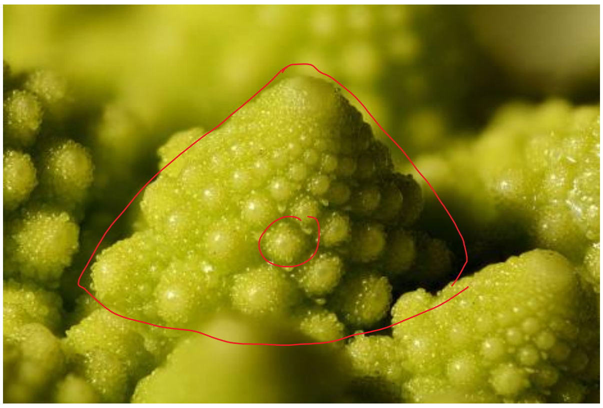
Fraktale oder "why stupidity *is* the key"

"Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise und Rinde ist nicht glatt, so wie auch der Blitz nicht auf einer Geraden unterwegs ist."

(Benoît Mandelbrot)



* vom Lateinischen "fractus" (frangere - brechen)

Def.: (Fraktal): Ein Fraktal ist ein geometrisches Objekt, das folgende Eigenschaften erfüllt:

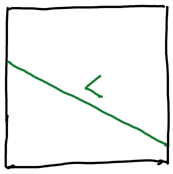
- Selbstähnlichkeit,
- hat fraktale Dimension,
- entsteht durch einen Iterationsprozess.

→ Ein selbstähnliches Objekt ist sich in dem Sinne ähnlich, dass Vergrößern des betrachteten Objektes die Originalstruktur ergibt, ohne in einer elementaren Kleinststruktur zu enden.

→ Vergrößern erlaubt zusätzlich affine Transformationen wie Translation und Rotation.

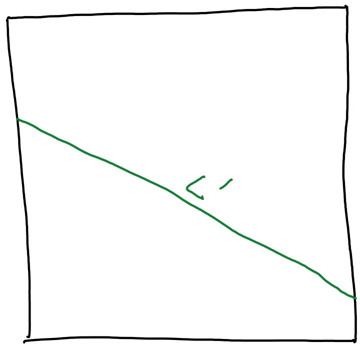
Ansatz für Definition fraktaler Dimension:

- Linie:



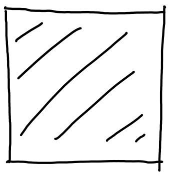
|L|: Länge des Geradenstücks L

Skalierung um Faktor k: $\longrightarrow$



$|L'| = |L| \cdot k$

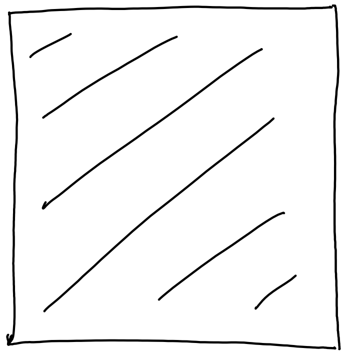
- Fläche:



q

Quadrat Q der Seitenlänge q
$\Rightarrow \text{area}(Q) = q^2$

Skalierung um k: $\longrightarrow$



qk

Quadrat Q' mit
$\text{area}(Q') = q^2 \cdot k^2 = \text{area}(Q)k^2$

Def. (Ähnlichkeitsdimension): Das betrachtete Objekt sei selbstähnlich, d.h. es besteht aus N Kopien seiner selbst, die das Ausgangsobjekt nach Skalierung um $r \in (0,1)$ überdecken. Definiere als Ähnlichkeitsdimension D:

$$D = -\frac{\ln(N)}{\ln(r)}.$$

$\rightarrow$ "echt" fraktale Dimension: $D \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{N}$.

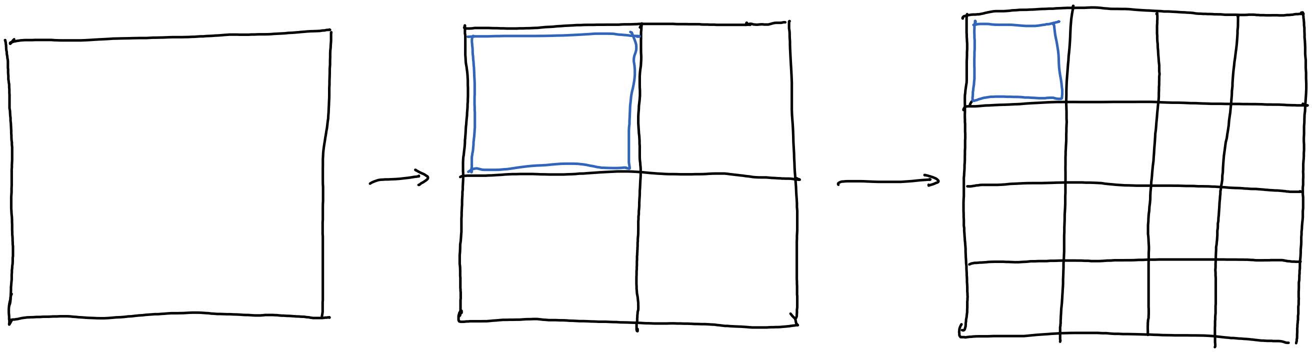
Bem.: Obige Def. ist für einfache (?) Fraktale gut geeignet, in komplizierteren Fällen kann man die sog. Boxdimension bestimmen:

Def.: (Boxdimension): Sei $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon)$ die kleinste Anzahl an ε-Kugeln, die $X \subset \mathbb{R}^n$ überdecken. Dann ist die Boxdimension als

$$\dim_B(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

gegeben.

Beispiele (?)



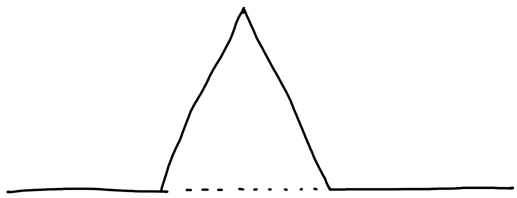
- selbstähnlich ($\square$), Iterationsprozess: $\square \to \boxplus$
- aber keine fraktale Dimension, da $N=4, r=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow D=2 \in \mathbb{N}.$$

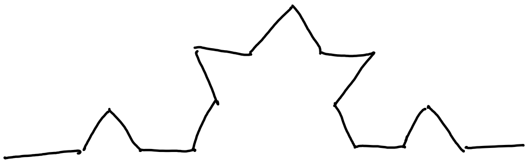
Bsp.: von Koch'sche Kurve K_n

0

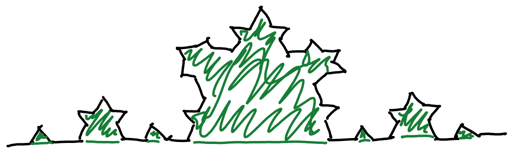
1



2



3



- 1904 von Helge v. Koch als Bsp. einer überall stetigen, nirgendwo differenzierbaren Kurve beschrieben (sog. "Monsterkurve")
- $\mathrm{len}(K_n) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty,\ n \to \infty$, area $(K_n) = \frac{\sqrt{3}}{16} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k \to \frac{\sqrt{3}}{20},\ n \to \infty$,

  $D(K_n) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} = 1{,}26\ldots$

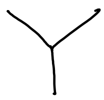
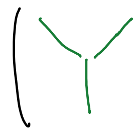
- Initiator: Startform
- Generator: arrangierte (ggf. gedrehte) Auswahl von Kopien des Initiators
- Erzeugungsregel: Ersetze jeden (ausgewählten) Initiator durch einen passend skalierten Generator.

Bsp.: ① Initiator:

② Generator:  (4-mal — bzw. — / \ —)

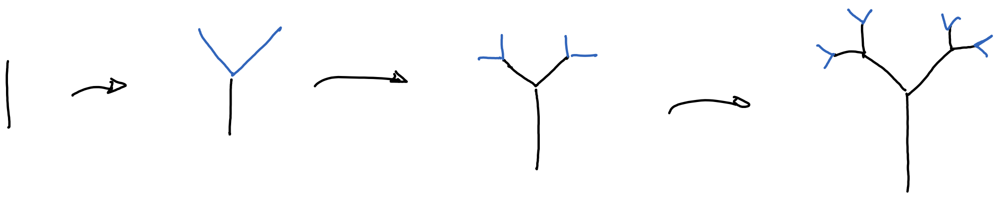
③ Erzeugungsregel: 

Bsp.: ① Initiator:

② Generator:  ( über Initiator dargestellt)

③ Erzeugungsregel:

Ersetze Äste durch Generator: 



- def. durch den theor. Biologen Aristid Lindenmayer (1968)

Def. (L-System): Ein L-System besteht aus einem Quadrupel (V, K, ω, P), wobei:

- V: Menge der variablen Zeichen,
- K: Menge der konstanten Zeichen,

  → $V \cup K$ bildet das Alphabet des L-Systems,
- ω: Startwort über $V \cup K$
- P: Menge geordneter Paare von Wörtern über $V \cup K$, die Ersetzungsregeln definieren

→ kontextfreies L-System: erstes Wort eines jeden Paares besteht aus einem Buchstaben aus V und zu allen $v \in V$ ist eine Erzeugungsregel bekannt

→ andere L-Systeme werden als kontextsensitiv bezeichnet.

Ein L-System für die Koch'sche Kurve:

- Alphabet: $V \cup K = \{F\} \cup \{+, -\}$, wobei

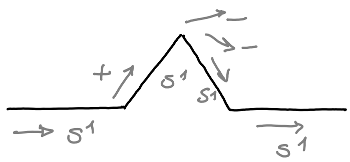
  $+$: Drehung um $\frac{\pi}{3}$ in math. pos. Drehrichtung,

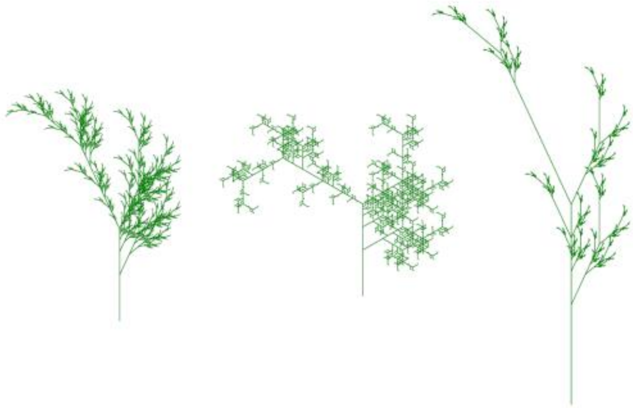
  $-$: Drehung um $\frac{\pi}{3}$ in math. neg. Drehrichtung

- $\omega = \{F\}$ (anschaulich / interpretatorisch: Bewege dich um Länge s^n in eine gegebene Richtung [hier: entlang der x-Achse], $s \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$)

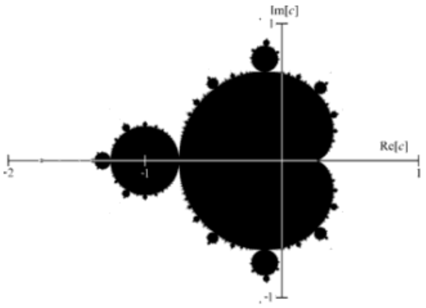
- $P = \{(F, F+F--F+F)\}$

① 

② 



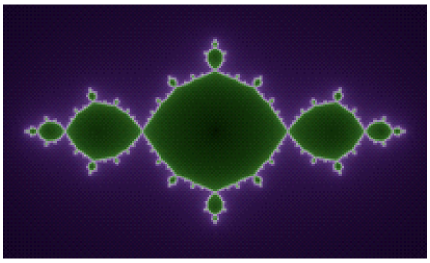
- Apfelmännchen / Mandelbrotset: Menge aller $c \in \mathbb{C}$, für die die Folge $z_{n+1} = z_n^2 + c$, $z_0 = 0$, beschränkt bleibt.



- Julia-Menge J_p: $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynom, definiere $z_{n+1} = p(z_n) = \dots = p^n(z_0)$, z_0: Startwert

$K_p = \{ z_0 \in \mathbb{C} \mid \exists K \in \mathbb{R} : |p^n(z_0)| \leq K \, \forall n \in \mathbb{N} \}$,

$J_p = \partial K_p$.



$p(z) = z^2 - 1$