Freie Universität Berlin SoSe 2017
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. K. Polthier, H.-S. Lipschütz Stand: 25. April 2017

Elementargeometrie – Hausaufgabe 01

Abgabe: 05.05.2015 **vor** der Vorlesung

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

1.) Gegeben seien

$$P_0 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), P_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), P_3 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 6 \end{smallmatrix}\right), P_4 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie mittels des de-Casteljau-Algorithmus alle Kontrollpunkte für $t = 0,5$ und bestimmen Sie $b(t)$. Stellen Sie die Kontrollpunkte, die resultierenden Kontrollpolygone und $b(t)$ graphisch dar.

2.) Geben Sie eine Menge Kontrollpunkte $\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_2, \tilde{P}_4$ an, so dass die resultierende Bézier-Kurve die von Ihnen bestimmte Kurve symmetrisch ergänzt.
Bem.: Sie müssen die zweite Kurve nicht explizit berechnen.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen über Bernstein-Polynome:

1.) Rekursion:

$$\begin{aligned} &B_i^n(t) = tB_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_i^{n-1}(t), \\ &B_0^0(t) = 1, \\ &B_j^n(t) = 0 \text{ für } j \neq \{0, 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

2.) Symmetrie: $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$.

3.) $B_i^n(t)$ besitzt in $[0, 1]$ genau ein Maximum.

3. Aufgabe (5 Punkte)

1.) Sei $b(t)$ die Bézier-Kurve vom Grad n bezogen auf die Kontrollpunkte $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie folgende Formeln für die zweite Ableitung von $b(t)$:

$$b''(0) = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0) \text{ und } b''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}).$$

Hinweis: Zeigen Sie dazu folgende Darstellung:

$$b'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) B_i^{n-1}(t).$$

2.) Gegeben seien vier Kontrollpunkte $P_0, \dots, P_3 \in \mathbb{R}^d$. Stellen Sie die zugehörige Bézier-Kurve $b(t)$ in der Monombasis $\{1, t, t^2, t^3\}$ dar; d.h.: Finden Sie $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^d$, sodass

$$b(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Gesamtpunktzahl: 16