

**Schlüsselwörter** Euclidean surfaces, rigidity of ovaloids, rigidity of caps.

**Mathematics Subject Classification (2000)** 53C40, 53A04, 53A05

**Zusammenfassung** Die euklidische Geometrie von Eiflächen und Eikörpern bietet eine gute Gelegenheit, geometrische Begriffsbildungen und Sachverhalte aus der Flächentheorie einem breiten Publikum anschaulich zu machen. In dieser Arbeit erörtern wir die erstaunliche Stabilität von Eierschalen und dazu verwandte Probleme unter heuristisch-mathematischen Gesichtspunkten.

# Zur Geometrie von Frühstückseiern

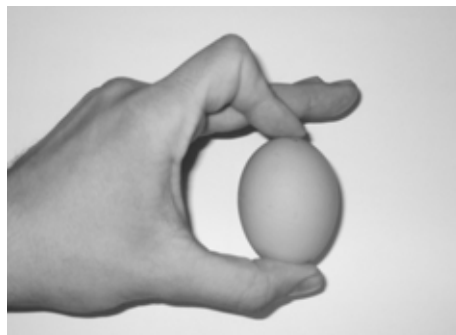
C. Lange · K. Polthier · U. Simon

*Dem Andenken an Karl Peter Grotemeyer gewidmet*

18. Januar 2009

## 1 Einleitung

Eine Eierschale verbindet zwei gegensätzliche Eigenschaften: Sie ist einerseits sehr dünn und zerbrechlich, und andererseits ist ein ganzes Ei erstaunlich stabil. Wir illustrieren diese Eigenschaften mit einem kleinen Experiment: *Die Bruchstücke der Schale eines Frühstückseis lassen sich zwischen den Fingern einer Hand leicht weiter zerbrechen, allerdings lassen sich die einzelnen Stücke nicht verbiegen. Hält man jedoch ein rohes Ei mit Daumen und Zeigefinger fest, wie auf Abbildung 1 gezeigt, so ist es selbst einer sehr starken Person normalerweise nicht möglich, das Ei mit den beiden Fingern zu zerstören oder zu deformieren.*



**Abb. 1** Lässt sich ein rohes Ei mit zwei Fingern verbiegen oder zerbrechen?

---

C. Lange · K. Polthier  
Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik, Arnimallee 6, 14195 Berlin,  
E-Mail: {clange, polthier}@mi.fu-berlin.de

U. Simon  
Technische Universität Berlin, Institut für Mathematik, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin,  
E-Mail: simon@math.tu-berlin.de

Ein zweites Experiment weist uns auf eine wichtige Eigenschaft der Eierschale hin: *Ersetzen wir das Frühstücksei durch einen Luftballon, so läßt sich dieser leicht verbiegen. Messen wir den Abstand zwischen zwei Punkten auf der Oberfläche, beispielsweise mit Hilfe eines Fadens, so finden wir stets ein Punktepaar, dessen Abstand sich beim Deformieren ändert.* Dies läßt uns vermuten, dass jede Deformation einer eiförmigen Fläche zwangsläufig mit einer Änderung des Abstands zwischen Punkten auf der Fläche einhergeht. Die dünne, starre Kalkschale von Eiern hat im Gegensatz zu der flexiblen Haut eines Luftballons die Eigenschaft, dass der Abstand zwischen je zwei Punkten auf der Oberfläche fixiert ist. Die Beobachtungen dieser Experimente werden wir im *Starrheitssatz* und *Kongruenzsatz* für Eiflächen mathematisch untermauern.

Die Klasse von Objekten, die wir im Folgenden betrachten, nennen wir *Eiflächen* oder auch *Ovaloide*. Aus mathematischer Sicht handelt es sich dabei um geschlossene, lokal streng konvexe Flächen. Uns soll jedoch die Anschauung reichen, dass die Fläche einer Eischale ähnelt. Neben Eiflächen betrachten wir auch *Halbeiflächen*. Zwei Halbeiflächen erhalten wir aus einer Eifläche, wenn wir diese mit parallelem Licht bestrahlen und die Eifläche entlang der „Tag-Nacht-Grenze“ aufschneiden. Die Schnittkurve (Randkurve der Halbeiflächen) bezeichnen wir auch als *Schattengrenze*. Halbeiflächen besitzen wie das Frühstücksei eine besondere Stabilität gegenüber Verbiegungen. Zur Veranschaulichung geben wir einige Beispiele:

- Das Reaktorgebäude eines Atomkraftwerks erinnert von seiner Form an ein aufgestelltes halbes Ei. Es heißt, dass es einen Flugzeugabsturz unbeschadet überstehen soll, siehe Abbildung 2.
- Halbierte Tischtennisbälle. Leicht lassen sich mit einer Laubsäge Tischtennisbälle halbieren. Dadurch wird offenbar, wie dünn das Material eines solchen Balls ist. Der ganze Tischtennisball läßt sich wie das Ei nur schwer mit einer Hand deformieren. Stellt man den halben Ball mit seiner Schnittfläche auf einen Tisch, so läßt sich auch diese Hälfte mit dem Daumen nur schwer zerdrücken.
- Die Kuppeln berühmter Dome und Kathedralen sind halben Sphären oder halben Rotationsellipsoiden nachempfunden und stehen auf einer ebenen Schattelinie. Diese Bauform ermöglicht den Deckenbau großer Hallen und hat sich als besonders stabil erwiesen, siehe Abbildung 3.



**Abb. 2** Das Reaktorgebäude eines Atomkraftwerks hat die Form einer Halbeifläche.



**Abb. 3** Beispiele sakraler Bauten, deren Kuppel eine Halbeifläche ist. links: Dom in Florenz, rechts: Basilika des Heiligen St. Peter in Rom.

- Der Volkswagen-Käfer, seine Fronthaube und seine Kotflügel sind ebenfalls halben konvexen Rotationsflächen nachempfunden. Der Käfer weist eine erstaunliche Formstabilität bei einem Überschlag auf, siehe Abbildung 4.

Die Frage, ob sich Flächen verzerrungsfrei deformieren lassen, das heißt, dass sich der (geodätische) Abstand zwischen Punkten *auf* der Fläche nicht ändert, wurde in der Mathematik eingehend studiert. Verzerrungsfreies Verbiegen einer Fläche ist durchaus möglich, wie das folgende Beispiel zeigt. Ein planares Rechteck im Raum kann bijektiv auf einen „geschlitzten Zylinder“ abgebildet werden, ohne dass sich die Entfernung zwischen Punkten *auf* der Fläche, der Flächeninhalt von Gebieten oder Winkel ändern, siehe Abbildung 5. Die historische Entwicklung der „Flächenverbiegung im Großen“ zwischen 1900 und 1955 wird in der Einleitung zu N. W. Efimovs Monographie [5] ausführlich beschrieben. Der Zeitraum bis 1900 wird in einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grottemeyer zu [5, S. 223– 225] skizziert.

Eine weiteres Problem ist es, zu entscheiden, ob zwei gegebene Flächen euklidisch kongruent sind oder nicht. Kongruent heißen sie, wenn die eine Fläche durch Rotation, Translation und gegebenenfalls Spiegelung in die andere überführt werden kann.

Grundlegende Eigenschaften von (Halb-)Eiflächen lassen sich in den folgenden Aussagen zusammenfassen. Den Begriff der (*inneren*) *Abstandsmessung* auf Flächen erläutern wir in Abschnitt 2.

- **Starrheitssatz für Eiflächen.** Eine Eifläche läßt sich nicht verbiegen, ohne dass sich die Abstandsmessung ändert.



**Abb. 4** Die Karosserie eines Volkswagen Käfer ist erstaunlich stabil. Das Bild rechts zeigt das Auto fast unversehrt nach einem vollen Überschlag.



**Abb. 5** Durch verzerrungsfreies Biegen kann ein planares Rechteck bijektiv auf einen geschlitzten Zylinder abgebildet werden, wobei Meßdaten wie Entfernung, Winkel und Flächeninhalt unverändert bleiben.

- **Kongruenzsatz für Eiflächen.** Zwei Eiflächen mit einander entsprechender Abstandsmessung sind kongruent.
- **Starrheitssatz für Halbeiflächen.** Eine Halbeifläche läßt sich nicht verbiegen, ohne dass sich die Abstandsmessung ändert.
- **Kongruenzsatz für Halbeiflächen.** Zwei Halbeiflächen mit kongruenten Rändern und mit entsprechender Abstandsmessung auf der Fläche sind kongruent.

Die Starrheits- bzw. Kongruenzsätze werden wir in einer diskretisierten Version plausibel machen. Um die Ausführungen allgemein verständlich und geometrisch intuitiv zu halten, werden wir technische Details auslassen und die notwendigen mathematischen Begriffe heuristisch einführen. Alle Aussagen lassen sich mathematisch präzisieren.

Der erste vollständige Beweis des Starrheitssatzes für Eiflächen wurde von H. Liebmann im Jahre 1900 gegeben [13]. In dieser Arbeit gab er auch das erste Beispiel einer punktierten Eifläche (das ist eine Eifläche minus einem Punkt) an, die sich verzerrungsfrei verbiegen läßt. Die punktierte Eifläche ist somit nicht starr.

Zum Kongruenzsatz für Eiflächen gibt es einen eng verwandten „Kongruenzsatz für konvexe Polyeder“. Er wurde von A. L. Cauchy unter Anleitung von J.-L. Lagrange im Jahr 1812 bewiesen [1]. Als eine erste unpräzise Erwähnung dieses Kongruenzsatzes für konvexe Polyeder verweisen wir auf „Definition 10“ in Euklids XI. Buch: *Gleich und ähnlich sind Körper, die von ähnlichen ebenen Flächen in gleicher Anzahl und Größe umfaßt werden* [6]. Einen Beweis für den Kongruenzsatz für Eiflächen lieferte S. Cohn-Vossen 1927 mit Hilfe der topologischen Index-Summenformel von Poincaré [3]. Dies war die Begründung der *Indexmethode* der globalen Differentialgeometrie. Einen alternativen Beweis unter Verwendung der *Integralformelmethode* gab G. Herglotz 1943 [10]. Einen neuen, sehr kurzen Beweis findet man in [21].

Analoge Aussagen für berandete Flächen wurden von K. P. Grotmeyer zu Beginn der fünfziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts bewiesen [7–9].

Wir geben einen Überblick über die folgenden Abschnitte. In den Abschnitten 2 und 3 werden die benötigten geometrischen Grundlagen wiederholt beziehungsweise heuristisch eingeführt: Wir erinnern zunächst in Abschnitt 2 an die *Abstands-*

*messung* zwischen Punkten auf einer Fläche, an die Messung des Flächeninhalts von Gebieten und die von Winkeln auf einer gekrümmten Fläche. Außerdem betrachten wir die *Krümmungsdaten* einer gekrümmten Fläche; diese Daten präzisieren wir in Abschnitt 3. In Abschnitt 4 diskutieren wir einen Starrheits- und Kongruenzsatz für konvexe Polytope. Diese benutzen wir, um durch ein Approximationsargument in Abschnitt 5 die Beweise der Sätze für Eiflächen zu skizzieren. Schließlich erörtern wir in Abschnitt 6 die Starrheit und Kongruenz von Halbeiflächen.

## 2 Abstandsmessung auf Flächen

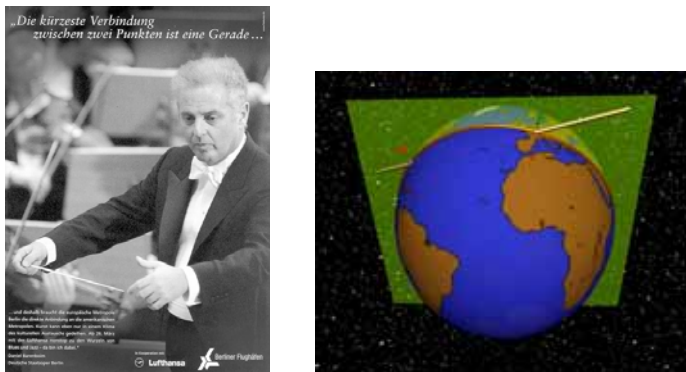
Wir sind es gewohnt, *Abstände* (Entfernung zweier Punkte zueinander), *Winkel* zwischen zwei Richtungen und *Flächeninhalte* oder *Volumina* von geometrischen Objekten in der Ebene oder im Raum zu messen. Mit dem Begriff *Meßdaten* fassen wir Abstand, Winkel und Flächeninhalt zusammen. Es läßt sich zeigen, dass man die Meßdaten für Winkel und Flächeninhalt bestimmen kann, wenn man für alle Punktepaare der gekrümmten Fläche ihre Abstände auf der Fläche kennt.

Um Meßdaten zu bestimmen, muß die Lage von Punkten in einem geeigneten Koordinatensystem bestimmt werden. In der Ebene benötigen wir dafür zwei Werte, um etwa kartesische oder Polarkoordinaten eines Punktes anzugeben; im Raum benötigen wir drei Werte.

Oft sollen geometrische Objekte verglichen werden: Wir fragen uns beispielsweise, ob Objekte durch euklidische Kongruenz ineinander überführt werden können. Um festzustellen, ob zwei planare Dreiecke kongruent sind, müssen drei geeignete Meßdaten verglichen werden. Bekanntlich können dies etwa alle drei Seitenlängen oder zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel sein. Für ein Viereck reicht es hingegen nicht aus, alle Seitenlängen zu kennen, um die Kongruenz zweier Vierecke zu verifizieren: Sie können durch Scherung ineinander übergehen und die Diagonalen können verschiedene Längen haben. Letzteres ist ebenfalls in verschiedenen Flächeninhalten zu erkennen. Ein Fundamentalsystem ist ein Minimalsystem von Meßdaten, das es ermöglicht zu entscheiden, ob zwei Objekte kongruent sind oder nicht. Für Dreiecke reicht es im allgemeinen, drei Meßdaten (Winkel oder Seitenlängen) zu kennen (drei Innenwinkel zählen wir nicht, da zwei Innenwinkel den dritten bestimmen – diese Meßdaten sind nicht unabhängig).

Die Messung von Länge, Winkel oder Volumen läßt sich jedoch nicht nur in der Ebene oder im Raum durchführen, sondern kann auch auf gekrümmten Flächen im Raum vorgenommen werden. Der Abstand zwischen zwei Punkten auf einer Fläche ist bekanntlich die Länge der kürzesten Verbindungskurve beider Punkte, die vollständig auf der Fläche verläuft. Diese Kurve heißt Geodätische. Was ist nun die kürzeste Verbindung zwischen Berlin und New York? Laut Lufthansa ist dies eine gerade Strecke, allerdings ist das keine geeignete Verbindung für ein Flugzeug, denn man müßte sich dazu durch die Erde bohren, siehe Abbildung 6. Flächeninhalte und Winkel am Schnittpunkt zweier Kurven auf einer Fläche können ebenfalls gemessen werden.

Wie können wir die Kongruenz von gekrümmten Flächenstücken feststellen? Denken wir an die Dreiecke und Vierecke in einer Ebene, so besteht Hoffnung, dass ein geeigneter Satz von Meßdaten verrät, ob zwei Flächenstücke kongruent

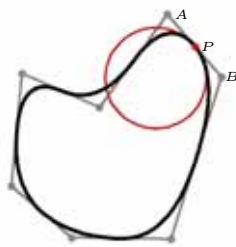


**Abb. 6** links: Nach der Reklame der Lufthansa ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade, rechts: Der kürzeste Weg *auf der Erde* von Berlin nach New York folgt einem Großkreis auf der Erdoberfläche.

sind oder nicht. Im Fall zweier Dreiecke in der Ebene benennen wir die Eckpunkte geeignet mit  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  und erhalten so eine Bijektion zwischen den Dreiecken. Erhält die Bijektion alle Seitenlängen, so können wir folgern, dass die Dreiecke kongruent sind. Allerdings können Flächenstücke gleiche Meßdaten haben, ohne dass die Flächenstücke kongruent sein müssen. Dazu erinnern wir uns an das Beispiel aus Abbildung 5. Der Abstand zwischen je zwei Punkten, der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geodätischen und der Flächeninhalt von Gebieten auf einerseits dem planaren Rechteck und andererseits dem geschlitzten Zylinder sind gleich, dennoch sind zwei Dreiecke mit gleichen Seitenlängen nicht kongruent. Eine derartige Deformation zwischen planarem Rechteck und geschlitztem Zylinder ist eine *verzerrungsfreie Verbiegung*.

### 3 Krümmung von Flächen

Bevor wir die Krümmung von Flächen diskutieren, betrachten wir die Krümmung von Kurven. Zu einer ebenen Kurve betrachten wir an jedem Punkt die *Tangente* und die darauf senkrecht stehende *Normale*. Sind alle Normalen parallel, so ist die Kurve eine Gerade. Ansonsten ist die Kurve gekrümmt, und die *Krümmung* in



**Abb. 7** Die Strecke  $\overline{AB}$  liegt tangential an der Kurve in  $P$  und dem dargestellten Kreis. Dieser Schmiegekreis approximiert die Kurve in  $P$  unter allen Kreisen durch  $P$  am besten.

einem Punkt der Kurve ist gleich dem Kehrwert des *Schmiegekreisradius* an diesem Punkt. Der Schmiegekreis an einem Punkt  $P$  der Kurve ist der Kreis durch  $P$ , der tangential an die Tangente der Kurve in  $P$  liegt und unter allen Kreisen durch  $P$  die Kurve am besten annähert, siehe Abbildung 7.

Wir sind nun in der Lage, die Krümmung einer Fläche in einem Punkt zu erklären. An jedem Punkt  $P$  einer Fläche sind Tangentialebene und Normale wohldefiniert. Wählen wir nun eine Tangentialrichtung, so definieren Normale und Tangentialrichtung eindeutig eine Ebene durch  $P$ . Diese Ebene schneidet die Fläche in einer planaren Kurve, und die Krümmung dieser Kurve im Punkt  $P$  ist die *Richtungskrümmung* der Fläche in  $P$  in der vorgegebenen Tangentialrichtung. Der *Weingartenoperator* beschreibt alle Richtungskrümmungen einer Fläche in jedem Punkt und kodiert somit ein vollständiges System der Krümmungsdaten einer Fläche. Interessanterweise ist der Weingartenoperator in einem Punkt  $P$  eindeutig durch die Kenntnis der minimalen und maximalen Richtungskrümmung in  $P$  bestimmt. Diese Richtungen stehen stets senkrecht aufeinander, und die zugehörigen Krümmungswerte  $k_1$  und  $k_2$  werden *Hauptkrümmungen* in  $P$  genannt. Wichtige spezielle Krümmungsdaten werden dadurch gegeben, dass wir in jedem Punkt den Mittelwert  $H := \frac{k_1+k_2}{2}$  oder das Produkt  $K := k_1k_2$  der Hauptkrümmungen betrachten. Der Mittelwert  $H$  heißt *mittlere Krümmung*, und das Produkt  $K$  heißt *Gaußkrümmung*  $K$ .

Wir erinnern an die physikalische Deutung der mathematischen Krümmungsdaten  $H$  und  $K$ .

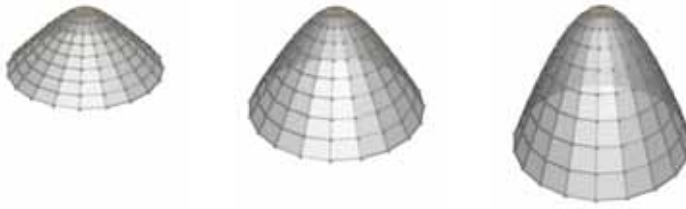
Flächen mit konstanter positiver mittlerer Krümmung treten beispielsweise als Seifenblasen in Erscheinung. Betrachten wir bei einer Seifenblase die Oberflächenspannung und den Gasdruck des eingeschlossenen Gases relativ zum Umgebungsdruck, so herrscht ein Kräftegleichgewicht, siehe Abbildung 8. Die mittlere Krümmung ist doch nun gerade der Quotient der Beträge dieser physikalischen Kräfte:

$$H = \frac{\text{Oberflächenspannung}}{\text{Druckdifferenz}}.$$



**Abb. 8** Die Oberflächenspannung wirkt dem Gasdruck in der Seifenblase entgegen, und es herrscht Kräftegleichgewicht.





**Abb. 9** Es gibt eine 1-Parameterfamilie nicht kongruenter zweischaliger Hyperboloide, so dass für jedes Parameterpaar eine Bijektion gefunden werden kann, die Punkte mit gleichen Krümmungsdaten aufeinander abbildet. Illustriert ist für drei Parameterwerte einer derartigen Familie eine der beiden Hyperbelschalen. Die Bijektionen werden durch das auf die Hyperbelschale gezeichnete Gitter induziert.

Verschwindet die mittlere Krümmung überall, gilt also in jedem Punkt der Fläche  $H = 0$ , so spricht man von einer *Minimalfläche*. Minimalflächen treten in natürlicher Weise bei Zeltedächern, Kapillaren, optischen Linsen und der Netzhaut auf, denn das Verschwinden der Oberflächenspannung ist von erheblicher bauphysikalischer Bedeutung. Zusammenfassend läßt sich sagen, dass Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung von großem Interesse für Anwendungen sind, sie sind fundamental für Physik, Medizin, Architektur und Ingenieurwesen.

Die Bedeutung der Gaußkrümmung  $K$  zeigt sich wesentlich in der Kartographie. Das *Theorema Egregium* von C. F. Gauß besagt, dass die Meßdaten einer Fläche die Gaußkrümmung eindeutig bestimmen. Da Landkarten (ein Blatt Papier) verschwindende Gaußkrümmung haben und die Erde (näherungsweise eine Sphäre) eine von Null verschiedene positive Gaußkrümmung besitzt, kann es prinzipiell keine verzerrungsfreien (mit anderen Worten: maßstabgetreuen) Landkarten der Erdoberfläche geben.

Man mag sich nun die Frage stellen, ob zwei Flächen kongruent sind, falls sie sich bijektiv aufeinander abbilden lassen, so dass einander entsprechende Punkte gleiche Krümmungsdaten haben. Die Antwort auf diese Frage ist nein, und ein Gegenbeispiel existiert in Form einer 1-Parameterschar von einander nicht kongruenten zweischaligen Hyperboloiden, siehe Abbildung 9. Somit ist eine Fläche weder durch alleinige Vorgabe der Meßdaten noch durch alleinige Vorgabe der Krümmungsdaten bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Das Theorema Egregium konstatiert, dass die Krümmungs- und Meßdaten nicht unabhängig voneinander sind. Biegen wir ein planares Rechteck verzerrungsfrei zu einem geschlitzten Zylinder, wie wir es in Abbildung 5 getan haben, so bleibt die Gaußkrümmung konstant, da die Richtungskrümmung in Richtung der Zylinderachse verschwindet. Demgegenüber ändert sich die mittlere Krümmung offenbar, da alle anderen Richtungskrümmungen positiv sind. Wir folgern, dass die Krümmungsdaten keinesfalls komplett durch die Längenmessung bestimmt werden können. Weiterhin kann man zeigen, dass die Kenntnis der Meßdaten zusammen mit der *mittleren* Krümmung in allen Punkten der Fläche nicht ausreicht, eine Fläche bis auf Kongruenz festzulegen. Der Hauptsatz der lokalen Flächentheorie [4] besagt allerdings: *Alle Meßdaten und alle Krümmungsdaten bilden zusammen ein Fundamentalsystem der euklidischen Flächentheorie*; mit anderen Worten:

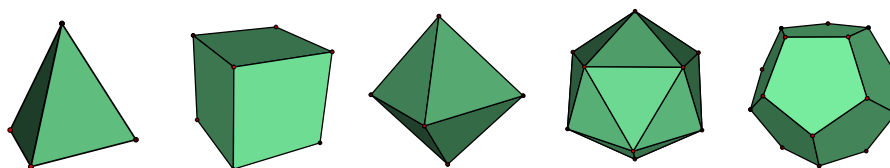


Abb. 10 Die platonischen Körper: Simplex, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder.

**Hauptsatz der lokalen Flächentheorie.** Haben zwei Flächenstücke identische Meß- und Krümmungsdaten, so sind sie kongruent.

Das Theorema Egregium sagt uns zwar, dass die Gaußkrümmung *lokal* durch die Längenmessung auf der Oberfläche bestimmt ist, aber wie wir gerade gesehen haben, sind dadurch nicht zwangsläufig *alle* Krümmungsdaten bestimmt. Sowohl Starrheits- als auch Kongruenzsatz auf Eiflächen implizieren dies jedoch. Aus dieser Sicht ist es sehr erstaunlich, dass in keinem der beiden Sätze gefordert wird, dass die Krümmungsdaten übereinstimmen. Es sind tiefgehende mathematische Erkenntnisse, dass für Eiflächen, also global, die Krümmungsdaten durch die Meßdaten festgelegt sind. In den beiden folgenden Abschnitten wollen wir dies in diskreten Versionen veranschaulichen und motivieren.

#### 4 Diskrete Stabilitätssätze

Die diskreten Objekte, die wir in diesem Zusammenhang betrachten, sind konvexe Polyeder. Sie entstehen als Schnittmenge endlich vieler affiner Halbräume. Die Oberfläche besteht aus Ecken, Kanten und Polygonen. Da wir uns für Eiflächen interessieren, nehmen wir zusätzlich an, dass das Polyeder beschränkt ist. Ein solches konvexes Polyeder wird auch Polytop genannt. Klassische Beispiele sind die in Abbildung 10 gezeigten platonischen Körper.

Stellen wir uns nun das Gittermodell eines quaderförmigen Regals mit vorgegebenen Kantenlängen vor. Unsere Erfahrung sagt uns, dass dieses Gittermodell instabil ist, da Scherbewegungen möglich sind. Bei Scherungen werden die Abstände der Kantenendpunkte unverändert gelassen, allerdings ändern sich einige Abstände von Endpunkten der Flächendiagonalen. Fordern wir, dass auch die Abstände der Endpunkte von Flächendiagonalen festgehalten werden, so wird das

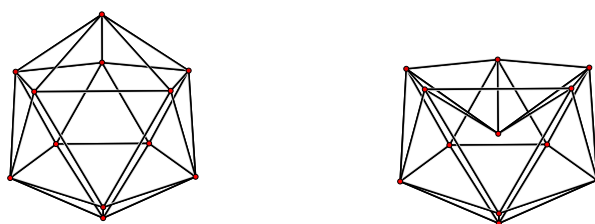


Abb. 11 Das Ikosaeder (links) mit transparenten Seitenflächen ist ein *konvexes* und *beschränktes* Polyeder. Die Angabe aller Meßdaten reicht jedoch nicht aus, um die Kongruenz von Polyedern zu folgern. Rechts ist ein *nicht konvexes* Polyeder abgebildet, welches identische Meßdaten wie das Ikosaeder hat.

Regal starr. Dies machen sich Hersteller einfacher Regale zunutze, sie liefern ihr Regal mit Diagonalstreben aus. Anstatt die Diagonalabstände der Seitenflächen zu fixieren, können alternativ die Flächeninhalte der Seitenflächen fixiert werden. Der Meßdatensatz, der aus allen Kantenlängen und den Seitenflächeninhalten besteht, bildet demzufolge ein Fundamentalsystem für quaderförmige Regale. Alle weiteren Daten des geometrischen Objekts sind dadurch determiniert. In diesem Zusammenhang weisen wir darauf hin, dass es wichtig ist, dass wir *konvexe* Polyeder betrachten. In Abbildung 11 sehen wir ein konvexes und ein nicht konvexes Modell eines beschränkten Polyeders, wobei die entsprechenden Kantenlängen und Flächeninhalte der Modelle übereinstimmen. Beide Polyeder sind in dem Sinn starr, dass ein entsprechendes Drahtmodell keine Scherung zuläßt, sie sind aber offenbar nicht kongruent. Durch die zusätzliche Annahme, dass die betrachteten Polyeder konvex sind, führen wir eine Zusatzbedingung ein, die uns einen Kongruenzsatz liefert. Dem Starrheits- und Kongruenzsatz für Eiflächen entsprechen die folgenden diskreten Versionen für Polytope [5, Kapitel II]:

- **Starrheitssatz für Polytope.** Ein Polytop mit fixierten Meßdaten für Kantenlängen und Flächeninhalte ist starr.
- **Kongruenzsatz für Polytope.** Zwei Polytope mit identischen Meßdaten für entsprechende Kantenlängen und Flächeninhalte sind kongruent.

Besonders interessant ist der Spezialfall eines *simplicialen* Polytops, bei dem alle Seitenflächen Dreiecke sind. Die Meßdaten der Kantenlängen sind hier hinreichend, um die Starrheit zu folgern, da die Seitenlängen eines Dreiecks dessen Flächeninhalt determinieren. Durch das Hinzufügen von Diagonalen kann jedes Polygon in Dreiecke zerlegt werden. Beschränken wir uns somit sowohl im Starrheits- als auch im Kongruenzsatz für Polytope auf simpliciale Polytope, so müssen wir lediglich die Meßdaten der Kantenlängen kennen, um alle Meßdaten rekonstruieren zu können.

## 5 Approximation von Eiflächen durch Polytope

Jede Fläche können wir durch eine *simpliciale Fläche* annähern. Dies ist eine aus planaren Dreiecken zusammengesetzte Fläche mit der Eigenschaft, dass der Schnitt von je zwei Dreiecken entweder disjunkt, eine Ecke oder eine Kante ist. Natürliche Fragestellungen in diesem Zusammenhang beschäftigen sich mit dem Konvergenzverhalten verschiedener geometrischer Größen, wenn eine glatte Fläche durch eine Folge simplicialer Flächen approximiert wird. Unter der zusätzlichen Annahme, dass die Normalen der simplicialen Flächen gegen Normalen der glatten Fläche konvergieren, kann beispielsweise gezeigt werden, dass die Abstandsmessung und damit auch die Bestimmung von Flächeninhalten der simplicialen Fläche gegen die Abstandsmessung und Flächeninhaltsbestimmung der glatten Fläche konvergiert, [11, 14, 15, 23]. Für mathematisch versierte Leser fügen wir an: Die Konvergenz der Normalen ist nicht selbstverständlich und muß im allgemeinen tatsächlich gefordert werden. Das sieht man etwa an den *Laternen*  $F_{n,m}$  von H. A. Schwarz (siehe Abbildung 12) ein [18]. Sie sind ein klassisches Beispiel dafür, dass Konvergenz im Hausdorffabstand nicht die Konvergenz der Normalen impliziert. Wir approximieren den Zylinder  $Z$  mit Radius  $r$  und Höhe  $h$  durch die simplicialen

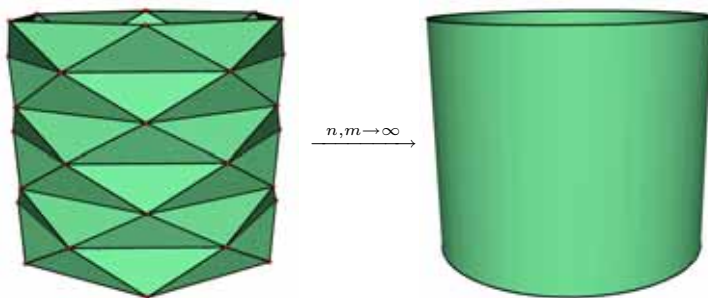


Abb. 12 Links eine Laterne  $F_{n,m}$  von H. A. Schwarz mit den Parametern  $n = 6$  und  $m = 7$ .

Flächen  $F_{n,m}$ : Betrachte  $m$  Kreisbögen auf dem Zylinder orthogonal zur Zylinderachse, die paarweise den Mindestabstand  $\frac{h}{m-1}$  haben. Jeden dieser Kreisbögen ersetzen wir durch ein regelmäßiges  $n$ -Eck, wobei benachbarte  $n$ -Ecke um  $\frac{\pi}{2n}$  verdreht sind. Schließlich fügen wir zwischen benachbarte  $n$ -Ecke insgesamt  $2n$  Dreiecke ein, wie es in Abbildung 12 illustriert ist. Eine Folge  $B_i = F_{n_i, m_i}$  mit  $n_{i+1} > n_i$  und  $m_{i+1} > m_i$  konvergiert stets punktweise gegen den Zylinder  $Z$ , aber die Normalen der Dreiecksflächen konvergieren genau dann gegen die entsprechenden Flächennormalen von  $Z$ , falls  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{m_i}{n_i} = 0$ .

Wir können nun beispielsweise den Kongruenzsatz für Eiflächen aus den Sätzen für konvexe Polytope folgern. Zunächst bemerken wir, dass für eine Folge simplizialer und konvexer Polytope  $P_i$ , die punktweise eine Eifläche  $E$  approximiert, stets die Normalen der Seitenflächen von  $P_i$  gegen die Normalen von  $E$  konvergieren, da die  $P_i$  (streng) konvex sind. Damit treten die oben anhand der Schwarzschen Laterne illustrierten Konvergenzprobleme nicht auf. Nehmen wir nun weiterhin an, dass sich die Eifläche  $E$  ohne Änderung der Meßdaten in eine andere Eifläche verbiegen läßt, so können wir mit Hilfe geeigneter approximierender Polytope und des Kongruenzsatzes für Polytope zeigen, dass die beiden Eiflächen kongruent sein müssen. Das bedeutet allerdings, dass die Verbiegung schon eine Kongruenz war.

## 6 Stabilität von Halbeiflächen

In den vorherigen Abschnitten haben wir die Starrheit von Eiflächen heuristisch motiviert, indem wir die Eiflächen diskretisiert und durch konvexe Polytope approximiert haben. Konvexe Polytope haben wir in einem Experiment durch einfachere Objekte ersetzt, wobei wir uns zur Veranschaulichung letztlich auf quaderförmige Regale beschränkten. So verdeutlichten wir, weshalb es nicht reicht, sich auf die Meßdaten der Kantenlängen zu beschränken, sondern dass es notwendig ist, auch die Seitendiagonalen oder die Flächeninhalte aller Seitenflächen einzubeziehen. Wir beginnen nun mit einem solchen quaderförmigen Regal, bei dem alle möglichen Seitenflächen hinzugefügt wurden, entfernen in einem ersten Schritt eine Seitenwand, und bemerken, dass das entstehende Regal nicht wackelt. In weiteren Schritten entfernen wir nacheinander weitere Seitenwände und achten darauf, dass von einem gegenüberliegenden Paar stets mindestens eine Seitenfläche vorhanden bleibt. Wir minimieren auf diese Weise den Materialaufwand für die Seitenwände

und erhalten die Starrheit des Regals. Natürlich hätten wir analoge Beobachtungen gemacht, wenn wir statt mit einem quaderförmigen Regal mit einer anderen Regalform begonnen hätten.

Schneiden wir nun eine Eifläche entlang einer Schattengrenze auf, so können wir das im vorherigen Gedankenexperiment damit vergleichen, dass sich die entfernten Seitenwände auf einer Seite der Schattengrenze befinden. Das dabei entstehende Regal ist also „nach unten offen“. Diese Gedankenexperimente veranschaulichen die folgende Aussage:

**Starrheitssatz für Halbeiflächen.** Man teile eine Eifläche entlang einer Schattengrenze, um eine Halbeifläche zu erhalten. Dann ist die Halbeifläche starr, das heißt, dass jedes Verbiegen die Meßdaten verändert.

## 7 Stabilität und Krümmungsdaten

Im Starrheits- und Kongruenzsatz für Eiflächen wird die Kenntnis der inneren Abstandsmessung vorausgesetzt, die Krümmungsdaten spielen keine Rolle. Im Hauptsatz der lokalen Flächentheorie sahen wir, dass die Kenntnis der Abstandsmessung *und* der Krümmungsdaten notwendig ist. Eine naheliegende Frage ist nun, ob wir beispielsweise im Kongruenzsatz für Eiflächen die Kenntnis der Abstandsmessung durch die Krümmungsdaten ersetzen können. In dieser Allgemeinheit kann diese Frage bisher nicht beantwortet werden. Allerdings gelang es E. B. Christoffel in [2] im Jahr 1865 zu beweisen, dass zwei Eiflächen mit *parallelen Normalen* kongruent sind, falls der Quotient  $\frac{H}{K}$  in entsprechenden Punkten übereinstimmt. Minkowski zeigte später in [14], dass der Quotient  $\frac{H}{K}$  im Satz von Christoffel durch die Gaußkrümmung  $K$  ersetzt werden kann. Man benötigt somit im Spezialfall der Eiflächen mit parallelen Normalen keine Kenntnis aller Krümmungsdaten. Man erhält außerdem ein Kongruenzresultat bei Gleichheit aller Krümmungsdaten, also bei Gleichheit der Weingartenoperatoren in entsprechenden Punkten, wenn man analytische Eiflächen mit einer Rotationssymmetrie betrachtet [19,20]. Das allgemeine Problem ist allerdings bis heute nicht gelöst.

## Bildnachweise

Das Foto des Atomkraftwerks Neckarwestheim in Abbildung 2 ist von T. Springer aufgenommen und der Allgemeinheit via wikimedia zur Verfügung gestellt worden [22]. Die Bilder aus Abbildung 3 sind Microsoft Encarta (Dom in Florenz) und [16, Abb. 309] (Basilika des Heiligen St. Peter in Rom) entnommen. Wir danken der Stiftung AutoMuseum Volkswagen in Wolfsburg dafür, dass wir die Sequenz des sich überschlagenden Volkswagen in Abbildung 4 verwenden dürfen. Das Bild mit Daniel Barenboim in Abbildung 6 wurde in einer Werbekampagne der Deutschen Lufthansa AG verwendet, während das andere Bild in Abbildung 6 aus dem Video *Geodesics and Waves* [17] stammt. Die Kräftevisualisierung der Seifenblase in Abbildung 8 ist aus dem Video MESH [12] ENTNOMMEN. ALLE WEITEREN GRAPHIKEN WURDEN MIT DER SOFTWARE JAVAVIEW ([HTTP://WWW.JAVAVIEW.DE](http://www.javaview.de)) VON DEN AUTOREN UNTER MITARBEIT VON KLAUS HILDEBRANDT ERSTELLT WORDEN.

## Literatur

1. A. L. CAUCHY, *Sur les polygones et les polyèdres (second memoire)*, J. DE L'EC. POLYT., **9** (1813), 87–98.
2. E. B. CHRISTOFFEL, *Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Fläche durch lokale Messungen auf derselben*, J. REINE ANGEW. MATH., **64** (1865), 193–209.
3. S. COHN-VOSSEN, *Zwei Sätze über die Starrheit der Eifläche*, NACHRICHTEN VON DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN, MATH.-PHYS. KLASSE, 1927, 125–134.
4. M. P. DO CARMO, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, VIEWEG VERLAGSGESELLSCHAFT, BRAUNSCHWEIG WIESBADEN, 1998.
5. N. W. EFIMOV, *Flächenverbiegung im Großen*, (MIT EINEM NACHTRAG VON E. REMBS UND K. P. GROTEMEYER), AKADEMIE-VERLAG, BERLIN, 1957.
6. EUKLID, *Die Elemente*, HERAUSGEGEBEN UND INS DEUTSCHE ÜBERSETZT VON C. THAER, WISSENSCHAFTLICHE BUCHGESELLSCHAFT, DARMSTADT, 1962.
7. K. P. GROTEMEYER, *Zur eindeutigen Bestimmung einer Fläche durch ihre erste Fundamentalform*, MATH. ZEITSCHR., **55** (1952), 253–268.
8. K. P. GROTEMEYER, *Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand*, MATH. ZEITSCHR., **58** (1953), 41–45.
9. K. P. GROTEMEYER, *Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschaftengrenze ist*, MATH. ZEITSCHR., **58** (1953), 272–280.
10. G. HERGLOTZ, *Über die Starrheit der Eiflächen*, ABH. MATH. SEMIN. UNIV. HAMBURG, **15** (1943), 127–129.
11. K. HILDEBRANDT, K. POLTHIER & M. WARDETZKY *On the Convergence of Metric and Geometric Properties of Polyhedral Surfaces*, GEOMETRIAE DEDICATA, **123** (2006), 89–112.
12. B. JANZEN & K. POLTHIER MESH – *Eine Reise durch die diskrete Geometrie*, SPRINGER VERLAG, BERLIN, 2008.
13. H. LIEBMANN, *Über die Verbiegung geschlossener Flächen positiver Krümmung*, MATH. ANN., **53** (1900), 81–112.
14. H. MINKOWSKI, *Volumen und Oberfläche*, MATH. ANN., **57** (1903), 447–495.
15. J.-M. MORVAN & B. THIBERT, *Approximation of the normal vector field and the area of a smooth surface*, DISCRETE AND COMPUTATIONAL GEOMETRY, **32** (2004), 383–400.
16. N. PEVSNER, *Europäische Architektur*, PRESTEL-VERLAG, MÜNCHEN, 1957.
17. K. POLTHIER, M. SCHMIES, M. STEFFENS & C. TEITZEL *Video Geodesics and Waves*, IN DVD VideoMath Festival at ICM'98, SPRINGER VERLAG, BERLIN, 2005.
18. H. A. SCHWARZ, *Sur une déformation erronée de l'aire d'une surface courbe*, IN *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, BAND 2, SPRINGER-VERLAG, BERLIN, 1890, 309–311.
19. U. SIMON, L. VRANCKEN, C. WANG & M. WIEHE, *Intrinsic and extrinsic geometry of ovaloids and rigidity*, IN *Geometry and Topology of Submanifolds X*, W. H. CHEN ET. AL. (EDS), WORLD SCIENTIFIC, SINGAPORE, 2000, 284–293.
20. U. SIMON, K. VOSS, L. VRANCKEN & M. WIEHE, *Surfaces with prescribed Weingarten-operator*, BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOL. 57, WARZAWA, 2002, 171–178.
21. U. SIMON, A. SCHWENK-SCHELLSCHMIDT & L. VRANCKEN, *Codazzi-equivalent Riemannian metrics*, SUBMITTED.
22. T. SPRINGER, *AKW Gemeinschaftskraftwerk Neckar/Neckarwestheim*, 2006.  
[HTTP://COMMONS.WIKIMEDIA.ORG/WIKI/IMAGE:ATOMKRAFTWERK\\_GKN\\_NECKARWESTHEIM.JPG](http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Atomkraftwerk_GKN_Neckarwestheim.JPG)
23. M. WARDETZKY, *Discrete Differential Operators on Polyhedral Surfaces – Convergence and Approximation*, DISSERTATION, FU BERLIN, 2006.