Prof. Dr. Konrad Polthier
Dipl.-Math. Konstantin Poelke

Funktionentheorie
Sommersemester 2016
Freie Universität Berlin

Übungsblatt 7

Ausgabe: 30. Mai 2016

Abgabe: 8. Juni im Tutorium um 16:00 Uhr!

In jeder Aufgabe können maximal vier Punkte erreicht werden!

Aufgabe 7.1 (Leibniz'sche Regel im Komplexen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $I := [a, b]$ ein reelles Interval und

$$f : I \times U \to \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion, so dass für jedes feste $t \in I$ die parametrisierte Funktion $f(t, -) : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Ferner sei die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z} : I \times U \to \mathbb{C}$ ebenfalls stetig.

Zeigen Sie, dass dann für die Funktion $g(z) := \int_a^b f(t, z)dt$ gilt:

1. g ist eine holomorphe Funktion auf U.
2. Es ist
$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt.$$

Tipp: Erinnern Sie sich an die *Leibniz'sche Regel für Differentiation parameterabhängiger Integrale* im rellen Fall aus der Analysis[1]:

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}, (t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(t, x_1, \ldots, x_n)$ stetig und bezüglich der Variablen x_j stetig partiell differenzierbar, so gilt $\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(t, x_1, \ldots, x_n)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_j} f(t, x_1, \ldots, x_n)dt$ für jedes $j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 7.2 (Ein Konvergenzsatz)**.** Beweisen Sie den folgenden Konvergenzsatz:

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f_j : U \to \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$ holomorphe Funktionen und $\sum_{j=0}^\infty f_j$ eine normal konvergente Reihe auf U. Dann ist die Grenzfunktion f holomorph auf U, es gilt $f' = \sum_{j=0}^\infty f_j'$ und die Reihe $\sum_{j=0}^\infty f_j'$ ist ebenfalls normal konvergent auf U.

Aufgabe 7.3 (Sinus und Cosinus)**.** Die trigonometrischen Funktionen sin und cos werden im Komplexen durch ihre Potenzreihen definiert, d.h.

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ und } \cos(z) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Zeigen Sie:

1. Die beiden Reihen konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$ und defnieren also ganze Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

---

[1] vgl. etwa O. Forster: Analysis 2, Kapitel 10, Satz 2

2. Diese so definierten Funktionen sin und cos sind die einzigen komplexen Fortsetzungen der reellen Funktionen $\sin_{\mathbb{R}}, \cos_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Die bekannten Ableitungsregeln $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ gelten auch im Komplexen.
4. Berechnen Sie das Integral
$$\oint_{\partial B_3(0)} \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} \mathrm{d}z.$$
$\partial B_r(a)$ bezeichnet dabei wie immer den Rand der offenen Kreisscheibe um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$.

Aufgabe 7.4 (Numerische Stammfunktion, 4 Bonuspunkte)**.** Schreiben Sie ein kurzes Programm in einer geeigneten Sprache Ihrer Wahl [2], um *numerisch* (also insbesondere ohne eventuelle Kenntnis des komplexen Logarithmus) eine Stammfunktion F für die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ zu berechnen. Testen Sie Ihre Funktion, indem Sie für $N = 10$ die Funktionswerte unter F der folgenden Punktfolgen auswerten:

$$a_k := \exp(i\pi k/N) \text{ und } b_k := \exp(-i\pi k/N), \; k = 0, \dots, N.$$

Was beobachten Sie für $k \to N$? Welchen Wert erhalten Sie für $F(1)$? Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise, geben Sie Ihre Ergebnisse mit dem Übungszettel ab und senden Sie den Quellcode an Ihren Tutor.

Hinweis: Hilfreich können die *Newton-Cotes-Formeln* aus der Numerik sein.

[2] z.B. Python, Matlab/Octave, Mathematica