppe. Es gibt auch eine eindeutige größste zusammenhängende glatte unipotente normale Untergruppe G_{unip} — *das unipotent Radikal von* G_{aff}. Wir werden sehen, dass das unipotente Radikal von G_{aff} gleich dem von G_{sol} ist. Der Quotient $G_{\text{sol}}/G_{\text{unip}}$

ist ein Torus. Abschließend haben wir das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, dash, "\text{endliche étale}"] \arrow[dd, dash, bend right, "\text{proper}"'] \\
G^0 \arrow[d, dash, "\text{abelsche Varieät}"] \\
G_{\mathrm{aff}} \arrow[d, dash, "\text{halbeinfache}"] \arrow[dd, dash, bend right, "\text{reductive}"'] \\
G_{\mathrm{sol}} \arrow[d, dash, "\text{Torus}"] \\
G_{\mathrm{unip}} \arrow[d, dash, "\text{unipotente}"] \\
\{1\}
\end{tikzcd}$$

References

[Con] B. Conrad, *Reductive Groups*, `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/luminysga3.pdf`.

[DG] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson, Paris, 1970.

[EGM] B. Edixhoven, G. van der Geer, B. Moonen, *Abelian Varieties*, `http://www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html#bookabvar`.

[Mil] J. S. Milne, *Algebraic Groups*, `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/iAG200.pdf`.

[Pin] R. Pink, *Finite Group Schemes*, `https://people.math.ethz.ch/~pink/ftp/FGS/CompleteNotes.pdf`.

[Po] B. Poonen, *Rational Points on Varieties*, `http://www-math.mit.edu/~poonen/papers/Qpoints.pdf`.

[SGA3] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes* I, II, III, Lecture Notes in Math 151, 152, 153, Springer-Verlag, New York (1970).

[Wat] W.Waterhouse, *Affine group schemes*, GTM 66, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

1 Gruppenschema (20/04/2016)

Ziel des Vortrags: Einführung und Grundbegriffe

DETAILS:

- Gruppenobjekte in einer Kategorie;
- Beispiele: Gruppe, Lie Gruppe, topologische Gruppe, Gruppenschema;
- Was ist eine Hopf-Algebra? Was hat ein affine Gruppenschema mit einer Hopf-Algebra zu tun?
- Gruppenschema als ein Gruppenfunktor und Lemma von Yoneda;
- Beispiele der Gruppenschemata: $\mathbb{G}_a$, $\mathbb{G}_m$, GL_n, elliptische Kurven, Konstant Gruppenschema;
- Gruppenschema als eine Kategorie. Kern und Cokern einer Abbildung der Gruppenschemata. In der Kategorie der affinen Gruppenschemata, was ist eine Untergruppe und was ist eine Quotientengruppe?

Definition 1. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten und einem finalen Objekt, das wir mit S bezeichnen. Eine Verknüpfung auf einem Objekt $G \in \mathscr{C}$ ist ein Morphismus

$$m : G \times G \to G.$$

Solch eine Verknüpfung heißt assoziativ genau dann, wenn von den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
(G \times G) \times G \arrow[r, "m \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "="] & G \times G \arrow[r, "m"] & G \arrow[d, "="] \\
G \times (G \times G) \arrow[r, "\mathrm{id} \times m"] & G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

Ein neutrales Element für eine Verknüpfung auf einem Objekt G ist ein Morphismus $e : S \to G$ des finalen Objekts S nach G derart,

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, e \circ \pi)"] \arrow[d, "(e \circ \pi, \mathrm{id})"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier bezeichnet π den eindeutigen Morphismus von $G \to S$.
Desweiteren heißt ein Morphismus $i : G \to G$ die Inversenbildung falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id}, i)"] \arrow[d, "(i, \mathrm{id})"] \arrow[dr, "e \circ \pi"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

Ein solches Objekt mit Verknüpfung (G, m, e, i) nennen wir ein Gruppenobjekt in $\mathscr{C}$.

Sei $\tau : G\times G \to G\times G$ die Vertauschung der beiden Faktoren. Wenn nun zusätzlich das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\tau"] & G \arrow[d, "="] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

, dann heißt das Gruppenobjekt kommutativ.

Example 1.1. 1. Wenn $\mathscr{C}$ = (Mengen), dann ist ein Gruppenobjekt in $\mathscr{C}$ ist gerade eine abstrakte Gruppe.

2. Wenn $\mathscr{C}$ = (Topologische Räume), dann ist ein Gruppenobjekt in $\mathscr{C}$ eine topologische Gruppe.

3. Wenn $\mathscr{C}$ = (Differenzierbare Mannigfaltigkeiten über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)), dann ist ein Gruppenobjekt in $\mathscr{C}$ eine reelle (bzw. komplexe) Lie-Gruppe.

4. Wenn $\mathscr{C}$ = (Schemata über S), in der S ein beliebiges Schema ist, dann ist ein Gruppenobjekt in $\mathscr{C}$ ein Gruppenschema.

Definition 2. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie. Mit $\underline{\mathscr{C}}$ bezeichen wir die Kategorie Hom($\mathscr{C}$, (Mengen)). Es gibt einen (kovarianten) Funktor $Y : \mathscr{C} \to \underline{\mathscr{C}}$ gegeben durch $X \mapsto (T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, X))$.

Lemma 1.2. *(Lemma von Yoneda) Der Funktor Y ist volltreu.*

Definition 3. Sei $\mathscr{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten und einem finalen Objekt. Mit Grp($\mathscr{C}$) bezeichen wir die Kategorie der Gruppenobjekte in $\mathscr{C}$. Es gibt einen Funktor Y_G : Grp($\mathscr{C}$) $\to$ Hom($\mathscr{C}$, (Gruppen)) gegeben durch $X \mapsto (T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, X))$.

Lemma 1.3. *(Lemma von Yoneda) Der Funktor Y_G ist volltreu.*

Example 1.4. 1. Sei S ein Schema, und sei $\mathbb{G}_a := \mathbb{A}^1_S$, der 1-dimensionale affine Raum. Dann ist $\mathbb{G}_a$ ist ein Gruppenschema.

2. Sei S ein Schema, und sei $\mathbb{G}_m := \mathbb{A}^1_S \setminus \{0\} = \mathrm{Spec}_{O_S}(O_S[T]_T)$. Dann ist $\mathbb{G}_m$ ist ein Gruppenschema.

3. Sei S ein Schema, $n \in \mathbb{N}^+$ und sei

$$\mathrm{GL}_n := \mathrm{Spec}_{O_S}(O_S[T_{11}, T_{12}, \cdots, T_{nn}]_{\det(T_{ij})})$$

. Dann ist GL_n ein Gruppenschema.

Definition 4. Sei S ein Schema, und sei G ein Gruppenschema über S. Das Gruppenschema G heißt affin, wenn der Strukturmorphismus $\pi : G \to S$ affin ist. In diesem Fall ist,

$$G = \mathrm{Spec}_{\mathscr{O}_S}(\pi_* \mathscr{O}_G)$$

und wir bezeichnen den quasi-kohärenten $\mathscr{O}_S$-Modul $\pi_* \mathscr{O}_G$ mit $\mathscr{A}$.

Definition 5. Sei S ein Schema. Eine Hopf-Algebra über S ist eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_S$-Algebra $\mathscr{A}$ mit den $\mathcal{O}_S$-linearen Abbildungen $\Delta : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A}$, $\epsilon : \mathscr{A} \to \mathcal{O}_S$, $i : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ und den kommutativen Diagrammen:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} & \mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A} \arrow[l, "(\mathrm{id},\epsilon\circ\pi)"'] \\
\mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A} \arrow[u, "(\epsilon\circ\pi{,}\mathrm{id})"] & \mathscr{A} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathscr{A} & \mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A} \arrow[l, "(\mathrm{id},i)"'] \\
\mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A} \arrow[u, "(i{,}\mathrm{id})"] & \mathscr{A} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\epsilon\circ\pi"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A} & \mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A} \arrow[l, "\Delta\times\mathrm{id}"'] & \mathscr{A} \arrow[l, "\Delta"'] \\
\mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A}) \arrow[u, "="'] & \mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{A} \arrow[l, "\mathrm{id}\times\Delta"'] & \mathscr{A} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

in denen $\pi : \mathcal{O}_S \to \mathscr{A}$ den Strukturmorphismus bezeichnet.

Lemma 1.5. *Die Kategorie der Gruppenschemata über S ist äquivalent zur Kategorie der Hopf-Algebren über* $\mathcal{O}_S$.

Example 1.6.

Die Hopf-Algebra von $\mathbb{G}_a$ ist $\mathscr{A} = \mathcal{O}_S[T]$ und $\Delta : \mathcal{O}_S[T] \to \mathcal{O}_S[T] \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[T]$, $x \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x$.

Die Hopf-Algebra von $\mathbb{G}_m$ ist $\mathscr{A} = \mathcal{O}_S[T]_T$ und $\Delta : \mathcal{O}_S[T]_T \to \mathcal{O}_S[T]_T \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S[T]_T$, $x \mapsto x \otimes x$.

Example 1.7. Beispiele für nicht-affine Gruppenschemata sind:

1. Sei G eine (abstrakte) Gruppe, und sei S ein Schema. Das Schema $(G)_S := \coprod_{i \in G} S_i$ ($S_i = S$) mit der Abbildung $(G)_S \times_S (G)_S \to (G)_S$, in der $S_i \times_S S_j \simeq S \xrightarrow{\mathrm{id}} S \simeq S_{ij}$ die Identität ist, ist ein Gruppenschema. Wir bezeichnen $(G)_S$ als *konstantes Gruppenschema*. Als ein Funktor ist, $(G)_S(T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(|T|, G)$, in dem $|T|$ der topologische Raum von T ist, hier bezeichnet Top die Kategorie der topologischen Räume und wir statten G mit der diskreten Topologie aus.

2. Die abelschen Varietäten sind eigentliche Gruppenvarietäten, die nicht affin sind.

Definition 6. Sei $f : H \to G$ eine Abbildung von Gruppenschemata über S. Die Abbildung f heißt injektiv genau dann, wenn die natürliche Transformation der Funktoren $\underline{f} : \underline{H} \to \underline{G}$ injektiv ist. Die Abbildung f heißt surjektiv genau dann, wenn für jeden gegebenen Morphismus $t : T \to G$ es eine fpqc-Überdeckung $g : T' \to T$ gibt, zusammen mit einer Abbildung $\delta : T' \to H$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & T' \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, "\delta"'] \\
 & T \arrow[d, "t"] \\
H \arrow[r, "f"] & G
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Definition 7. Sei G ein Gruppenschema über einem Körper k. Wir nennen G eine *algebraische Gruppe* genau dann, wenn G von endlichem Typ ist.

Lemma 1.8. *Seien G, H zwei affine Gruppenschemata über einem Körper k. Eine Abbildung $f : H \to G$ ist surjektive genau dann, wenn f treuflach ist.*

Proof. Wenn f treuflach ist, es ist klar dass f surjektiv ist. Nun nehmen wir an, dass $f : H \to G$ surjektiv ist. Dann gibt es für die Abbildung $\mathrm{id} : G \to G$ eine fpqc-Überdeckung $T \to G$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, "\delta"'] \\ & G \arrow[d, "="] \\ H \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann ist $k[G] \to k[H] \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ injektiv, und genauso $k[G] \to k[H]$. Nach Lemma 1.9 ist $G \to H$ treuflach. □

Lemma 1.9. *Sei $f : A \to B$ eine injektive Abbildung von Hopf-Algebren über einem Körper k. Dann ist f treuflach.*

Proof. Weil treuflach eine Eigenschaft ist, die fpqc-lokal ist, dürfen wir anmehmen, dass $k = \bar{k}$ ist. Nun seien $H = \mathrm{Spec}(B)$, $G = \mathrm{Spec}(A)$ algebraische Gruppen und sei $g : H \to G$ der von f induzierte Homomorphismus. Angenommen G ist glatt, dann muss jede Zusammenhangskomponente von H auf eine Zusammenhangskomponente von G abgebildet werden. Ansonsten gibt es eine Faktorisierung von g: $H \to G' \subseteq G$, in der G' eine nicht-triviale Komponente von G ist, und das ist unmöglich weil f injektiv ist.
Nach generischer Flachheit, gibt es eine offene Teilmenge U von H und eine dichte offene Teilmenge V von G sodass $f|_U : U \to V$ treuflach ist. Sei $h \in H(k)$ ein beliebiger Punkt, und $u \in U(k)$. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h^{-1}u"] & G \arrow[d, "f(h^{-1}u)"] \\ H \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

in dem $f(h^{-1}u)$ und $h^{-1}u$ Isomorphismen sind, deshalb ist h ein flacher Punkt in Bezug auf f, und f ist daher ein flacher Morphismus.
Sei $g \in G(k)$ ein Punkt. Der Isomorphismus $G \xrightarrow{\cdot g} G$ induziert einen Isomorphismus zwischen V und gV. Weil $V \subseteq G$ dicht ist gilt, dass $V \cap gV \neq \emptyset$. Sei $v' \in V \cap gV$, dann gibt es $v \in V$ sodass $v' = gv \in G$. Weil $U \to V$ treuflach ist, es gibt $u, u' \in U$ sodass $f(u) = v$ und $f(u') = v'$. Dann ist $g = f(u'u^{-1})$ enthalten in $f(H)$, oder anders formuliert: f ist treuflach. □

Corollary 1.10. *Sei $f : H \to G$ eine Abbildung von affine Gruppenschemata. Die Abbildung f ist injektiv genau dann, wenn f eine abgeschlossene Einbettung ist.*

2 ALGEBRAISCHE GRUPPEN (27/04/2016)

Ziel des Vortrags: QUASI-PROJEKTIVITÄT DER ALGEBRAISCHEN GRUPPEN, EINBETTUNG IN EINE ALLGEMEINE LINEARE GRUPPE, KOMMUTATIVE ALGEBRAISCHE GRUPPEN

DETAILS:

- Satz: Jede algebraische Gruppe über einem Körper k ist quasi-projektiv;
- Satz: Jede affine algebraische Gruppe über einem Körper k ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe einer allgemeinen linearen Gruppe;
- Satz: Die Kategorie der kommutativen algebraischen Gruppen ist eine abelsche Kategorie.

Definition 8. Sei k ein Körper, und sei V ein k-Vektorraum. Sei G ein Gruppenschema über k. Eine (Gruppen-)Wirkung (oder eine Darstellung) von G auf V ist ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{GL}(V)$.

Lemma 2.1. *Sei k ein Körper, und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Sei G ein Gruppenschema über k. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Eine Wirkung von G auf V.*

2. *Für jedes k-Schema T und jede Abbildung $f : T \to G$, gibt es einen $\mathcal{O}_T$-linearen Automorphismus: $\phi_f : \mathcal{O}_T \otimes_k V \to \mathcal{O}_T \otimes_k V$ sodass $\phi_f \circ \phi_g = \phi_{f \circ g}$ für jede andere Abbildung $g : T \to G$.*

3. *Ein $\mathcal{O}_G$-linear Automorphismus: $\phi : \mathcal{O}_G \otimes_k V \to \mathcal{O}_G \otimes_k V$ sodass $(p_1^*\phi) \circ (p_2^*\phi) = m^*\phi$, in denen $p_i : G \times_k G \to G$ die beiden Projektionen bezeichnet und $m : G \times_k G \to G$ die Multiplikation von G ist.*

Lemma 2.2. *Wenn $G = \mathrm{Spec}\,(A)$ ein affines Gruppenschema ist, dann ist eine Wirkung von G auf V gleichbedeutend zu den folgenden Daten:*

1. *Eine Abbildung $\rho : V \to V \otimes_k A$.*

2. *Zwei kommutative Diagramme:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & V \otimes_k A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\ V \otimes_k A \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"] & V \otimes_k A \otimes_k A \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, equal] & V \otimes_k A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"] \\ V \arrow[r, equal] & V \end{tikzcd}$$

Lemma 2.3. *Sei $G = \operatorname{Spec}(A)$ ein Gruppenschema, und sei V eine Darstellung von G. Dann ist $V \simeq \varinjlim_{i\in I} V_i$, in denen $V_i \subseteq V$ endlich dimensionale Unterdarstellungen sind.*

Proof. Es reicht, wenn wir zeigen, dass es für jedes Element $v \in V$ eine endlich dimensionale Unterdarstellung $V_i \subseteq V$ gibt, sodass $v \in V_i$. Wir nutzen Lemma 2.2. Sei $\{a_i\}$ eine k-Basis von A. Dann ist $\rho(v) = \sum_i v_i \otimes a_i$, und $v_i = 0$ für fast alle i. Wir schreiben $\Delta(a_i)$ (wobei Δ der zur Multiplikation assoziierte Morphismus ist) als $\sum_i r_{ijk} a_j \otimes a_k$. Wir haben

$$\sum_i \rho(v_i) \otimes a_i = (\rho \otimes \mathrm{id})\rho(v) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\rho(v) = \sum_{i,j,k} v_i \otimes r_{ijk} a_j \otimes a_k$$

Also muss $\rho(v_k)$ gleich $\sum_{ij} v_i \otimes r_{ijk} a_j$ sein. Sei W der Untervektorraum von V, der erzeugt wird von $\{v_i\}$ und v. Dann $\rho(W) \subseteq W \otimes_k A$. □

Theorem 2.4. *Sei $G = \operatorname{Spec}(A)$ ein Gruppenschema über einem Körper k. Dann ist $A = \varinjlim_{i\in I} A_i$, wobei die $A_i \subset A$ Hopf-Algebren von endlichem Typ sind, oder anders formuliert, $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$ für $G_i = \operatorname{Spec}(A_i)$.*

Proof. Es reicht, wenn wir zeigen können, dass jedes Element $a \in A$ in solch einem A_i enthalten ist. Nach Lemma 2.3, gibt es einen Untervektorraum $V \subseteq A$, der eine endliche Unterdarstellung von A ist, sodass $a \in V$. Sei $\{v_i\}$ eine Basis von V. Wir schreiben $\Delta(v_j) = \sum_i v_i \otimes a_{ij}$, dann gilt

$$\sum_i \Delta(v_i) \otimes a_{ij} = \sum_i \sum_k v_k \otimes a_{ki} \otimes a_{ij} = \sum_i v_i \otimes \Delta(a_{ij})$$

also $\Delta(a_{kj}) = \sum_i a_{ki} \otimes a_{ij}$. Damit erfüllt der von $\{v_i, a_{ij}\}$ erzeugte Vektorraum U die Inklusion $\Delta(U) \subseteq U \otimes_k U$. Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \times_k G \arrow[r, "i \times i"] \arrow[d, "m"] & G \times_k G \arrow[r, "S"] & G \times_k G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[rr, "i"] & & G \end{tikzcd}$$

in dem $S : G \times_k G \to G \times_k G$ die Vertauschung $(a,b) \mapsto (b,a)$ bezeichnet. Dann gilt wenn $\Delta(a) = \sum_i b_i \otimes c_i$ ist, dann ist $\Delta(i(a)) = \sum_i i(b_i) \otimes i(c_i)$. Sei L der von U und $i(U)$ erzeugte Untervektorraum von V. Dann gilt $\Delta(L) \subseteq L \otimes_k L$ und $i(L) \subseteq L$. Letztlich sei $A_i := k[L]$. □

Theorem 2.5. *Jedes affine Gruppenschema von endlichem Typ über einen Körper k ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}_{n,k}$.*

Proof. Sei $G = \operatorname{Spec}(A)$ ein solche Gruppenschema. Nach 2.3, gibt es einen endlich erzeugten Unter-Vektorraum $V \subseteq A$, der eine Unter-Darstellung ist, und der alle Erzeuger von A enthält. Sei $\{v_i\}$ eine Basis von V, dann gilt $\Delta(v_j) = \sum_i v_i \otimes a_{ij}$. Nach Definition 8, gibt es eine Abbildung $\phi : G \to \mathrm{GL}_{n,k}$, und nach 2.1 und 2.2 induziert die Abbildung ϕ eine Abbildung

$$\varphi : k[X_{11}, \cdots, X_{nn}]_{\det(X_{ij})} \longrightarrow A \qquad\qquad X_{ij} \mapsto a_{ij}$$

Und da $v_j = (\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(v_j) = \sum \epsilon(v_j) a_{ij}$ folgt das φ surjektiv ist, und damit ist ϕ eine abgeschlossene Einbettung. □

Definition 9. Sei G ein Gruppenschema über einen Körper k. Das Gruppenschema G heißt *algebraische Gruppe* genau dann, wenn G von endlichem Typ ist.

Theorem 2.6. *Sei G ein affines Gruppenschema. Dann lässt sich jede endlichdimensionale Darstellung von G in endlich viele Kopien der regulären Darstellung einbetten.*

Definition 10. Sei S ein Schema, und sei $\mathscr{F} : (\mathrm{Sch}/S) \to (\mathrm{Menge})$ eine Prägarbe. Die Prägarbe heißt Garbe genau dann, wenn für alle fppf-Überdeckungen $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ die folgende Sequenz

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathscr{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} \mathscr{F}(U_i \times_U U_j)$$

exakt ist.

Definition 11. Sei $f : H \to G$ ein injektiver Morphismus von Gruppenschemata über ein Schema S. Ein S-Schema Y heißt der Quotient von f genau dann, wenn die fpqc-Garbe, die zur Prägarbe $T \mapsto G(T)/H(T)$ assoziiert ist, durch Y dargestellt wird. Wir bezeichnen dann Y mit G/H.

Theorem 2.7. *Sei S ein noethersches Schema, und sei G ein flaches Gruppenschema vom endlichen Typ über S. Sei $H \subseteq G$ ein abgeschlossenes Untergruppenschema, das flach über S ist. Wenn eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist, dann existiert G/H als Schema:*

1. $\dim(S) \leq 1$;
2. *G ist quasi-projektiv über S und H ist eigentlich über S;*
3. *H ist endlich lokal frei über S und jede Faser $H_s \subseteq G_s$ ist in einer offenen Menge von G enthalten.*

Wenn H eine normale Untergruppe ist, dann ist G/H ein Gruppenschema.

Theorem 2.8. *Die Kategorie der abelschen algebraischen Gruppen ist eine abelsche Kategorie.*

3 Zusammenhangskomponenten und endliche étale Gruppenschemata (04/05/2016)

Ziel des Vortrags: zusammenhängende-étale Sequenz einer algebraischen Gruppe

Details:

- Zusammenhangskomponenten einer algebraische Gruppe;
- Sei k ein fixierter Körper, G_k seine absolute Galoisgruppe. Es gibt eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der endlichen étale Gruppenschemata über k und der Kategorie der Gruppen mit einer stetigen Galoiswirkung;
- Die zusammenhängende étale Sequenz einer algebraischen Gruppe.

Lemma 3.1. *Sei X ein lokal noethersches Schema. Dann gilt, dass jede Zusammenhangskomponente von X abgeschlossen und offen ist.*

Proof. Jede Zusammenhangskomponente eines topologischen Raums ist abgeschlossen weil der Abschluss einer zusammenhängenden Teilmenge eines topologischen Raums zusammenhängend ist. Eine Zusammenhangskomponente ist auch offen: Sei $x \in X$ ein Punkt. Sei $U = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Unterschema das x enthält. Wenn U nicht zusammenhängend ist, dann gibt es eine abgeschlossene offene Teilmenge $U_1 \subset U$ in der x enthalten ist. Wenn U_1 nicht zusammenhängend ist, dann gibt es eine abgeschlossene und offene Teilmenge U_2 von U_1. Machen wir so weiter, bekommen wir eine Kette $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$. Weil X lokal noethersch ist, ist U_n zusammenhängend für genügend großes n. Deswegen gibt es eine offene Umgebung von x, die in der Zusammenhangskomponente von x enthalten ist. Damit ist die Zusammenhangskomponente offen. □

Lemma 3.2. *Sei X ein lokal noethersches Schema. Ein Punkt $x \in X$ ist generisch wenn es keinen anderen Punkt $y \in X$ gibt sodass $x \in \overline{\{y\}}$. Sei S die Menge aller generischen Punkte von X. Dann gilt $X = \bigcup_{x \in S} \overline{\{x\}}$.*

Proof. Klar. □

Lemma 3.3. *Sei X ein Schema lokal von endlichem Typ über einen Körper k. Sei k' eine reininseparable Erweiterung von k. Wenn X zusammenhängend ist und einen k'-Punkt besitzt, dann ist X geometrisch zusammenhängend.*

Proof. Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $f : \bar{X} := X \times_k \bar{k} \to X$ abgeschlossen und offen ist. Eine Teilmenge Y von X ist abgeschlossen (resp. offen) genau dann, wenn es eine (Zariski) Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X gibt, sodass die Mengen $Y \bigcap U_i$ abgeschlossen (resp. offen) in U_i sind. Deswegen können wir anmehmen, dass $X = \operatorname{Spec}(k[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_m))$ affin ist. In diesem Fall ist es klar dass f abgeschlossen und offen ist.
Wäre $\bar{X}$ nicht zusammenhängend, dann gibt es eine Zerlegung $\bar{X} = X_1 \coprod X_2$, in der X_1 und X_2 nicht leer sind. Weil X zusammenhängend ist, $f(X_1) = f(X_2) = X$. Aber der k'-Punkt hat nur ein Urbild in $\bar{X}$. □

Lemma 3.4. *Sei G ein Gruppenschema lokal von endlichem Typ über einem Körper k. Wir bezeichnen mit G^0 die Zusammenhängskomponente von G. Das Schema G^0 ist ein abgeschlossenes offenes Unterschema von G. Außerdem ist G^0 ein geometrisch irreduzibles Untergruppenschema von G, und $G^0 \times_k K = (G \times_k K)^0$ für alle Körpererweiterungen.*

Proof. Es ist klar, dass G^0 ein Untergruppenschema ist. Es reicht, wenn man die Behauptung fÃijr den Fall zeigt, dass G reduziert ist. In diesem Fall ist G ein glattes Schema, und G^0 auch. Nach Lemma 3.2 gilt $G^0 = \bigcup_{x \text{ generisch in } G^0} \overline{\{x\}}$. Für zwei unterschiedliche generische Punkte $x, y \in G^0$, $\overline{\{x\}} \bigcap \overline{\{y\}} = \emptyset$. Deswegen gilt sogar $G^0 = \coprod_{x \text{ generisch in } G^0} \overline{\{x\}}$. Aber G^0 ist zusammenhängend, also muss G^0 irreduzibel sein. Die letzte Gleichheit folgt aus dem Fakt dass G^0 geometrisch zusammenhängend, abgeschlossen und offen ist, also muss $G^0 \times_k K$ auch eine Zusammenhängskomponente von $G \times_k K$ sein. □

Definition 12. Sei G ein Gruppenschema über ein Schema S. Sei X ein S-Schema. Eine Wirkung von G auf X ist eine S-Abbildung $\rho : X \times_S G \to X$ sodass die folgenden Diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \times_S G \times_S G \arrow[r, "\rho \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times m"] & X \times_S G \arrow[d, "\rho"] \\
X \times_S G \arrow[r, "\rho"] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, equal] & X \times_S S \arrow[d, "\mathrm{id} \times e"] \\
X & X \times_S G \arrow[l, "\rho"]
\end{tikzcd}$$

kommutativ sind.

Theorem 3.5. *Sei k ein Körper. Sei $\bar{k}$ sein separabler Abschluss. Die Galoisgruppe* Gal_k *kann als ein Gruppenschema über k betrachtet werden. Sei $\mathscr{C}$ eine Unterkategorie von* (Sch/k). *Sei $\mathscr{D}$ die Kategorie der Schemata Y über $\bar{k}$ mit einer Wirkung von* Gal_k, *sodass die Abbildung $Y \to \bar{k}$* Gal_k*-äquivariant ist. Dann ist der Funktor $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $X \mapsto X \times_k \bar{k}$ volltreu. Ausserdem gilt wenn $\mathscr{C}$ die Unterkategorie der affinen Schemata über k oder der étale Schemata über k ist, dann ist der Funktor eine Äquivalenz.*

Example 3.6. Sei $\mathrm{Ét}_{/\bar{k}}$ die Kategorie der étale Schemata über $\bar{k}$. Ein Schema $X \in \mathrm{Ét}_{/\bar{k}}$ mit einer Wirkung von Gal_k ist äquivalent zu einer stetigen Wirkung von $\mathrm{Gal}_k(k)$ auf $X(\bar{k})$, wobei hier "stetig" bedeutet, dass für jeden Punkt $x \in X(\bar{k})$ der Stabilisator von x eine offene Untergruppe von $\mathrm{Gal}_k(k)$ enthält. In diesem Fall, haben wir eine Äquivalenz von Kategorien:

$$\mathrm{Ét}_{/k} \longrightarrow (\text{Menge mit stetiger } \mathrm{Gal}_k(k)\text{-Wirkung})$$

Wenn man die Gruppenobjekte in diesen Kategorien betrachtet, dann hat man eine weitere Äquivalenz:

$$(\text{étale } k\text{-Gruppenschema}) \longrightarrow (\text{Gruppen mit einer stetigen } \mathrm{Gal}_k(k)\text{-Wirkung})$$

Example 3.7. Sei k ein Körper mit Charakteristik p. Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl sodass $p \nmid n$. Dann ist $\mu_{n,k}$ ein étale Schema und die Gruppenwirkung von $Gal_k(k)$ auf $\mu_{n,k}(\bar{k})$ entspricht einer Abbildung $\mathrm{Gal}(k) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Theorem 3.8. *Sei X ein Schema von endlichem Typ über einen Körper k. Dann gibt es ein étale Schema $X_{\text{ét}}$ über k und eine Abbildung $\pi : X \to X_{\text{ét}}$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Für jedes étale Schema über k, ist die folgende Abbildung*

$$\mathrm{Hom}(X_{\text{ét}}, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, Y)$$

ein Isomorphismus. Außerdem sind die Fasern von π die Zusammenhangskomponenten von X.

Proof. Sei S die Menge von Zusammenhangskomponenten von $X\times_k\bar{k}$. Sei $\bar{X}_{\text{ét}} := \coprod_{s\in S}\operatorname{Spec}(\bar{k})$. Es gibt eine Wirkung von $\operatorname{Gal}(k)$ auf S, und daher auf $\bar{X}_{\text{ét}}$. Die Wirkung auf $\bar{X}_{\text{ét}}$ ist stetig. In der Tat, für jede Zusammenhangskomponente $\bar{U}\in S$ gibt es einen abgeschlossenen Punkt x im Bild von $f:\bar{X}\to X$. Damit ist $\kappa(x)$ eine endliche Erweiterung von k, und es gibt $\bar{x}\in\bar{X}$ sodass $f(\bar{x})=x$. Sei $k'\subseteq\kappa(x)$ der separable Abschluss von k in $\kappa(x)$. Sei $x'\in X' := X\times_k k'$ der $\kappa(x)$-Punkt, der das Bild von $\bar{x}$ ist, und sei $U'\subseteq X'$ die Zusammenhangskomponente von $x'\in X'$. Nach 3.3 gilt $U'\times_{\kappa(x)}\bar{k}=\bar{U}$. Aber die offene Untergruppe $\operatorname{Gal}(\kappa(x))\subseteq\operatorname{Gal}(k)$ ist im Stabilisator von $\bar{U}$ enthalten, damit ist der Stabilisator offen, und die Wirkung ist stetig. Nach 3.5 gibt es ein Schema $X_{\text{ét}}$ über k und eine Abbildung $\pi: X\to X_{\text{ét}}$ sodass $\pi\times_k\bar{k}$ die kanonische Projektion $\bar{X}\to\bar{X}_{\text{ét}}$ ist. Die restlichen Aussagen sind in den Übungsaufgaben. □

Theorem 3.9. *Sei G ein Gruppenschema von lokal endlichem Typ über k. Dann ist $G_{\text{ét}}$ auch ein étale Gruppenschema, und es gibt eine kurze exakte Sequenz:*

$$1\to G^0\to G\to G_{\text{ét}}\to 1$$

Wenn G endlich und k perfekt ist, dann zerfällt die kurze exakte Sequenz.

Proof. Klar. □

4 MULTIPLIKATIVE ALGEBRAISCHE GRUPPEN (I) (11/05/2016)

Ziel des Vortrags: DIAGONALISIERBARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN

DETAILS:
- Charaktergruppe einer algebraischen Gruppe;
- Es gibt eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der diagonalisierbaren Gruppen und der Kategorie der kommutativen endlich erzeugten Gruppen;
- Darstellungen von diagonalisierbaren Gruppen;
- Tori.

Definition 13. Sei M eine kommutative Gruppe. Wir bezeichnen mit $k[M]$ die folgende k-Algebra:

$$k[M] := \{\sum_i a_i m_i | a_i\in k, m_i\in M\}$$

in der das Produkt von $\sum_i a_i m_i$ und $\sum_j b_j n_j$ gleich $\sum_{i,j} a_i b_j m_i n_j$ ist. Außerdem ist $k[M]$ eine Hopf-Algebra mit Komultiplikation $\Delta(m)=m\otimes m$, Koeinheit $\epsilon(m)=1$ und Koinversion $i(m)=m^{-1}$ für alle $m\in M$.

Lemma 4.1. *Die Hopf-Algebra $k[M]$ liefert das Gruppenschema $D(M) := \operatorname{Spec}(k[M])$, das den Funktor $T\mapsto \operatorname{Hom}_{\text{grp}}(M,\Gamma(T,\mathscr{O}_T)^*)$ darstellt.*

Proof. Klar. □

Example 4.2.

Wenn $M=\mathbb{Z}$ ist, dann ist $D(M)=\mathbb{G}_m$.

Wenn $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist, dann ist $D(M) = \mu_n$.

Lemma 4.3. *Für zwei kommutative Gruppen M, N, haben wir $D(M \times N) = D(M) \times_k D(N)$.*

Proof. Klar weil $M \times N = M \oplus N$. □

Lemma 4.4. *Sei $M := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$, dann ist $D(M) = \mathbb{G}_m \times_k \mathbb{G}_m \times_k \cdots \times_k \mathbb{G}_m \times_k \mu_{n_1} \times_k \cdots \times_k \mu_{n_r}$.*

Proof. Das ist 4.2 plus 4.3. □

Lemma 4.5. *Sei M eine kommutative Gruppe. Dann ist $M = \{x \in k[M] \setminus \{0\} | \Delta(x) = x \otimes x\}$.*

Proof. Sei $x = \sum_i a_i m_i \in k[M]$, dann ist $\sum_{ij} a_i a_j m_i \otimes m_j = x \otimes x = \Delta(x) = \sum_i a_i m_i \otimes m_i$. Also ist $a_i a_j = 0$ und $a_i^2 = a_i$ für alle $a_i \in k$. Wenn alle $a_i = 0$ sind, dann ist $x = 0$. Ansonsten falls $a_j \neq 0$, dann ist $a_j = 1$ und $a_i = 0$ für $i \neq j$. Damit ist entweder $x \in M$ oder $x = 0$. □

Definition 14. Sei G ein Gruppenschema über einem Körper k. Ein Charakter von G ist ein Gruppenhomomorphismus von $G \to \mathbb{G}_m$. Die Menge $X(G)$, der Charaktere von G, ist eine abelsche Gruppe.

Lemma 4.6. *Es gibt eine Äquivalenz zwischen $X(G)$ und $\{x \in k[G]^* | \Delta(x) = x \otimes_k x\}$.*

Proof. Klar. □

Lemma 4.7. *Sei M eine abelsche Gruppe. Es gibt einen Isomorphisums $M \xrightarrow[\cong]{\phi} X(D(M))$ von Gruppen.*

Proof. Es ist klar, dass ϕ ein Isomorphismus von Mengen ist. Gegeben $f, g \in M$, dann gilt für alle k-Schema T und eine Abbildung $\lambda : T \to D(M)$, dass $(\phi(f) \cdot \phi(g))(\lambda)$ das Produkt der Kompositionen

$$\begin{tikzcd} k[X]_{(X)} \arrow[r, bend left, "\phi(f)^*"] \arrow[r, bend right, "\phi(g)^*"'] & k[M] \arrow[r, "\lambda^*"] & \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \end{tikzcd}$$

ist. Also gilt

$$\begin{aligned} (\phi(f) \cdot \phi(g))(\lambda) &= \phi(f)(\lambda) \cdot \phi(g)(\lambda) \\ &= (\lambda^* \circ \phi(f)^*) \cdot (\lambda^* \circ \phi(g)^*) \\ &= \lambda^*(\phi(f)^* \cdot \phi(g)^*) \\ &= \phi(f \cdot g)(\lambda) \end{aligned}$$

□

Lemma 4.8. *Sei k ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Sei $G := D(M)$ für eine abelsche Gruppe M. Dann gilt*

1. *G ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ M hat nur p-Torsion;*

2. *G ist glatt $\Leftrightarrow$ M hat keine p-Torsion.*

Proof. Klar nach 4.4. $\square$

Definition 15. Ein affines Gruppenschema G heißt *diagonalisierbar* genau dann, wenn $k[G]$, als ein Vektorraum, von der Menge $\{x \in k[G] | \Delta(x) = x \otimes x\}$ erzeugt ist. Weil $x = ((\epsilon, \mathrm{id}_{k[G]}) \circ \Delta)(x) = \epsilon(x)x$, haben wir $\epsilon(x) = 1$ für alle $x \neq 0$.

Lemma 4.9. *Sei G ein affines Gruppenschema über einem Körper k. Dann sind die Elemente der Untermenge $S = \{x \in k[G] | \Delta(x) = x \otimes x\}$ linear unabhängig.*

Proof. Sei $e = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i e_i$, sodass $e, e_i \in S$ sind, und die e_i linear unabhängig sind. Dann haben wir

$$\begin{cases} c_i^2 = c_i \\ c_i c_j = 0 \text{ für } i \neq j \\ \sum_i c_i = \sum_i \epsilon(e_i) c_i = \epsilon(e) = 1 \end{cases}$$

Es gibt ein i, sodass $c_i \neq 0$ und damit $c_i = 1$ und $c_j = 0$ für alle $j \neq i$. $\square$

Lemma 4.10. *Ein Gruppenschema G über k ist diagonalisierbar genau dann, wenn es eine abelsche Gruppe M gibt, sodass $G \cong D(M)$.*

Proof. Sei $M := \{x \in k[G] | \Delta(x) = x \otimes x\}$. Dann gilt $k[M] = k[G]$. $\square$

Theorem 4.11. 1. *Der Funktor $D : M \mapsto D(M)$ liefert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der abelschen Gruppen und der Kategorie der diagonalisierbaren Gruppenschemata;*

2. *Der Funktor D ist exakt;*

3. *Die Kategorie der diagonalisierbaren Gruppenschemata über k ist stabil bezüglich Unterobjekten und Quotientenobjekten in der Kategorie der Gruppenschemata über k.*

Proof. Die Behauptung 1 folgt aus 4.7 und 4.10. Sei $1 \to M' \to M \to M'' \to 1$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Wir müssen beweisen, dass die Sequenz von Gruppenschemata $0 \to D(M'') \to D(M) \to D(M') \to 0$ auch exakt ist. Die Injektivität und Surjektivität sind klar aus der Definition. Es bleibt nur die Exaktheit in der Mitte, die wir beweisen müssen. Sei $I_{M'}$ das Augmentationsideal von $D(M')$. Dann gilt für jedes $x = \sum_i c_i e_i$ aus $I_{M'}$, dass $0 = \epsilon(x) = \sum_i c_i$. Also gilt $x = \sum_i c_i(e_i - 1)$, und $I_{M'}$ ist von $\{m' - 1 | m' \in M'\}$ erzeugt. Andererseits müssen wir beweisen, dass der Kern von $\phi : k[M] \to k[M'']$ auch von $\{m' - 1 | m' \in M'\}$ erzeugt ist. Sei $x = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i e_i \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Es reicht, wenn wir annehmen, dass $\phi(e_1) = \phi(e_2) = \cdots = \phi(e_n) = \phi(e)$. Damit bedeutet $\phi(x) = 0$, dass $\sum_i c_i = 0$. Dann $x = \sum_i c_i e_i = \sum_i c_i e_i - 0 = \sum_i c_i e_i - \sum_i c_i e = \sum_i c_i (e_i - e) = e \sum_i c_i (e_i e^{-1} - 1)$. Aber $e_i e^{-1} \in M'$, also ist $\mathrm{Ker}(\phi) = I_{M'} k[M]$. Damit gilt also $\mathrm{Ker}(D(M) \to D(M')) = \mathrm{Spec}(k[M]/I_{M'}) = \mathrm{Spec}(k[M'']) = D(M'')$. Der Fakt, dass diagonalisierbare Gruppenschemata stabil bezüglich Untergruppen sind, folgt aus der Definition. Sei $f : D(M) \twoheadrightarrow G$ ein surjektiver Morphismus von Gruppenschemata. Dann gibt es eine abelsche Gruppe M', sodass $D(M') = \mathrm{Ker}(f)$. Dann ist $G = D(M/M')$ diagonalisierbar. $\square$

Definition 16. Sei G ein Gruppenschema, und sei V eine Darstellung von G auf einem k-Vektorraum. Die Darstellung V heißt diagonalisierbar genau dann, wenn sie eine Summe von 1-dimensionalen Darstellungen ist.

Definition 17. Sei V ein k-Vektorraum. Es gibt immer (ohne die Auswahl einer Basis von V) eine Einbettung $\mathbb{G}_m \subset \mathrm{GL}_n(V)$. Sei V eine Darstellung von G, und sei $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ ein Charakter. Die Darstellung V heißt *eine Darstellung durch* χ genau dann, wenn die Abbildung $G \to \mathrm{GL}_n(V)$ durch χ faktorisiert.

Lemma 4.12. *Sei V eine Darstellung von einem Gruppenschema G, und sei $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ ein Charakter. Der Untervektorraum $V_\chi := \{x \in V | \rho(v) = v \otimes a_\chi\}$, in dem $a_\chi \in k[G]$ das Element ist, das zu χ korrespondiert, ist eine Unter-Darstellung von V und er ist die maximale Unterdarstellung von V, die durch χ faktorisiert.*

Proof. Es ist klar, dass V_χ eine Unter-Darstellung von V ist. Weil $V_\chi \xrightarrow{\rho|_{V_\chi}} V_\chi \otimes_k k[G]$ durch

$$\begin{array}{ccc} V_\chi & \to & V_\chi \otimes_k k[X]_{(X)} \\ a & \mapsto & a \otimes_k X \end{array}$$

faktorisiert, ist V_χ eine Darstellung durch χ. Nun ist klar, dass V_χ die maximale Unterdarstellung von V ist, die durch χ faktorisiert. □

Theorem 4.13. *Sei G ein diagonalisierbares Gruppenschema über k. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *G ist diagonalisierbar;*
2. *Jede endlich dimensionale Darstellung von G ist diagonalisierbar;*
3. *Jede Darstellung von G ist diagonalisierbar;*
4. *Für jede Darstellung V von G, gilt $V = \oplus_{\chi \in X(G)} V_\chi$.*

Proof. 1 " $\Leftrightarrow$ " 3: Sei G diagonalisierbar. Dann gilt fÃijr jedes Element $v \in V$, dass $\rho(v) = \sum_{1 \le i \le n} u_i \otimes_k e_i$ mit $e_i \in \{x \in k[G] | \Delta(x) = x \otimes x\}$ und $u_i \in V$. Also gilt $\sum_i \rho(u_i) \otimes_k e_i = \sum_i u_i \otimes_k e_i \otimes_k e_i$. Damit gilt $\rho(u_i) = u_i \otimes_k e_i$, und $\langle u_i \rangle$ ist eine 1-dimensionale Darstellung von G. Anderseits ist $v = \sum_i u_i \epsilon(e_i) = \sum_i u_i$. Deshalb ist V eine Summe von 1-dimensionale Unterdarstellungen.
Nun nehmen wir an, dass die Reguläre Darstellung eine Summe von 1-dimensionale Unterdarstellungen ist. Sei $f \in k[G]$ sodass $\langle f \rangle$ eine 1-dimensionale Unterdarstellungen von V ist. Dann gilt $\Delta(f) = f \otimes a$, wobei $a \in \{x \in k[G] | \Delta(x) = x \otimes x\}$. Also gilt $f = (\epsilon \times \mathrm{id}) \circ \Delta(f) = \epsilon(f) a$. Deshalb ist $k[G]$ erzeugt von $\{x \in k[G] | \Delta(x) = x \otimes x\}$.
2 $\Leftrightarrow$ 3 folgt von 2.3.
4 $\Leftrightarrow$ 3 Weil jede 1-dimensionale Darstellung von folgender Art ist: $\langle f \rangle \to \langle f \rangle \otimes_k k[G]$, $f \mapsto f \otimes_k a_{\langle f \rangle}$, wobei $a_{\langle f \rangle} \in \{x \in k[G] | \Delta(x) = x \otimes x\}$, ist die 1-dimensionale Darstellung durch den Charakter, der $a_{\langle f \rangle}$ entspricht, gegeben. Für eine andere 1-dimensionale Darstellung $\langle g \rangle$, ist nun klar, dass wenn $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ dann $a_{\langle f \rangle} = a_{\langle g \rangle}$. Also ist 4 $\Leftrightarrow$ 3 nun klar. □

5 MULTIPLIKATIVE ALGEBRAISCHE GRUPPEN (II) (18/05/2016)

Ziel des Vortrags: MULTIPLIKATIVE ALGEBRAISCHE GRUPPEN

DETAILS:

- Der Charakterfunktor liefert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der multiplikativen algebraischen Gruppen/k und der Kategorie der kommutativen endlich erzeugte Gruppen ausgerüstet mit einer stetigen Galoiswirkung;
- Darstellung der multiplikativen Gruppen;
- Ein Kriterium für MultiplikativitÃd't einer algebraischen Gruppe.

Theorem 5.1. *Sei S ein Schema, und sei M eine abelsche Gruppe. Dann gibt es eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der quasi-kohärenten Garben mit einer $\mathscr{O}_S[M]$-Wirkung und der Kategorie der M-Graduierten quasi-kohärenten Garben.*

Proof. Gegeben sei eine quasi-Kohärente Garbe $\mathscr{A}$ mit einer $\mathscr{O}_S[M]$-Wirkung: $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_S[M]$. Für alle $m \in M$ sei $\mathscr{A}_m := \rho^{-1}(\mathscr{A} \times_{\mathscr{O}} \mathscr{O}[m])$, wobei mit $\mathscr{O}[m]$ der $\mathscr{O}$-Untermodul von $\mathscr{O}[M]$ erzeugt von m gemeint ist. Dann gilt $\mathscr{A} = \bigoplus_{m\in M} \mathscr{A}_m$. Sei nun ein M-Graduierter quasi-kohärenter Modul $\mathscr{A} = \bigoplus_{m\in M} \mathscr{A}_m$ gegeben, dann bekommt man eine quasikohärente Garbe $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{A} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_S[M]$ durch die Abbildung $\mathscr{A}_m \to \mathscr{A}_m \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_S[M]$, $a \mapsto a \otimes m$. □

Corollary 5.2. *Sei G eine multiplikative Gruppe über einen Körper k, und V eine Darstellung von G. Dann gilt $V = \bigoplus_{\chi \in X^*(G)} V_\chi$.*

Proof. Folgt aus dem Beweis von Satz 5.1. □

Definition 18. Ein Gruppenschema G über einen Körper k heißt multiplikativ genau dann, wenn $G \times_k k^s$ diagonalisierbar ist.

Theorem 5.3. *(Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory by A.Vistoli, Chapter IV, 4.4.1) Sei k ein Körper, und sei k^s sein separabler Abschluss. Sei $\mathscr{C}$ die Kategorie der affinen Schemata (resp. Vektorräume) über k, und sei $\mathscr{D}$ die Kategorie der affinen Schemata Y (resp. Vektorräume V) über k^s mit einer Wirkung von* Gal_k, *sodass die Abbildung $Y \to k^s$* Gal_k*-äquivariant ist (resp. sodass V eine k-Darstellung von* Gal_k *wird). Dann ist der Funktor $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $Y \to Y \times_k k^s$ (resp. $V \to V \otimes_k k^s$) eine Äquivalenz.*

Remark 5.4. Wir wissen schon, dass eine Wirkung von Gal_k auf ein étale Schema X über k^s äquivalent zu einer stetigen Wirkung von $\mathrm{Gal}(k)$ auf $X(k^s)$ ist. Das Gleiche gilt für die Wirkung von Gal_k auf einen Vektorraum. Gegeben sei eine Darstellung von Gal_k auf V, die Gruppe $\mathrm{Gal}(k) = \mathrm{Gal}_k(k)$ wirkt auf V als eine abstrakte Gruppe. Die Wirkung ist stetig: In der Tat kann man annehmen, dass V endlich dimensional ist, weil $V = \varinjlim_{i\in I} V_i$, wobei hier V_i die endlichen Unterdarstellungen von V sind. Dann gibt es einen endlichen Quotient $\mathrm{Gal}_k \twoheadrightarrow G$, durch den die Wirkung von Gal_k auf V faktorisiert. Also muss die Wirkung von Gal_k stetig sein. Umgekehrt sei eine stetige Wirkung von $\mathrm{Gal}(k)$ auf V gegeben. Sei $V = \varinjlim_{i\in I} V_i$ wobei die V_i endlich dimensionale Unterdarstellungen sind. Dann gibt es einen Quotient $\mathrm{Gal}(k) \twoheadrightarrow G_i$ und einen Morphismus $\rho_i : V_i \times G_i \to V$. Weil G_i endlich ist, gibt es eine Abbildung $k[G_i] \hookrightarrow k[\mathrm{Gal}_k]$, welche $\mathrm{Gal}(k) \twoheadrightarrow G_i$ entspricht. Durch die ρ_i bekommen wir eine

Abbildung $V_i \otimes_k k[G_i] \to V_i \otimes_k k[\mathrm{Gal}_k] \to V$, und diese liefert eine Abbildung $V \otimes_k k[\mathrm{Gal}_k] \to V$ durch der Gleichung $V = \varinjlim_{i \in I} V_i$.

Definition 19. Sei G ein Gruppenschema über k. Dann gibt es einen Gruppenfunktor $X_G : T/k \mapsto \mathrm{Hom}_{T\text{-grp.sch}}(G \times_k T, \mathbb{G}_{m,T})$. Insbesondere IST $X_G(k^s)$ eine abelsche Gruppe mit einer stetigen Galoiswirkung. *Wie sieht diese Wirkung aus?* Sei $x \in \mathrm{Hom}_{k^s\text{-grp.sch}}(G \times_k k^s, \mathbb{G}_{m,k^s})$ ein Element und sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(k)$, dann ist $\sigma(x) \in \mathrm{Hom}_{k^s\text{-grp.sch}}(G \times_k k^s, \mathbb{G}_{m,k^s})$ der Basiswechsel von x durch σ. *Warum ist sie stetig?* Weil $\mathbb{G}_{m,k^s}$ von endlichem Typ ist, gibt es für jedes Element $x \in \mathrm{Hom}_{k^s\text{-grp.sch}}(G \times_k k^s, \mathbb{G}_{m,k^s})$ eine endliche separable Erweiterung K/k und einen Morphismus $y \in \mathrm{Hom}_{K\text{-grp.sch}}(G \times_k K, \mathbb{G}_{m,K})$, sodass $x = y \otimes_K k^s$ ist. Also enthält der Stabilisator von x die offene Untergruppe $\mathrm{Gal}_K \subseteq \mathrm{Gal}_k$. Damit haben wir einen Funktor von der Kategorie der multiplikativen Gruppen in die Kategorie der abelschen Gruppen mit einer stetigen Galoiswirkung gegeben durch $G \mapsto X_G(k^s)$.

Theorem 5.5. *Der Funktor von der Kategorie der multiplikativen Gruppenschema über k in die Kategorie der abelschen Gruppen mit einer stetigen Galoiswirkung liefert eine Äquivalenz der Kategorien. Darüber hinaus ist der Funktor exakt.*

Proof. Die Kategorie der diagonalisierbaren Gruppen ist äquivalent zur Kategorie der kommutativen abstrakten Gruppen. Also ist die Kategorie der diagonalisierbaren Gruppen mit einer Gal_k-Wirkung äquivalent zur Kategorie der kommutativen abstrakten Gruppen mit einer stetigen $\mathrm{Gal}(k)$-Wirkung, und daher die Aussage. Die Exaktheit folgt aus 4.11. □

Example 5.6. Sei k ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Wann ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_k$ eine multiplikative Gruppe? Es ist eine multiplikative Gruppe genau dann, wenn $p \nmid n$.

6 Unipotente Gruppen (I) (25/05/2016)

Ziel des Vortrags: Klassifikation der Unipotenten Gruppen

Details: Sei G eine affine algebraische Gruppe über k. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- Die einzige irreduzible Darstellung von G ist die triviale eindimensionale Darstellung;
- Es gibt eine Einbettung von G in die Untergruppe $\mathbb{U}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$, deren Elemente obere Dreiecksmatrizen sind mit Einsen auf der Diagonale;
- Es gibt eine Kompositionsreihe von $G \times_k \bar{k}$, bei der jeder aufeinanderfolgende Quotient isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbb{G}_{a,\bar{k}}$ ist.

Definition 20. Eine affine algebraische Gruppe heißt *unipotent* genau dann, wenn jede Darstellung von G auf einen von Null verschiedenen Vektorraum einen von Null verschiedenen Fixvektor besitzt.

Definition 21. Eine Hopf-Algebra A heißt kozusammenhängend genau dann, wenn es eine Filtrierung der Vektorräume

$$C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \cdots \subseteq A$$

gibt, sodass

$$\begin{cases} C_0 = k \\ \bigcup_{r\geq 0} C_r = A \\ \Delta(C_r) \subseteq \sum_{i=0}^r C_i \otimes C_{r-i} \end{cases}$$

Theorem 6.1. *Sei G eine affine algebraische Gruppe über k. Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *G ist unipotent;*
2. *Jede einfache Darstellung von G ist trivial;*
3. *Jede Darstellung von G faktorisiert durch $\mathbb{U}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ nach Wahl einer Basis;*
4. *G ist eine Untergruppe von $\mathbb{U}_n$;*
5. *$k[G]$ ist kozusammenhängend;*
6. *Es gibt eine treue Darstellung V von G, und eine Filtration*

$$V = V_m \supseteq \cdots \supseteq V_1 \supseteq V_0 = 0$$

sodass V_i Unterdarstellung von G sind, und V_{i+1}/V_i eine triviale Darstellung von G hat.

7. *Es gibt eine zentrale Normalreihe*

$$\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

sodass G_{i+1}/G_i eine Untergruppe von $\mathbb{G}_a$ ist.

8. *Jede Untergruppe von G hat eine nicht triviale Abbildung nach $\mathbb{G}_a$.*

Proof. $1 \Leftrightarrow 2$ Klar. $1 \Rightarrow 3$ Sei V eine Darstellung von G der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Wenn $n = 0, 1$ ist alles klar. Wenn $n > 1$, haben wir ein nicht Null Element $v_1 \in V$, sodass die Wirkung von G auf v_1 trivial ist. Dann gibt es nach Induktionshypothese $u_2, u_3, \cdots, u_n$, sodass die Darstellung von G auf $V/\langle v_1\rangle$ durch $\mathbb{U}_{n-1} \subseteq \mathrm{GL}_{n-1}$ faktorisiert. Seien $v_2, v_3, \cdots, v_n$ Hochhebungen von $\{u_i\}$. Dann ist $v_1, \cdots, v_n$ eine Basis, mit der die Darstellung von G durch $\mathbb{U}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ faktorisiert. $3 \Rightarrow 1$ Sei $e_1, \cdots, e_n$ die Basis. Dann ist e_1 ein nicht Null Vektor, auf den G trivial wirkt. $3 \Rightarrow 4$ Nach 2.4 gibt es eine Einbettung $G \subseteq \mathrm{GL}_{n,V}$. Weil es eine Basis von V gibt, sodass $G \subseteq \mathrm{GL}_{n,V}$ durch $\mathbb{U}_n \subseteq \mathrm{GL}_{n,V}$ faktorisiert, ist in dieser Basis G eine Untergruppe von $\mathbb{U}_n$.

$4 \Rightarrow 5$ Es reicht wenn wir $G = \mathbb{U}_n$ annehmen. In diesem Fall gilt $k[G] = k[X_{ij}]_{1\leq i<j\leq n}$ und

$$\Delta(X_{ij}) = X_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes X_{ij} + \sum_{i<l<j} X_{il} \otimes X_{lj}$$

Sei $j - i$ das Gewicht für X_{ij}. Dann hat ein Monom $\prod X_{ij}^{n_{ij}}$ das Gewicht $\sum n_{ij}(j-i)$. Sei C_r der k-Vektorraum erzeugt von den Monomen mit einem Gewicht $\leq r$. Es ist klar, dass $C_0 = k$ und $\bigcup_{r\geq 0} C_r = k[G]$. Wir müssen noch zeigen, dass das letzte Axiom erfüllt ist. Es reicht, wenn wir zeigen, dass jedes Monom das Axiom erfüllt. Sei P (resp. Q) Monom des Gewichts r (resp. s). Dann gilt nach Induktionhypothese und wegen $\Delta(PQ) = \Delta(P)\Delta(Q)$, dass $\Delta(P)\Delta(Q)$ enthalten ist in

$$(\sum_i C_i \otimes C_{r-i})(\sum_j C_j \otimes C_{s-j}) \subseteq \sum_{i,j}(C_i C_j \otimes C_{r-i}C_{s-j}) \subseteq \sum_{i,j} C_{i+j} \otimes C_{r+s-i-j}$$

5 $\Rightarrow$ 1 Sei V eine Darstellung von G, und sei $A := k[G]$, sowie $\rho : V \to V \otimes_k A$ die Wirkung. Sei $V_r := \{v \in V | \rho(v) \in V \otimes C_r\}$. Ist v ein von Null verschiedener Vektor, in V_0 enthalten, dann gilt $\rho(v) = v' \otimes 1$. Also ist $v = (\mathrm{id}, e) \circ \rho(v) = v'$ ein Fixvektor. Es reicht wenn wir zeigen können, dass

$$V_r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_{r+1} = 0$$

damit gilt dann $V_0 = 0 \Rightarrow V = 0$. Weil $((\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho)(V_{r+1}) \subseteq V \otimes \rho(C_{r+1}) \subseteq V \otimes \sum_i C_i \otimes C_{r+1-i}$, ist das Bild von V_{r+1} gleich 0 in $V \otimes A/C_r \otimes A/C_r$. Falls $V_r = 0$ ist, dann ist $V \to V \otimes A/C_r$ injektiv, und $(\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho : V \to V \otimes A/C_r \otimes A/C_r$ ist damit auch injektiv. Also ist $V_{r+1} = 0$.

6 $\Leftrightarrow$ 4 Wenn G eine Untergruppe von $\mathbb{U}_n$ ist, ist die Darstellung $G \subseteq \mathbb{U}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ eine Darstellung von G auf $k^{\oplus n}$ und die kanonische Filtrierung $0 \subseteq k \subseteq k^{\oplus 2} \subseteq \cdots \subseteq k^{\oplus n}$ liefert die gewünschte Filtrierung. Umgekehrt, seien eine Darstellung V von G und eine Filtrierung gegeben, man kann eine Basis $\langle e_1, e_2, \cdots, e_i\rangle$ für jeden Vektorraum V_i auswählen, sodass $\langle e_1, e_2, \cdots, e_i, e_{i+1}\rangle$ eine Basis für V_{i+1} ist. In diesem Fall, faktorisiert die Darstellung $G \to \mathrm{GL}_n$ durch $\mathbb{U}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$.

4 $\Rightarrow$ 7 Es reicht, wenn wir zeigen können, dass die zentrale Normalreiche für $\mathbb{U}_n$ existiert. In diesem Fall, haben wir eine kanonische zentrale Normalreihe mit Quotienten die direkte Summen von $\mathbb{G}_a$'s sind. 7 $\Rightarrow$ 4 Wir brauchen nur noch das folgende Lemma:

Lemma 6.2. *Alle Untergruppen und Quotientgruppen sowie alle Erweiterungen von unipotenten Gruppen sind unipotent.*

Proof. Für Untergruppen nutzt man 4 and für Quotientgruppen nutzt man 1. Für eine Erweiterung, nehmen wir jetzt an, dass $N \subseteq G$ eine normale unipotente Untergruppe von G ist, sodass G/N eine unipotente Gruppe ist. Wir müssen zeigen, dass G unipotent ist. Sei V eine von Null verschiedene Darstellung von G. Dann ist V^N eine Unterdarstellung von G und auch von G/N. Weil N unipotent ist, gilt $V^N \neq 0$, damit $V^G = (V^N)^G = (V^N)^{G/N} \neq 0$. $\square$

7 $\Rightarrow$ 8 Ist klar nach obigen Lemma. 8 $\Rightarrow$ 7 Sei $\phi_0 : G \to \mathbb{G}_a$ eine nicht triviale Abbildung. Sei $G_0 := G$ und $G_1 := \mathrm{Ker}(\phi_0)$. Nun sei $\phi_1 : G_1 \to \mathbb{G}_a$ eine nicht triviale Abbildung, und sei $G_2 := \mathrm{Ker}(\phi_1)$, und so weiter. Damit bekommen wir die Filtrierung weil G noethersch ist. $\square$

Lemma 6.3. *Sei K/k eine Körpererweiterung. Ein Gruppenschema G über k ist unipotent genau dann, wenn $G \times_k K$ unipotent über K ist.*

Proof. Für $\Rightarrow$ siehe Übungsaufgaben. Für $\Leftarrow$ nutzt man 1: Sei V eine von Null verschiedene Darstellung von G. Es ist klar, dass $V^G \otimes_k K = (V \otimes_k K)^{G \times_k K}$ und damit $V^G = 0 \Leftrightarrow (V \otimes_k K)^{G \times_k K} = 0$. $\square$

Lemma 6.4. *Sei G eine algebraische Gruppe, die sowohl unipotent als auch multiplikativ ist. Dann gilt $G = \{1\}$.*

Proof. Sei V eine Darstellung von G. Dann ist V eine direkte Summe von einfachen Unterdarstellungen. Aber alle einfach Darstellungen von G sind trivial. Also ist V eine triviale Darstellung. Die Gruppe G ist daher trivial. □

Lemma 6.5. *Jede Abbildung von einer unipotenten (resp. multiplikativen) Gruppe in eine multiplikativen (resp. unipotenten) Gruppe ist trivial.*

Proof. Klar nach 6.4. □

Lemma 6.6. *Sei G ein endliches étale Gruppenschema über k, und k ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Dann ist G unipotent genau dann, wenn $\#|G| = p^n$.*

Proof. Wir können annehmen, dass $k = \bar{k}$. Dann ist G eine abstrakte Gruppe. Wenn $\#|G| \neq p^n$, dann gibt es nach Cauchy's theorem ein Element $g \in G$ dessen Ordnung gleich $p' \neq p$ ist. Dann ist $\langle g \rangle = \mu_{p',k}$ eine Gruppe von multiplikativem Typ. So nach 6.4 kann G nicht unipotent sein. Umgekehrt, wenn G eine nicht triviale ($\neq 0$ or $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) p-Gruppe ist, gibt es eine nicht triviale normale Untergruppe $H \subseteq G$ (Hungerford). Also reicht es, wenn wir zeigen können, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ unipotent ist. Aber es ist wahr: Es gibt eine Einbettung $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathbb{F}_p} \subseteq \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}$ durch die Gleichung $\mathbb{F}_p = \mathbb{G}_{a,\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p)$. Nach Basiswechsel von $\mathbb{F}_p$ nach k bekommen wir eine Einbettung $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k \subseteq \mathbb{G}_{a,k}$. Damit ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ unipotent. □

Corollary 6.7. *Sei G eine unipotente Gruppe über einem Körper k der Charakteristik $p \geq 0$. Dann ist $G_{\text{ét}}$ von Ordnung p^n. Wenn $p = 0$, dann ist G zusammenhängend.*

Proof. Klar. □

7 Unipotente Gruppen (II) (01/06/2016)

Ziel des Vortrags: Unipotente Gruppen im Fall von Charakteristik Null und Charakteristik $p > 0$

Details:

- Lie-Algebra einer algebraischen Gruppe;
- Klassifikation der unipotenten Gruppen der Charakteristik 0 durch Lie-Algebren;
- Klassifikation der unipotenten Gruppen der Charakteristik $p > 0$.

Definition 22. Sei $\mathscr{P}$ eine Eigenschaft eines Gruppenschemas. Wir nehmen die folgenden Hypothesen an.

1. Jeder Quotient eines Gruppenschema das die Eigenschaft $\mathscr{P}$ hat, hat die Eigenschaft $\mathscr{P}$;

2. Jede Erweiterung von Gruppenschemata die die Eigenschaft $\mathscr{P}$ haben, hat die Eigenschaft $\mathscr{P}$.

Lemma 7.1. *Seien H, N zwei affine Untergruppen eines affinen Gruppenschemas G, und sei $N \subseteq G$ normal. Wenn sowohl H als auch N die Eigenschaft $\mathscr{P}$ hat, dann hat HN auch die Eigenschaft $\mathscr{P}$.*

Proof. Die Gruppe HN ist der Pullback des Quotients $G \to G/N$ entlang dem Bild der Abbildung $H \subseteq G \twoheadrightarrow G/N$. Also ist HN eine Untergruppenschema von G. Wir haben

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & HN \arrow[r] & HN/N \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H\bigcap N \arrow[r] & H \arrow[r] & H/(H\bigcap N) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & 0 \end{tikzcd}$$

Also hat HN die Eigenschaft $\mathscr{P}$. □

Lemma 7.2. *Sei G ein affines Gruppenschema über k. Dann hat G höchstens ein maximal normales affines Untergruppenschema, dass die Eigenschaft $\mathscr{P}$ hat.*

Proof. Klar nach 7.1. □

Remark 7.3. Endlichkeit eines Gruppenschemas erfüllt 22. Aber es gibt kein maximal endliches Untergruppenschema von $\mathbb{G}_a$ oder $\mathbb{G}_m$.

Definition 23. Ein Gruppenschema G heißt stark zusammenhängend genau denn, wenn jeder endliche Quotient von G trivial ist.

Example 7.4. Wenn G ein glattes zusammenhängendes Gruppenschema über k ist, dann ist G stark zusammenhängend.

Lemma 7.5. *Die Eigenschaft* stark zusammenhängend *erfüllt 22. Außerdem gilt, wenn G eine stark zusammenhängende affine algebraische Gruppe über k ist, dann ist jede abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ entweder G selbst oder eine Gruppe mit* $\dim H < \dim G$.

Proof. Die erste Aussage ist klar. Für die zweite Aussage: Der Fakt, dass G stark zusammenhängend ist, impliziert das G zusammenhängend, und daher irreduzibel ist. Wenn $\dim H = \dim G$ kÃűnnen wir davon ausgehen, dass $|H| = |G|$. Also ist G/H ein affines Gruppenschema von endlichem Typ sodass $|G/H|$ eine einelementige Menge ist. Also ist G/H ein endliches Gruppenschema und ist daher trivial, d.h. $G = H$. □

Proposition 7.6. *Es gibt ein einzigartiges maximales stark zusammenhängendes normales affines Untergruppenschema von einer affinen algebraischen Gruppe G.*

Proof. Sei $H_0 \subseteq G$ eine solche, nicht notwendigerweise maximale, Untergruppe. Wenn H_0 nicht die maximale Untergruppe ist, gibt es H_1 und so weiter. Weil die Dimension von G begrenzt ist, gibt es $H_n \subseteq G$ sodass H_n maximal ist. □

Corollary 7.7. *Es gibt ein einzigartiges maximales glattes zusammenhängendes normales affines Untergruppenschema von einer affinen algebraischen Gruppe G.*

Corollary 7.8. *Es gibt ein einzigartiges maximales glattes zusammenhängendes unipotentes normales Untergruppenschema von einer affinen algebraischen Gruppe G. Diese Untergruppe nennt man das unipotente Radikal von G.*

Theorem 7.9. *Sei $G \subsetneq \mathbb{G}_{a,k}$ eine abgeschlossene Untergruppe, wobei k ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$ ist. Dann gilt:*

1. *Es gibt einen Endomorphismus $f_G : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ sodass $G = \mathrm{Ker}(f_G)$;*
2. *$f_G = a \in k^*$ wenn $p = 0$;*
3. *wenn $p > 0$, dann gilt $f_G = a_r F^r + \cdots + a_s F^s$, wobei $s > r \in \mathbb{N}$, $a_r, \cdots, a_s \in k$, $F : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$, $X \mapsto X^p$, und $a_r, a_s \neq 0$;*
4. *$G^0 = \mathrm{Ker}(F^r) = \alpha_{p^r,k}$;*
5. *$G_{\text{ét}} = \mathrm{Ker}(a_r \mathrm{id} + \cdots + a_s F^{s-r})$ und $G_{\text{ét}} \otimes_k k^s = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-r}$;*
6. *G ist zusammenhängend genau dann, wenn $G \subseteq \mathbb{G}_a$ unter der Wirkung von $\mathbb{G}_{m,k}$ auf $\mathbb{G}_{a,k}$ stabil ist.*

Proof. Sei $I \subseteq k[X]$ das Ideal von $G \subseteq \mathbb{G}_a$. Dann ist $I = (P(X))$ ein Hauptideal. Weil $\{e\} \subseteq G \subsetneq \mathbb{G}_a$ ist $0 \subsetneq (P(X)) \subseteq (X)$, d.h. $X | P(X) \neq 0$. Weil $\Delta(I) \subseteq I \otimes k[Y] + k[X] \otimes I$, haben wir

$$P(X+Y) - P(X) - P(Y) = A(X,Y)P(X) + B(X,Y)P(Y)$$

für irgendwelche $A(X,Y), B(X,Y) \in k[X,Y]$. Wir dürfen annehmen, dass der Grad von $A(X,Y)$, als ein Polynom in Y, kleiner als der von $P(Y)$ ist. Dann muss $B(X,Y)$ gleich 0 sein, und damit auch $A(X,Y)$. Als Folge davon haben wir, dass $P(X,Y) = P(X) + P(Y)$. Deswegen ist die Abbildung $k[X] \to k[X]$, $X \mapsto P(X)$ eine Abbildung von Hopf-Algebren. Sei $f_G : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ der induzierte Gruppenhomomorphismus. Es ist klar, dass $\mathrm{Ker}(f_G) = G$.
Wenn $p = 0$, dann muss $P(X) = aX$ für irgendein $a \in k^*$ sein.
Wenn $p > 0$, dann muss $P(X)$ von der Form $a_r X^{p^r} + \cdots + a_s X^{p^s}$ sein. Dann ist $f_G = a_r F^r + \cdots + a_s F^s$.
Betrachten wir nun das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F^r) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Ker}(f_G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F^r) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G}_a \arrow[r, "F^r"] \arrow[d, "f_G"] & \mathbb{G}_a \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbb{G}_a \arrow[r, "="] \arrow[d] & \mathbb{G}_a \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

wobei $g = a_r \mathrm{id} + \cdots + a_s F^{s-r}$. Es ist klar, dass $\mathrm{Ker}(F^r)$ zusammenhängend ist. Weil $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Spec}(k[X]/(a_r X + \cdots + a_s X^{p^{s-r}}))$ und $\frac{\partial g(X)}{\partial X} = a_r \neq 0$, ist $\mathrm{Ker}(g)$ étale über k. Also ist $G^0 = \mathrm{Ker}(F^r)$ und $G_{\text{ét}} = \mathrm{Ker}(g)$. Weil $G_{\text{ét}} \times_k k^s$ eine Untergruppe von $\mathbb{G}_a(k^s)$ ist, ist sie p-Torsion. Also ist $G_{\text{ét}} \times_k k^s = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-r}$.
Wenn G zusammenhängend ist, ist $G = \alpha_{p^n} \subseteq \mathbb{G}_a$ stabil unter der Wirkung von $\mathbb{G}_m$. Umgekehrt wenn, $G(\bar{k})$ als eine Untergruppe von $\bar{k}$ stabil ist unter der Multiplikation von $\bar{k}^*$, dann ist $G(\bar{k}) = 0$, d.h. G ist zusammenhängend. □

Corollary 7.10. *Sei k ein Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Die k-algebra $\mathrm{Hom}_{k-\text{grp.sch}}(\mathbb{G}_{a,k}, \mathbb{G}_{a,k})$ ist k wenn $p = 0$ und $k_\sigma[F]$ wenn $p > 0$, wobei $k_\sigma[F]$ der nicht kommutative Ring mit $Fa = a^p F$ ist.*

Proof. Sei $f \in \mathrm{Hom}_{k-\text{grp.sch}}(\mathbb{G}_{a,k}, \mathbb{G}_{a,k})$ und G das Bild von f. Wenn f nicht surjektiv ist, ist G endlich, und $\mathrm{Ker}(f)$ muss gleich $\mathbb{G}_a$ sein (sonst ist $\mathrm{Ker}(f)$ endlich, also muss $\mathbb{G}_a$ auch endlich sein.). Also ist $G = 0$. Wenn $G = \mathbb{G}_a$ ist, nutzen wir 7.9. □

Corollary 7.11. *Sei k ein perfekter Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Jede Untergruppe von $\mathbb{G}_a$ ist entweder ein Produkt von $\alpha_{p^n,k}$ und ein endliches étale Untergruppenschema der Ordnung p^m oder $\mathbb{G}_a$ selbst.*

Proof. Klar. □

Corollary 7.12. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p \geq 0$. Jede Untergruppe von $\mathbb{G}_a$ ist entweder ein Produkt von $\alpha_{p^n,k}$ und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{G}_a$ selbst.*

Proof. Klar. □

Corollary 7.13. *Sei G ein affines Gruppenschema über einem separabel abgeschlossenem Körper k. Dann ist G unipotent genau dann, wenn es eine zentrale Normalreihe*

$$\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

gibt, sodass G_{i+1}/G_i gleich $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oder $\alpha_{p,k}$ oder $\mathbb{G}_a$ ist.

Proof. Klar. □

8 Trigonalisierbare algebraische Gruppen (08/06/2016)

Ziel des Vortrags: Trigonalisierbare algebraische Gruppen

Details:

- Die Definition einer algebraische Gruppe;
- Unipotentes Radikal einer trigonalisierbaren algebraischen Gruppe;
- Die Struktur einer trigonalisierbaren algebraischen Gruppe.

Definition 24. Sei G ein affines Gruppenschema über einem Körper k. Das Gruppenschema G heißt *trigonalisierbar* wenn jede von Null verschiedene endliche Darstellung von G eine 1-dimensionale Unterdarstellung hat.

Example 8.1. Sei G eine unipotente (resp. diagonalisierbare) Gruppe. Dann ist G trigonalisierbar.

Theorem 8.2. *Sei G ein affines Gruppenschema über einen Körper k. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *G ist trigonalisierbar;*
2. *Es gibt eine normale unipotente Untergruppe $G^u \subseteq G$ sodass $G^m := G/G^u$ diagonalisierbar ist;*
3. *Jeder algebraische affine Quotient von G ist trigonalisierbar;*
4. *Für jede n-dimensionale Darstellung V von G, gibt es eine Filtrierung $V = V_n \supseteq V_{n-1} \cdots V_1 \supseteq V_0 = 0$ durch Unterdarstellungen von V.*
5. *Für jede endliche Darstellung $G \to \mathrm{GL}_n$, gibt es eine Faktorisierung $G \to \mathbb{T}_n$ (nach Wahl einer Basis) durch die Einbettung $\mathbb{T}_n \subseteq \mathrm{GL}_n$.*
6. *Jeder algebraische affine Quotient von G ist isomorph zu einer Untergruppe der Gruppe der Dreiecksmatrizen $\mathbb{T}_n$.*

Proof. $1 \Rightarrow 3$ Klar. $3 \Rightarrow 4$ Man nutzt Induktion über n: Sei $\langle a \rangle$ eine 1-dimensionale Unterdarstellung von V. Dann hat nach Induktionsannahme $V/\langle a \rangle$ eine Filtrierung $V/\langle a \rangle = V_n' \supseteq \cdots \supseteq V_0' = 0$, und damit verschaffen wir uns eine Filtrierung von V. $4 \Rightarrow 5$ Die Basen von $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$ geben uns eine Basis von V, durch die G nach $\mathbb{T}_n$ geht. $5 \Rightarrow 6$ Klar. $6 \Rightarrow 2$ Sei $G = \varprojlim_{i\in I} G_i$, wobei G_i affine algebraische Gruppen sind. Für jedes G_i gibt es eine Einbettung $G_i \subseteq \mathbb{T}_n$, und wir haben auch eine exakte Sequenz

$$1 \to \mathbb{U}_n \to \mathbb{T}_n \to \mathbb{G}_m^n \to 1$$

Sei $G_i^u := G_i \cap \mathbb{U}_n$ und $G_i^m := G_i/G_i^u \subseteq \mathbb{G}_m^n$. Damit haben wir eine exakte Sequenz:

$$0 \to G_i^u \to G_i \to G_i/G_i^u \to 0$$

in der G_i^u unipotent und G_i/G_i^u diagonalisierbar sind. Nun setzen wir $\varprojlim_{i\in I}$ ein. Sei $G^u := \varprojlim_{i\in I} G_i^u$ und $G^m := \varprojlim_{i\in I} G_i^m$. Dann bekommen wir die exakte Sequenz:

$$0 \to G^u \to G \to G^m \to 0$$

die wir brauchen. $2 \Rightarrow 1$ Sei V eine von Null verschiedene endliche Darstellung von G. Weil G^u unipotent ist, ist $V^{G^u} \neq 0$. Weil $G^u \subseteq G$ normal ist, ist V^{G^u} eine Darstellung von G^m. Weil G^m trigonalisierbar ist, gibt es eine 1-dimensionale Unterdarstellung auf V^{G^u} von G^m und somit auch von G. □

Corollary 8.3. *Eine Untergruppe (resp. eine Quotientgruppe) einer trigonalisierbaren Gruppe G ist auch trigonalisierbar.*

Proof. Man nutzt 8.2 (2). □

Theorem 8.4. *Sei G eine affine k-Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *$G \times_k k^s$ ist trigonalisierbar;*

2. *Es gibt eine abgeschlossene normale unipotente Untergruppe $G^u \subseteq G$ sodass G/G^u multiplikativ ist.*

Wenn eine dieser Voraussetzungen (und damit beide) erfüllt ist, dann gilt

1. *G besitzt eine größte unipotente Untergruppe $G^u \subseteq G$;*

2. *G^u ist die eindeutige affine normale unipotente Untergruppe von G sodass G/G^u multiplikativ ist.*

3. *Für alle Erweiterung K/k, haben wir $(G \times_k K)^u = G^u \times_k K$;*

4. *G ist trigonalisierbar genau dann, wenn G/G^u diagonalisierbar ist.*

Proof. $1 \Rightarrow 2$ Klar. $2 \Rightarrow 1$ Wir haben eine exakte Sequenz

$$1 \to (G \times_k k^s)^u \to G \times_k k^s \to (G \times_k k^s)^m \to 1$$

Weil $(G \times_k k^s)^u$ eindeutig ist, ist sie stabil unter der Wirkung von $\mathrm{Gal}(k^s/k)$. Es gibt daher eine Untergruppe $G^u \subseteq G$ sodass $G^u \times_k k^s = (G \times_k k^s)^u$ ist. Der Rest ist trivial. □

Theorem 8.5. *Sei G eine affine abelsche k-Gruppe. Dann gilt*

1. *G hat eine eindeutige größte Untergruppe G^m, die multiplikativ ist. Diese Gruppe ist charakteristisch und G/G^m ist unipotent;*

2. *wenn k perfekt ist, gibt es auch eine eindeutige größte unipotente Untergruppe G^u sodass $G = G^m \times G^u$.*

Proof. Für 1, sei $I = \{G_i \subseteq G \text{ affin} \mid G/G_i \text{ ist unipotent}\}$. Sei $G^m := \mathrm{Ker}(G \to \varprojlim_{i \in I}(G/G_i))$. Wenn es eine Abbildung $G^m \to \mathbb{G}_a$ gibt, sei H der Kern. Dann haben wir die folgende exakte Sequenz

$$0 \to G^m/H \to G/H \to G/G^m \to 0$$

Es folgt dass G/H unipotent ist. Es gilt, nach der Definition von G^m, dass $G^m/H \to G/H$ gleich Null ist. Es folgt dass $G^m/H = 0$, anders formuliert $G^m \to \mathbb{G}_a$ ist Null. Nach 8.6 ist G^m multiplikativ.

Für 2, nutzt man Methoden der Kohomologie und der Beweis wird daher ausgelassen. □

Proposition 8.6. *Sei $G = \mathrm{Spec}(A)$ eine affine k-Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *G ist multiplikativ;*

2. *Es existiert eine Erweiterung K/k, sodass $G \times_k K$ diagonalisierbar ist;*

3. *G ist abelsch und $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{grp.sch}}(G, \mathbb{G}_a)$ ist trivial.*

Wenn G endlich ist, dann sind diese Aussagen auch äquivalent zu:

$$G \text{ ist abelsch und } A^{\checkmark} \text{ ist étale.}$$

Wobei $A^{\checkmark} = Hom_k(A,k)$ *bezeichnet.*

Proof. $1 \Rightarrow 2$ Folgt direkt aus der Definition. $2 \Rightarrow 3$ Weil

$$\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{grp.sch}}(G,\mathbb{G}_a) = \{f \in A | \Delta(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f\} = \mathrm{Ker}(A \xrightarrow{\Delta - \cdot \otimes 1 - 1 \otimes \cdot} A \otimes_k A)$$

Wir dürfen annehmen, dass $k = K$ ist. Dann ist G diagonalisierbar. In diesem Fall ist die Aussage evident.
$3 \Rightarrow 1$ Wir können annehmen, dass $k = \bar{k}$ ist. Nach dem Beweis von 2.4, gibt es für jedes $x \in A$ einen endlichen Untervektorraum $x \in U \subseteq A$, sodass $\Delta(U) \subseteq U \otimes_k U$. Sei $B = U^{\checkmark}$. Dann ist B eine endliche k-Algebra. Wenn B nicht étale ist, gibt es eine surjektive k-Algebren-Abbildung: $B \twoheadrightarrow B'$, wobei B' einer artinscher lokaler Ring ist, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}'$ ins Quadrat Null ist. Also gibt es eine surjektive k-Algebren-Abbildung $\phi : B \twoheadrightarrow B' \twoheadrightarrow k[X]/(X^2)$, weil $B' = k \oplus m'$. Die Abbildung ϕ zerlegt sich als $\phi = \phi_1 + \phi_2 X$, wobei ϕ_1, ϕ_2 k-lineare Abbildungen $B \to k$ sind. Weil $U \to U^{\checkmark\checkmark}$ ein Isomorphismus ist, gibt es $a, b \in U$ sodass $\phi_1 = \langle -, a\rangle$ und $\phi_2 = \langle -, b\rangle$. Aber für alle $x, y \in B$ haben wir folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
\langle xy, a\rangle + \langle xy, b\rangle X &= \langle x \otimes y, \Delta(a)\rangle + \langle x \otimes y, \Delta(b)\rangle X \\
(\langle x, a\rangle + \langle x, b\rangle X)(\langle y, a\rangle + \langle y, b\rangle X) &= \langle x, a\rangle\langle y, a\rangle + (\langle x, a\rangle\langle y, b\rangle + \langle x, b\rangle\langle y, a\rangle)X \\
&= \langle x \otimes y, a \otimes a\rangle + \langle x \otimes y, a \otimes b + b \otimes a\rangle X
\end{aligned}$$

Weil ϕ eine Abbildung von k-Algebren ist, haben wir $\Delta(a) = a \otimes a$ und $\Delta(b) = a \otimes b + b \otimes a$. Da $a \neq 0$, $\epsilon(a) = 1$, haben wir also

$$1 = \pi \circ \epsilon(a) = (i \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(a) = i(a)a$$

wobei $\pi : k \to A$ die Struktur Abbildung ist. Das Element $a \in A$ ist somit invertierbar. Weil $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{grp.sch}}(G,\mathbb{G}_a) = 0$ und $\Delta(a^{-1}b) = 1 \otimes a^{-1}b + a^{-1}b \otimes 1$, haben wir $a^{-1}b = 0$. Dann ist $b = 0$, und ϕ ist somit nicht surjektiv, eine Widerspruch. Wir haben daher $B = \prod_{1 \le i \le n} k$.
Sei $p_i : B \to k$ die i-te Projektion. Weil $U \to U^{\checkmark\checkmark}$ ein Isomorphismus ist gilt $p_i = \langle -, a_i\rangle$ und die $\{a_i\}$ sind eine Basis von U. Weil p_i ein Ring-Homomorphismus ist, haben wir ähnlich wie zuvor $\Delta(a_i) = a_i \otimes a_i$. Also ist A erzeugt von seinen Charakteren und A ist daher diagonalisierbar. □

9 Halbeinfache und reduktive Gruppen (I) (15/06/2016)

Ziel des Vortrags: Auflösbare algebraische Gruppe

DETAILS:

- Die Kommutatorgruppe einer algebraischen Gruppe;
- Auflösbare algebraische Gruppen;
- Satz von Lie-Kolchin.

Definition 25. Eine endliche Kette von Untergruppen $G = G_0 \supsetneq G_1 \supsetneq \cdots \supsetneq G_n = \{1\}$ heißt *Subnormalreihe*, wenn jede echte Untergruppe der Kette ein Normalteiler ihres Vorgängers ist, wenn also für $1 \le k \le n$ stets $G_k \trianglelefteq G_{k-1}$ gilt. Eine Subnormalreihe heißt *zentrale Subnormalreihe* wenn $G_i/G_{i+1} \subseteq G/G_{i+1}$ im Zentrum von G/G_{i+1} enthalten ist.

Definition 26. Sei G ein Gruppenschema von endlichem Typ über einem Schema S. Die *Kommutatorgruppe* $\mathscr{D}G$ ist der Kern der Abbildung $G \to \varprojlim_{i\in I} G_i$, wobei

$$I := \{G \twoheadrightarrow G_i | G_i \text{ ist kommutativ}\}$$

bezeichnet. Weil $G \to \varprojlim_{i\in I} G_i$ surjektiv ist, ist $G/\mathscr{D}G = \varprojlim_{i\in I} G_i$ kommutativ.

Definition 27. Sei G ein affines Gruppenschema über einem Schema S. Sei $f : X \to G$ ein Morphismus zwischen affinen S-Schemata. Wir nehmen an, dass es einen S-Punkt o von X gibt, sodass $f(o) = e \in G$ gilt. Sei $I_n := \mathrm{Ker}(\mathscr{O}_S[G] \to \mathscr{O}_S[X^n])$, wobei $\mathscr{O}_S[G] \to \mathscr{O}_S[X^n]$ als $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1)\cdots f(x_n)$ definiert ist. Wir haben

$$I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq I_3 \supsetneq \cdots \supsetneq I_n \supsetneq \cdots$$

Sei $I = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} I_n$.

Lemma 9.1. *Wenn für jedes* $S = \mathrm{Spec}(k)$*-Schema* T, $i(f(X(T))) \subseteq f(X(T))$ *gilt, dann ist* $G^X :=$ $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_S[G]/I)$ *ein* S*-Gruppenschema. Es ist das kleinste Gruppenschema, durch das* f *faktorisiert.*

Proof. Betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
X^n \times_S X^n \arrow[rr] \arrow[d, bend right] \arrow[d, bend left] & & X^{2n} \arrow[d] \\
G \times_S G \arrow[rr, "m"] & & G
\end{tikzcd}$$

wobei $X^n \times_S X^n \to X^{2n}$ durch $(x_1, \cdots, x_n) \times (y_1, \cdots, y_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ gegeben ist. Damit bekommen wir das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_S[X^n] \otimes \mathscr{O}_S[X^n] & & \mathscr{O}_S[X^{2n}] \arrow[ll] \\
\mathscr{O}_S[G] \otimes \mathscr{O}_S[G] \arrow[u, bend left] \arrow[u, bend right] & & \mathscr{O}_S[G] \arrow[ll, "\Delta"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Da I_{2n} Null unter $\mathscr{O}_S[G] \xrightarrow{\Delta} \mathscr{O}_S[G]/I_n \otimes \mathscr{O}_S[G]/I_n$ ist, ist I auch Null unter Δ. Deswegen haben wir die Multiplikation:

$$\Delta : \mathscr{O}_S[G]/I \to \mathscr{O}_S[G]/I \otimes \mathscr{O}_S[G]/I$$

Es ist auch klar, dass die Inverse $i : \mathscr{O}_S[G] \to \mathscr{O}_S[G]$ einen Morphismus $\mathscr{O}_S[G]/I \to \mathscr{O}_S[G]/I$ induziert, da wir das folgende Diagramm haben

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_S[G] \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathscr{O}_S[G] \arrow[d] \\
\mathscr{O}_S[G]/I^n \arrow[r, dashed] & \mathscr{O}_S[G]/I^n
\end{tikzcd}$$

Mit der Multiplikation und der Inversen, wird G^X ein Gruppenschema. □

Corollary 9.2. *Sei* $\mathrm{Spec}\,(k') = S' \to S = \mathrm{Spec}\,(k)$ *ein flacher Morphismus. Dann gilt:* $G^X \times_S S' = (G \times_S S')^{X \times_S S'}$.

Proof. Klar nach Definition. □

Corollary 9.3. *Sei* $S = \mathrm{Spec}\,(k)$ *ein Körper. Wenn* X *glatt (resp. geometrisch zusammenhängend) ist, dann ist es auch* G^X.

Proof. Klar. □

Nun Sei $f : X \to G$ die Abbildung $G^2 \to G$ gegeben durch die Abbildung $(x, y) \mapsto x^{-1}y^{-1}xy$. Dann wir haben die folgende Aussage:

Lemma 9.4. *Im oben genannten Fall gilt:* $\mathscr{D}G = G^X$.

Proof. Da für jede abelsche Quotientengruppe $G \twoheadrightarrow G'$, die Komposition $f : G^{2n} \to G \twoheadrightarrow G'$ immer Null ist, gilt $G^X \subseteq \mathscr{D}G$.
Andererseits gilt für jedes S-Schema T und jeden S-Morphismus $\phi : T \to G$, dass es ein kommutatives Diagramm gibt:

$$\begin{tikzcd}
G_T^{2n} \arrow[r, "\phi(-)\phi^{-1}"] \arrow[d, "f_T"] & G_T^{2n} \arrow[d, "f_T"] \\
G_T \arrow[r, "\phi(-)\phi^{-1}"] & G_T
\end{tikzcd}$$

Als die kleinste Untergruppe von G_T, die durch f_T faktorisiert, ist $G_T^X \subseteq G_T$ stabil unter der Konjugation von ϕ. Also ist G^X normal. Aber es ist klar, dass G/G^X kommutativ ist. Also ist $\mathscr{D}G \subseteq G^X$. □

Lemma 9.5. *Für jeden flachen Basiswechsel* $S' \to S$*, haben wir* $\mathscr{D}(G \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'}) = (\mathscr{D}G) \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S'}$.

Proof. Klar. □

Corollary 9.6. *Wenn* G *zusammenhängend (resp. glatt) ist, dann* $\mathscr{D}G$ *ist auch so.*

Proof. Klar. □

Definition 28. Sei G ein affines Gruppenschema über einem Schema S. Die Gruppe G heißt auflösbar genau dann, wenn die Reihe $G \supseteq \mathscr{D}G \supseteq \mathscr{D}^2 G \supseteq \cdots$ endlich ist.

Corollary 9.7. *Sei G ein affines Gruppenschema über einem Schema S. Dann ist G auflösbar genau dann, wenn für beliebigen treuflachen Morphismus $S' \to S$ gilt, dass $G \times_S S'$ auflösbar ist.*

Proof. Klar. □

Lemma 9.8. *Sei G ein affin Gruppenschema über einem Schema S. Die Gruppe G ist auflösbar genau dann, wenn sie eine Subnormalreihe*

$$\{1\} \subsetneq G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_n = G$$

hat, in der G_i / G_{i-1} abelsch ist.

Proof. " $\Rightarrow$ " Trivial. " $\Leftarrow$ " Es folgt daraus, dass $G_{n-1} \supseteq \mathscr{D}G$ und $G_{n-2} \supseteq \mathscr{D}^2 G \cdots$. □

Corollary 9.9. *Sei G ein auflösbares Gruppenschema über einem Schema S. Dann sind Quotienten oder Untergruppen von G auch auflösbar.*

Proof. Klar nach 9.8. □

Theorem 9.10. (Lie Kolchin's Theorem) *Sei G eine* ***glatte zusammenhängende auflösbare*** *Gruppe über einem* ***algebraisch abgeschlossenen*** *Körper k. Dann ist G auch trigonalisierbar.*

Proof. Wir müssen beweisen, dass jede einfache Darstellung von G auf einem von Null verschiedenen Vektorraum V 1-dimensional ist.
Wir machen den Beweis durch Induktion über die Krull-Dimension von G. Da G auflösbar ist, gilt $\mathscr{D}G \neq G$, und somit $\dim(\mathscr{D}G) < \dim(G)$. Nach der Induktionshypothese, gibt es eine 1-dimensionale Unterdarstellung $V_1 \subseteq V$ von $N := \mathscr{D}G$. Dieser Darstellung entspricht ein eindeutiger Charakter $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ oder $a_\chi \in \{x \in k[G] | \Delta(x) = x \otimes x\}$. Sei V_χ der Eigenraum von χ, d.h.

$$V_\chi := \mathrm{Ker}(V \xrightarrow{\rho - \cdot \otimes a_\chi} V \otimes k[G])$$

Sei $N' \subseteq N$ der Stabilisator von V_χ, d.h. die Untergruppe, die durch das folgende kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr] \arrow[d] & & \underline{\mathrm{Hom}}(V_\chi, V_\chi) \arrow[d] \\ G \arrow[r] & \mathrm{GL}_{n,V} \arrow[r, "f"] & \underline{\mathrm{Hom}}(V_\chi, V) \end{tikzcd}$$

definiert wird, wobei f der Morphismus ist, der einen Automorphismus $V \xrightarrow{t} V$ auf V_χ einschränkt. Nun haben wir einen Morphismus von Schemata

$$\lambda : \coprod_{g \in G(k)/H(k)} gH \to G$$

Wenn $g_1 H \bigcap g_2 H = g_1 H \times_G g_2 H \neq \emptyset$, dann gilt $g_1 g_2^{-1} \in H(k)$, also ist λ injektiv.

Sei S die Menge der Charaktere von N sodass $V_s \neq 0$ für jedes $s \in S$. Die Menge ist endlich weil $\bigoplus_{s\in S} V_s \subseteq V$. Und es gibt eine Wirkung von $G(k)$ auf S: für jedes $g \in G(k)$, und $s : N \to \mathbb{G}_m \in S$, $gs : N \xrightarrow{g(\cdot)g^{-1}} N \xrightarrow{s} \mathbb{G}_m$. Es ist klar, dass gV_s der Eigenraum von gs ist, d.h. $gV_s = V_{gs}$ ($gV_s \subseteq V_{gs} \Rightarrow V_{gs} = g \cdot g^{-1} V_{gs} \subseteq gV_s$). Da $H(k)$ der Stabilisator von $\chi \in S$ ist und S endlich ist, ist $G(k)/H(k)$ endlich.
Dann gilt, dass $|H| \subseteq |G|$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Weil G zusammenhängend ist, folgt $|H| = |G|$. Weil $H \to G$ eine abgeschlossene Einbettung ist und G glatt ist, gilt $H = G$. Der Untervektorraum $V_\chi \subseteq V$ ist deshalb eine Unterdarstellung von G. Dann $V = V_\chi$ weil V einfach ist.
Nun betrachten wir das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\subset"] & \mathbb{G}_m \arrow[d, "\subset"] \arrow[dr, "(-)^n"] & \\
G \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{GL}_{n,V} \arrow[r, "\det"] & \mathbb{G}_m
\end{tikzcd}$$

Wobei ρ der Darstellung V entspricht und $(-)^n : x \to x^n$. Weil $\mathbb{G}_m$ kommutativ ist, ist $(-)^n \circ \chi$ trivial. Also ist das Bild von N in $\mathbb{G}_m$ unter χ in $\mu_n \subseteq \mathbb{G}_m$ enthalten. Aber N ist glatt und zusammenhängend, also ist χ trivial. Dann ist V eine Darstellung von G/N. Da G/N kommutativ ist, ist nach 8.5 klar, dass V 1-dimensional sein muss. □

10 Borel'sche Untergruppen (22/06/2016)

Ziel des Vortrags: Borel'sche Untergruppen und Parabolische Untergruppen

Details:

- Borel'scher Fixpunktsatz;
- Borel'sche Untergruppe;
- Parabolische Untergruppe;
- Radikal einer algebraische Gruppe.

11 Halbeinfache und reduktive Gruppen (II) (29/06/2016)

Ziel des Vortrags: Hierbei ist das Ziel die Grundbegriffe von Halbeinfache Gruppe, reduktive Gruppen, pseudo-reduktive Gruppe einzuführen.

Details:

- Halbeinfache Gruppe, reduktive Gruppen, pseudo-reduktive Gruppe und Beispiele;
- Einfach zusammenhängende algebraische Gruppe und Beispiele;
- Größte Tori.

12 Abelsche Varietät (06/07/2016)

Ziel des Vortrags: Dieser Vortrag sollte folgende Begriffe betreffen.

Details:

- Abelsche Varietät, Jacobian Varietät, Albanese Varietät;
- Picard-Funktor und Picard-Schema;
- Néron Model.

13 Endlich Gruppenschema (13/07/2016)

Ziel des Vortrags: Muss noch fertig sein.

14 Darstellungen und die Tannaka Dualität (20/07/2016)

Ziel des Vortrags: MUSS NOCH FERTIG SEIN.