Prof. Dr. Konrad Polthier
Dipl.-Math. Konstantin Poelke

Funktionentheorie
Sommersemester 2014
Freie Universität Berlin

Übungsblatt 5

Ausgabe: 12. Mai 2014

Abgabe: 21. Mai im Tutorium um 16:00 Uhr!

In jeder Aufgabe können maximal vier Punkte erreicht werden!

Aufgabe 5.1 (Goursat, abgeschwächte Version)**.** Beweisen Sie die folgende abgeschwächte Version des Satzes von Goursat:

Sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \Delta$. Sei U eine offene Umgebung von Δ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph ist. Dann gilt

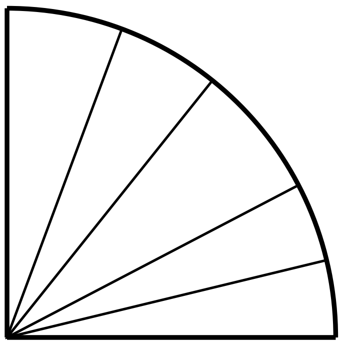
$$\oint_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie nacheinander die Fälle, dass z_0 auf einer Ecke, einer Kante und im Innern von Δ liegt.

Aufgabe 5.2 (Gitterverzerrung)**.** Für $w \in \mathbb{C}^*$ sei $\gamma_w : [0,1] \to \mathbb{C}$ die Verbindungsgerade von 0 nach w. Wir betrachten die Funktionen

$$f_1 : w \mapsto \int_{\gamma_w} z dz \text{ und } f_2 : w \mapsto \int_{\gamma_w} \overline{z} dz.$$

Plotten Sie die Bilder von f_1 und f_2 von Geradenstücken im ersten Viertel des Einheitskreises, die durch den Ursprung verlaufen.



Aufgabe 5.3 (Sterngebiete II)**.** Welche der folgenden Mengen sind Sterngebiete? Bestimmen Sie jeweils die Menge aller Sternmittelpunkte!

1. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ und } |z + 1| > \sqrt{2}\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ und } |z - 2| > \sqrt{5}\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \text{ und } |z + i| > 2\}$

Aufgabe 5.4 (Wegintegrale II)**.**

1. Plotten Sie die Kurve

$$\alpha : [0, 4\pi] \to \mathbb{C},\ \alpha(t) = \begin{cases} 1 - \exp(it) & \text{falls } t \in [0, 2\pi] \\ -1 + \exp(it) & \text{falls } t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}.$$

2. Wir betrachten nun die Kurve $\gamma : [0, 4] \to \mathbb{C}$, die wie folgt definiert ist: $\gamma(0) = \gamma(4) = 1$, $\gamma(1) = i$, $\gamma(2) = -1$, $\gamma(3) = -i$ und auf jedem Intervall $[k, k + 1]$, $k = 0, \dots, 3$ ist γ linear.

   a) Geben Sie eine explizite Parametrisierung für γ an.

   b) Berechnen Sie direkt (d.h. ohne Kenntnis des Cauchy-Integralsatzes oder der Wegunabhängigkeit von Integralen komplexer Funktionen mit Stammfunktion) das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z} dz.$$

   Hinweis: Das Integral sollte sich auf ein reelles Integral reduzieren lassen. Das kann man oft durch geschickte Erweiterung mit konjugierten Ausdrücken erreichen. Hilfreich können auch die folgenden aus der Analysis 1 bekannten Ableitungen reeller Funktionen sein:

$$\frac{d}{dt} \arctan(at + b) = \frac{a}{(at + b)^2 + 1} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \ln(f(t)) = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$