

# Mathematik ist schön

Zwei Hochschullehrer visualisieren das Fach – und lassen es so besser begreifbar werden / Von Gesine Wiemer

Die Faszination für mathematisches Denken ist in uns Menschen angelegt. Als Kulturtechnik reicht sie zurück bis in uralte Gesellschaften. Mathematik ist auch sehr nützlich, aus unserem Alltag ist sie nicht mehr wegzudenken: Die gesamte Computertechnologie basiert auf mathematischen Methoden – kein Handy, kein Auto, keine Waschmaschine kommt ohne sie aus. Mathematiker sind in der Regel Analytiker, die komplizierte Probleme knacken – ganz anders als Künstler, denen es nicht um den Alltagsnutzen ihrer Werke geht. Doch immer wieder haben sich Künstler Anregungen in der Mathematik geholt, wie etwa Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer oder M.C. Escher. Ganz neue Möglichkeiten zu Visualisierung eröffnet heute der Computer.

Konrad Polthier, Mathematik-Professor an der Freien Universität Berlin, erklärt: „Früher ging es bei der Mathematik immer darum, ganz konkrete Probleme des Alltags zu lösen. So hat Archimedes die Flugbahnen von Kanonenkugeln berechnet, und der große Mathematiker Carl Friedrich Gauß hat im 19. Jahrhundert das Königreich Hannover vermessen.“ Zu Beginn des 20. Jahrhunderts hätten sich die Mathematiker dann auf fundamentale mathematische Theorien besonnen. Sie machten sich bewusst von der Anschauung frei, und leiteten die ganze mathematische Theorie aus einigen wenigen definierten Axiomen her. Nur so konnten sie sicher sein, dass das Gedankengebäude keine Lücken hat und es ohne Begründungen wie „das sieht man doch“ auskommt. Die Anschauung kann einen nämlich auch ganz schnell zu falschen Schlüssen verleiten.

Diese sehr theorielastige Sichtweise der Mathematik wurde auch in den Schulen übernommen. Waren vorher noch anschauliche Gipsmodelle gang und gäbe, verstaubten diese nun in den Vitrinen. Doch gab es immer einen gewissen Anteil von Schülerinnen und Schülern, die sich für das logische Denken begeisterten. „Eigentlich lernt man schon in der Schule eine ganze Menge mathematisches Handwerkszeug“, meint Polthier. „Aber es fehlt oft der letzte Schritt, bei dem die Schüler sehen, was man damit anfangen kann.“ Konrad Polthier hat das abstrakte mathematische Denken zwar immer großen Spaß gemacht, aber ihm lag auch das Visuelle, im Nebenfach studierte er Computergraphik. Um diese beiden Neigungen zu verbinden, ging er schon in den 1980er Jahren in die Mathematik-Bibliothek und suchte in den Büchern nach Abbildungen mit der Frage: Was sind die Formen der Mathematik? Ernüchtert stellte er fest: Selbst Geometrie-Bücher bestanden fast nur aus Text und Formeln, nur sporadisch gab es mal eine Schema-Zeichnung. Sehr früh hat Polthier daher Computeranimationen erstellt: „Von den Formen,

Reise ins Reich der Formen: die Spiralfächen des Wiener Geometrie- und Mathematikprofessors Georg Glaeser. G. GLAESER

die ich in Gedanken sah, konnte ich nun auch Bilder machen – aber umgekehrt konnte ich aus den Grafiken etwas lernen und kam zu neuen Resultaten, die meine Forschung weiterbrachten.“ Anfang der 1980er Jahre waren diese Computergrafiken noch neu, und sie stießen nicht überall auf Begeisterung. Viele angestammte Mathematiker waren der Meinung, damit lenke man sich nur ab. „Dabei machten wir es nicht der Ästhetik wegen“, betont Polthier. „Wir wollten in erster Linie mathematische Inhalte transportieren.“

Gemeinsam mit seinem Kollegen Georg Glaeser, Mathematik-Professor an der Universität für angewandte Kunst in Wien, hat er das Buch „Bilder der Mathematik“ veröffentlicht. Auf jeder Doppelseite gibt es eine zentrale mathematische Visualisierung, die dem Leser ein bedeutendes mathematisches Thema anschaulich

**Unendlich viele** Primzahlen gibt es. Das lernt jeder in der Schule. Aber wie beweist man das? Es kann doch sein, dass es irgendwo ab Hunderttrillionen plötzlich keine Primzahlen mehr gibt? Ein wirklich schöner Beweis geht auf Euklid zurück: Wir nehmen an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, sagen wir  $n$  Stück, diese benennen wir als  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ . Diese  $n$  Primzahlen multiplizieren wir miteinander und addieren eine 1, also  $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \dots \times p_n + 1$  und nennen

vorstellt und ihn in seinen Bann zieht. „Wir wollten damit den gleichen Effekt erreichen wie die Bilder von Escher.“ Wer zum Beispiel dessen Bild von der Treppe sehe, die immer nur nach oben führt, fange sofort an zu analysieren – ganz ohne dazu aufgefordert zu werden. Wer es genauer wissen will, findet Literaturangaben und Internetlinks

## PRIMZAHLEN

diese Zahl  $z$ . Die Zahl  $z$  lässt sich durch keine der Primzahlen  $p_1$  bis  $p_n$  teilen. Das hieße aber, dass  $z$  selbst eine Primzahl ist. Und das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass es nur die Primzahlen  $p_1$  bis  $p_n$  gibt.

**Dieser Trick** wird bei vielen mathematischen Beweisen angewendet: Wenn man etwas nicht direkt zeigen kann, nimmt man einfach das Gegenteil an und beweist, dass dies nicht möglich ist. Manchmal sind so auf den

ersten Blick komplizierte Probleme ganz einfach zu lösen.

**Fundgrube** für schöne Mathematik: Georg Glaeser, Konrad Polthier: Bilder der Mathematik. – 2. Auflage in vollständig überarbeiteter Softcover-Version, Heidelberg 2014. <http://www.bilder-der-mathematik.de/> (mit freien Downloads) iOrnament – App erhältlich im Apple App Store. Ornamente-Weltausstellung: <http://www.science-to-touch.com/>

schöne Bilder. Hinter den Mustern steckt eine starke mathematische Struktur, die auf Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen beruht. Schon durch einfaches Darauf-Loskritzeln können faszinierende Ornamente entstehen. Will man jedoch ein Kunstwerk zielgerichtet gestalten, muss man die Symmetrieregeln dahinter durchschauen – dann wird Mathematik zum kreativen Prozess. Jürgen Richter-Gebert sagt: „Ich war erstaunt, wer alles unsere App nutzt – vom dreijährigen Kind über den Professor, der die Ornamente für die Lehre nutzt, bis hin zu Künstlern.“

Begeisterte Nutzer haben Richter-Gebert immer wieder ihre schönsten Werke zugesandt. Um diese zu teilen, hat der Mathematiker die Ornamente der Öffentlichkeit in einer digitalen Ornamente-Weltausstellung zugänglich gemacht. „Besonders überrascht war ich, dass man vielen Bildern den kulturellen Hintergrund ansehen kann. Das gilt besonders für Ornamente aus exotischen Kulturkreisen, in denen Traditionen im Alltag noch eine größere Rolle spielen als bei uns, wie zum Beispiel Mexiko oder Korea.“

Mathe ist schön – gilt das nur für die Bilder der Mathematik oder auch für die Mathematik selbst, mit ihrer abstrakten Formelsprache? Der Direktor des Bonner Max-Planck-Instituts für Mathematik, Don Zagier, merkt an: „Die Mathematiker benutzen Wörter wie schön und elegant sogar häufiger als wissenschaftliche Begriffe wie überzeugend und korrekt. Und, was noch interessanter ist: Dieses Gefühl für mathematische Schönheit stellt sich sehr häufig als der sicherste Führer bei der Wahl des besten Weges durch das Labyrinth der Mathematik heraus, als eine Art Ariadnefaden.“ Warum können das so viele Menschen nicht nachempfinden? Don Zagier meint, dass die meisten Menschen nie echte Mathematik gesehen haben. Das zeigt vielleicht folgende Geschichte von Carl Friedrich Gauß, von dem oben schon die Rede war: Als neunjähriger Schüler bekam er die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Eine lästige Fleißaufgabe, die keinerlei Schönheit der Mathematik erahnen lässt. Der kleine Carl Friedrich ließ aber schon damals sein Genie aufblitzen. Er schrieb die Zahlen von 1 bis 100 in eine Reihe, in der Reihenfolge von 100 bis 1. Nun addierte er jeweils die beiden untereinander stehenden Zahlen, also  $1+100=101$ ,  $2+99=101$ ,  $3+98=101$ , usw. bis  $100+1=101$ . Er hatte 100 Mal die Summe 101 erhalten, und da er die Reihe doppelt aufaddiert hatte, musste er das Ergebnis nur noch halbieren. Die Lösung ist so schön und elegant, dass sie sich ganz einfach verallgemeinern lässt: Ist  $n$  eine beliebige natürliche Zahl, so ist die Summe von 1 bis  $n$  gleich  $n \times (n+1)/2$ . Das ist doch eine schöne Lösung – finden Sie nicht?

zum Vertiefen.

Nicht nur ansehen, sondern mathematische Ornamente selbst zeichnen können die Nutzer der App „iOrnament“. Jürgen Richter-Gebert von der Technischen Universität München trieb schon lange die Frage um, wie sich Mathematik vermitteln lässt, so dass es Spaß macht. Mit „iOrnament“ hat er wahre Begeisterungstürme ausgelöst. Auf der ganzen Welt kreieren Menschen damit wunder-