Freie Universität Berlin WiSe 19/20
Institut für Mathematik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 3. Dezember 2019

Analysis II – Hausaufgabe 8

Abgabe: 10. Dezember 2019, bis 10:15 im Vorlesungsraum

---

1. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1$. Zeigen Sie, dass durch $F(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung U von $(x, y) = (1, 1)$ eine differenzierbare Funktion $z = \varphi(x, y)$ mit $\varphi(1, 1) = 1$ implizit definiert ist. Berechne Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y)$ und $\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y)$ im Punkt $(1, 1)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ derart, dass $f(a, b) = 0$. Weiter sei $\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f\right)(a, b) \neq 0$ und $g(x) = y$ die in einer Umgebung von (a, b) existierende Auflösung von $f(x, y) = 0$.

1.) Zeigen Sie, dass g zweimal differenzierbar ist und bestimmen Sie die zweite Ableitung von g.

2.) Berechnen Sie die zweite Ableitung von g für $f(x, y) = y + x\sin(y)$ für $(a, b) = (0, 0)$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, xy + yz + xz, xyz).$$

Zeigen Sie, dass f genau dann in (x_0, y_0, z_0) lokal invertierbar ist, wenn

$$(x_0 - y_0)(y_0 - z_0)(z_0 - x_0) \neq 0$$

gilt. Bestimmen Sie in diesen Fällen die Jacobimatrix der Umkehrabbildung.

4. Aufgabe (3 Punkte)
Seien $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und

$$f : E \to E,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass f in jedem $(x, y) \in E$ umkehrbar ist. Was bewirkt f anschaulich? Fertigen Sie eine aussagekräftige Skizze.

Total: 16