Prof. Dr. Konrad Polthier
Dipl.-Math. Konstantin Poelke

Funktionentheorie
Sommersemester 2014
Freie Universität Berlin

Übungsblatt 6

Ausgabe: 19. Mai 2014

Abgabe: 28. Mai im Tutorium um 16:00 Uhr!

In jeder Aufgabe können maximal vier Punkte erreicht werden!

Aufgabe 6.1 (Cauchy Integralsatz für Sterngebiete)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit einem Sternmittelpunkt z_*.

1. Sei $a \in U$. Zeigen Sie, dass es dann eine Umgebung $B_\epsilon(a)$ von a gibt, die vollständig in U liegt, so dass für alle $z \in B_\epsilon(a)$ die drei Punkte z_*, z und a ein (möglicherweise degeneriertes) Dreieck aufspannen, das ebenfalls ganz in U liegt.
2. Zeigen Sie, dass der Cauchy Integralsatz auch für Sterngebiete gilt:

   "Sei U ein Sterngebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f auf U eine Stammfunktion."

Aufgabe 6.2 (Wegintegrale und Gebiete)**.** Wir betrachten die Punkte $p_m := \exp(\frac{2\pi i m}{8})$ Punkte für $m = 0, \ldots, 7$ auf dem Einheitskreis und um jeden dieser Punkte die offene Kreisscheibe K_m mit Radius $\frac{1}{2}$.

1. Zeigen sie, dass $G_N := \bigcup_{m=0}^{N} K_m$ ein Gebiet ist für $N = 0, \ldots, 7$.
2. Zeigen Sie $\oint_{\partial K_m} \frac{1}{z} dz = 0$ für alle $m = 0, \ldots, 7$, wobei das Integral über den Rand von K_m läuft.
3. Erläutern Sie kurz, warum $\oint_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in K_m gilt.
4. Zeigen Sie, dass $\oint_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in G_6 gilt.
5. In der Vorlesung haben Sie gezeigt, dass das Integral von $\frac{1}{z}$ über den Einheitskreis *nicht* verschwindet und offensichtlich ist der Einheitskreis ein geschlossener Weg in G_7. Nun können wir G_7 auch schreiben als $G_6 \cup K_7$. Mit Aufgabe 4.4 und den oben bewiesenen Aussagen sollte doch aber folgen, dass $\oint_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$ über jeden geschlossenen Weg in G_7 gilt.

   Was ist falsch an dieser Argumentation? Wo liegt das Problem?

Aufgabe 6.3 (Stammfunktionen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ keine Stammfunktion auf U hat.

Aufgabe 6.4 (Holomorphie und Stetigkeit)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, L eine Gerade in $\mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $U \setminus U \cap L$ holomorph ist. Zeigen Sie, dass dann f auf ganz U holomorph ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Morera. Unterscheiden Sie dabei die Fälle, in denen ein Dreiecksweg in U keinen, einen, zwei oder unendlich viele (d.h. eine Kante des Dreiecks liegt auf L) Schnittpunkte mit L hat. Subdivision des Dreiecks hilft, den vorletzten Fall auf den letzten Fall zurückzuführen. Richtige Arbeit muss dann nur für den letzten Fall getan werden, hier müssen Sie also Integrale abschätzen. Nutzen Sie dabei die Tatsache, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen (also insbesondere auf abgeschlossenen Dreiecken) gleichmäßig stetig sind. Betrachten Sie den Grenzfall $p \to z_1$ (s. Skizze).