Prof. Dr. Konrad Polthier
Dipl.-Math. Konstantin Poelke

Übungsblatt 4

Ausgabe: 5. Mai 2014

Abgabe: 14. Mai im Tutorium um 16:00 Uhr!

In jeder Aufgabe können maximal vier Punkte erreicht werden!

Aufgabe 4.1 (Möbius-Transformationen)**.** Eine *Möbiustransformation* oder *gebrochen lineare Transformation* auf $\hat{\mathbb{C}}$ ist eine rationale Funktion $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ der Gestalt

$$T(z) := \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } ad - bc \neq 0,$$

wobei wir $T(\infty) = \frac{a}{c}$ und $T(\frac{-d}{c}) = \infty$ festlegen. Wir betrachten die elementaren Funktionen

$$\tau_w(z) := z + w, \ \rho(z) := \frac{1}{z}, \ \sigma_w(z) := wz \text{ für festes } w \in \mathbb{C}.$$

1. Zeigen Sie, dass T stetig in den Punkten ∞ und $\frac{-d}{c}$ bezüglich der Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ ist.

2. Geben Sie eine kurze geometrische Beschreibung der Funktionen τ_w, ρ und σ_w.

3. Zeigen Sie, dass sich jede Möbiustransformation mit $c \neq 0$ darstellen lässt als Komposition

$$T(z) = \tau_{\lambda_1} \circ \sigma_{\lambda_2} \circ \rho \circ \tau_{\lambda_3}(z) \text{ mit } \lambda_1 = \frac{a}{c}, \ \lambda_2 = \frac{bc - ad}{c^2}, \ \lambda_3 = \frac{d}{c}.$$

4. Folgern Sie, dass eine Möbiustransformation Kreise auf Kreise (und im Ausnahmefall auf Geraden) abbildet.
   Tipp: Wie Sie wissen kann jeder Kreis in $\mathbb{C}$ bequem dargestellt werden als eine Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - c| = r\}$, $c \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$.

Sehr empfehlenswert ist das kurze Video "Möbius Transformations Revealed" von Douglas Arnold und Jonathan Rogness: `http://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY`

Aufgabe 4.2 (Cayleyabbildung)**.** Eine besondere Möbiustransformation ist die *Cayleyabbildung*

$$h_C(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Plotten Sie die Bilder unter h_C derjenigen Geraden, die parallel zur reellen bzw. imaginären Achse sind.

2. Geben Sie die inverse Transformation h_C^{-1} an (Hinweis: Aufgabe 4.1)

3. Folgern Sie, dass h_C eine biholormorphe Abbildung der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ ist.

Aufgabe 4.3 (Sterngebiete)**.** Ein Sterngebiet ist eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$, in der es einen Punkt $z_* \in U$ gibt (einen *Sternmittelpunkt*), so dass für jeden Punkt $z \in U$ die ganze Verbindungsgerade $\{z_* + t(z - z_*) : t \in [0,1]\}$ in U enthalten ist.

Zeigen sie: Sind $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ Sterngebiete und z_* ein Sternmittelpunkt für U_1 und U_2, dann sind auch $U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cap U_2$ Sterngebiete bezüglich z_0.

Aufgabe 4.4 (Wegintegrale I)**.** Seien G_1, G_2 Gebiete in $\mathbb{C}$ und $f : G_1 \cup G_2 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Für jeden geschlossenen Weg in G_1 bzw. G_2 gelte $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Zeigen Sie: Wenn $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend ist, dann gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in $G_1 \cup G_2$.