Prof. Dr. Konrad Polthier
Dipl.-Math. Konstantin Poelke

Funktionentheorie
Sommersemester 2016
Freie Universität Berlin

Übungsblatt 11

Ausgabe: 27. Juni 2016

Abgabe: 6. Juli im Tutorium um 16:00 Uhr!

In jeder Aufgabe können maximal vier Punkte erreicht werden!

Aufgabe 11.1 (Holomorphe Fortsetzbarkeit)**.** Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Funktionen in 0 holomorph fortsetzbar sind.

1. $z^2 \sin(z^{-1})$;
2. $\frac{z}{\exp(z)-1}$;
3. $z \cot(z)$; (wobei natürlich $\cot(z) := \tan(z)^{-1} = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$)
4. $\frac{\cos(z)-1}{z^2}$.

Aufgabe 11.2 (Laurent-Entwicklung)**.** Berechnen Sie die Laurentreihe von

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

auf den drei Ringgebieten $R_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, $R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ und $R_3 := \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z|\}$.

Aufgabe 11.3 (Eine Ungleichung)**.** Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und für ein $z_0 \in U$, $r > 0$ die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)}$ ganz in U enthalten. Es gelte

$$|f(z_0)| < \min_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)|.$$

Zeigen Sie, dass f dann eine Nullstelle in $B_r(z_0)$ haben muss.

Aufgabe 11.4 (Gebietstreue)**.** Beweisen Sie folgende, zentrale Eigenschaft holomorpher Funktionen:

Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion. Dann ist die Bildmenge $f(G)$ wieder ein Gebiet.

Hinweis: Für ein beliebiges $z_0 \in G$ müssen Sie also zeigen, dass eine Umgebung $B_\delta(w_0)$ von $w_0 := f(z_0)$ ganz in $f(G)$ liegt. Ihr Ziel sollte es sein, Aufgabe 11.3 auf die Funktion $g(z) := f(z) - w$ für $w \in B_\delta(w_0)$ anzuwenden. Für geeignete Wahlen von δ und $B_r(z_0)$ lässt sich die notwendige Voraussetzung erreichen. Zeigen Sie dafür, dass es ein r gibt, so dass $f(z) - w_0 \neq 0$ auf dem Rand von $B_r(z_0)$.

Aufgabe 11.5 (Bonusaufgabe: Historisches, 1 Zusatzpunkt)**.** Lösen Sie die folgende Aufgabe, die Th. Clausen im Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 2 im Jahre 1827 gestellt hat:

“Wenn e die Basis der hyperbolischen (=natürlichen) Logarithmen, π den halben Kreisumfang und n eine positive oder negative Zahl bedeuten, so ist bekanntlich

$$e^{2n\pi\sqrt{-1}} = 1 \text{ und } e^{1+2n\pi\sqrt{-1}} = e$$

folglich auch

$$e^{(1+2n\pi\sqrt{-1})^2} = e = e^{1+4n\pi\sqrt{-1}-4n^2\pi^2}.$$

Da aber $e^{1+4n\pi\sqrt{-1}} = e$ ist, so würde daraus folgen: $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, welches absurd ist. Nachzuweisen, wo in der Herleitung dieses Resultats gefehlt ist.”