**Freie Universität Berlin**
**Institut für Mathematik**
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz

WiSe 19/20

Status: 29. Oktober 2019

# Analysis II – Hausaufgabe 3

Abgabe: 5. November 2019, bis 10:15 im Vorlesungsraum

---

**1. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell stetig differenzierbare Funktionen sowie $F, G : U \to \mathbb{R}^3$ zweimal partiell stetig differenzierbare Vektorfelder. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

1.) $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot}(F)\rangle - \langle F, \operatorname{rot}(G)\rangle$,

2.) $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(f) \times \operatorname{grad}(g)\right) = 0$,

3.) $\operatorname{div}(f \cdot F) = \langle \operatorname{grad}(f), F\rangle + f \cdot \operatorname{div}(F)$,

4.) $\operatorname{rot}(f \cdot F) = f \cdot \operatorname{rot}(F) + \operatorname{grad}(f) \times F$.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \frac{x}{||x||} f(||x||)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}(v(x)) = 0$ gilt. Für welche $f$ gilt $\operatorname{div}(v(x)) = 0$?

**3. Aufgabe** (5 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 x_2 \left(x_1^2 - x_2^2\right)}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $f$ in $(0,0)$ stetig und dass $f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ einmal partiell differenzierbar ist. Wo ist $f$ zweimal partiell differenzierbar?

**4. Aufgabe** (3 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = \int_0^{x_1 x_2} f(t)\, dt$. Zeigen Sie, dass $g$ stetig partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen von $g$.

Total: 16