Freie Universität Berlin WiSe 19/20
Institut für Mathematik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Status: 7. November 2019

Analysis II – Hausaufgabe 4

Abgabe: 12. November 2019, bis 10:15 im Vorlesungsraum

---

1. Aufgabe (5 Punkte)
Gegeben sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin\left(\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\right), & (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

1.) Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ total differenzierbar ist.

2.) Untersuchen Sie, ob f in $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar ist.

2. Aufgabe (3 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Abbildungen

$$T : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + \cos(v)) \cos(u) \\ (2 + \cos(v)) \sin(u) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

1.) Skizzieren Sie T und $T \circ \gamma$.

2.) Bestimmen Sie $\frac{\partial}{\partial t}(T \circ \gamma)(t)$ durch Anwendung der Kettenregel.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Gebiet*, wenn G offen ist und zwischen je zwei Punkten $a, b \in G$ ein Polygonzug in G existiert: Ein *Polygonzug* zwischen $a, b \in \mathbb{R}^2$ ist eine Menge

$$\mathcal{P}(a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b) := \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{x_i x_{i+1}},$$

wobei $\overline{x_i x_{i+1}} := \{(1-t)x_i + t x_{i+1} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.
Zeigen Sie folgende Behauptung: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$ auf G. Dann ist f konstant.

Bitte wenden.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Definiere $(\Delta f)(x) := (\operatorname{div}(\operatorname{grad} f))(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$. Δ wird als *Laplace-Operator* bezeichnet.

Zeigen Sie, dass für die Darstellung des Laplace-Operators in Polarkoordinaten folgendes gilt:

Gegeben seien die Abbildung

$$p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

und eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$((\Delta f) \circ p)\,(r, \varphi) = \frac{\partial^2 (f \circ p)}{\partial r^2}(r, \varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial (f \circ p)}{\partial r}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (f \circ p)}{\partial \varphi^2}(r, \varphi).$$

Total: 16